Facultat de Matemàtiques i Estadística
Examen final d'Àlgebra Lineal
30 de juny de 2015

Problema 1 (3 punts). Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z, t) = (x + y - 2z, -2x - y + 4z, -3x - y + 6z).$$

Siguin $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 3z\}$ i $W_2 = \langle(0, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

1. Doneu equacions dels subespais $f(W_1)$, $f(W_2)$, $f(W_1 \cap W_2)$ i $f(W_1) \cap f(W_2)$.
2. Doneu bases dels subespais $f^{-1}(W_1)$, $f^{-1}(W_2)$, $f^{-1}(W_1 \cap W_2)$ i $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$.

Sigui ara $f\colon U \to V$ una aplicació lineal qualsevol entre dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Siguin $W_1, W_2 \subseteq U$ i $W_1', W_2' \subseteq V$ subespais. Demostreu que:

3. $f^{-1}(W_1' \cap W_2') = f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2')$,
4. $f(W_1 \cap W_2) \subseteq f(W_1) \cap f(W_2)$,
5. Si f és injectiva aleshores $f(W_1 \cap W_2) = f(W_1) \cap f(W_2)$.

Solució: Es té $W_1 = \langle(1, -1, 0), (2, 1, 1)\rangle$ i $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$; $W_1 \cap W_2$ és el subespai determinat per les equacions $x + y - 3z = x - z = 0$, que està generat pel vector $(1, 2, 1)$.

1. Per a calcular imatges es treballa amb generadors:

   - $f(W_1) = \langle f(1, -1, 0), f(2, 1, 1)\rangle = \langle(0, -1, -2), (1, -1, -1)\rangle$,
   - $f(W_2) = \langle f(0, 1, 0), f(1, 0, 1)\rangle = \langle(1, -1, -1), (-2, 4, 6)\rangle$, i
   - $f(W_1 \cap W_2) = \langle f(1, 2, 1)\rangle = \langle(1, 0, 1)\rangle$.

   Les equacions que defineixen aquests espais es calculen de la manera habitual:

   - $f(W_1)$ està definit per $x + 2y - z = 0$,
   - $f(W_2)$ està definit per $x + 2y - z = 0$,
   - $f(W_1 \cap W_2)$ està definit per $x - z = y = 0$.

   Observant les dues primeres equacions es veu que $f(W_1) = f(W_2)$ i, per tant, $f(W_1) \cap f(W_2)$ és aquest mateix subespai, de dimensió 2 i definit per l'equació $x + 2y - z = 0$.

2. Per a calcular antiimatges de subespais es treballa amb equacions:

   - $f^{-1}(W_1)$ està definit per $(x + y - 2z) + (-2x - y + 4z) = 3(-3x - y + 6z)$, que equival a $8x + 3y - 16z = 0$,
   - $f^{-1}(W_2)$ està definit per $(x + y - 2z) = (-3x - y + 6z) \Leftrightarrow 4x + 2y - 8z = 0$,
   - $f^{-1}(W_1 \cap W_2)$ està definit per totes dues equacions alhora: $8x + 3y - 16z = 2x + y - 4z = 0$, i clarament coincideix amb $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$.

   Per a trobar bases es resolen les equacions i es troba:

   - $f^{-1}(W_1) = \langle(3, -8, 0), (2, 0, 1)\rangle$,

- $f^{-1}(W_2) = \langle(1,-2,0),(2,0,1)\rangle$,
- $f^{-1}(W_1 \cap W_2) = \langle(2,0,1)\rangle = f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$.

3. $\boldsymbol{u} \in f^{-1}(W_1' \cap W_2') \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}) \in W_1' \cap W_2' \Leftrightarrow f(\boldsymbol{u}) \in W_1'$ i $f(\boldsymbol{u}) \in W_2' \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \in f^{-1}(W_1)$ i $\boldsymbol{u} \in f^{-1}(W_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} \in f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$,
4. $\boldsymbol{v} \in f(W_1 \cap W_2) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{u} \in W_1 \cap W_2$ amb $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Aleshores $\boldsymbol{u} \in W_1 \Rightarrow \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) \in f(W_1)$ i $\boldsymbol{u} \in W_2 \Rightarrow \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) \in f(W_2)$. Per tant $\boldsymbol{v} \in f(W_1) \cap f(W_2)$.
5. Suposi's que f és injectiva. Sigui $\boldsymbol{v} \in f(W_1) \cap f(W_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in f(W_1)$ i $\boldsymbol{v} \in f(W_2) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{u}_1 \in W_1$ amb $f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}$ i $\exists \boldsymbol{u}_2 \in W_2$ amb $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}$. Per injectivitat es dedueix que $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$, i per tant aquest és un element de $W_1 \cap W_2$. Aleshores $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{v}_2) \in f(W_1 \cap W_2)$. Per tant, $f(W_1) \cap f(W_2) \subseteq f(W_1 \cap W_2)$ i junt amb l'apartat anterior es dedueix la igualtat de tots dos conjunts.

Problema 2 (2 punts). Sigui $W \subset V$ un subespai de V amb $W \neq V$. Sigui $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ una base de W i sigui $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una ampliació a una base de V. Es consideren els dos subconjunts $U_i \subseteq \operatorname{End}(V)$ següents:

$$U_1 = \{f \in \operatorname{End}(V) : \operatorname{Ker} f \subseteq W \subseteq \operatorname{Im} f\}, \quad U_2 = \{f \in \operatorname{End}(V) : \operatorname{Im} f \subseteq W \subseteq \operatorname{Ker} f\}$$

1. Demostreu que, d'aquests dos subconjunts, un és un subespai i l'altre no ho és.
2. Sigui $U = U_i$ el subconjunt que és un subespai. Digueu com és la matriu d'un element $f \in U$ en la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ i a partir d'això calculeu $\dim U$.

Solució:

1. Un subespai ha de contenir l'aplicació lineal zero $f = \mathbf{0} \in \operatorname{End}(V)$, que envia tots els vectors al zero. Aquesta aplicació té nucli V i imatge trivial. Amb això ja es veu que U_1 no és un subespai ja que $\operatorname{Ker} \mathbf{0} = V \not\subseteq W \not\subseteq \{0\} = \operatorname{Im} \mathbf{0}$.

   Per veure que U_2 sí que és subespai s'ha de veure que és tancat per la suma i pel producte per escalars. Siguin $f, g \in U_2$. S'ha de veure que $f + g \in U_2$ i $\lambda f \in U_2$ per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$:

   - $f + g \in U_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f+g) \subseteq W \subseteq \operatorname{Ker}(f+g)$.
     - Inclusió $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq W$. Sigui $(f+g)(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}(f+g)$. Aleshores $(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \in W$ ja que $f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f \subseteq W$ i $g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} g \subseteq W$.
     - Inclusió $W \subseteq \operatorname{Ker}(f+g)$. Sigui $\boldsymbol{w} \in W$. Aleshores $(f+g)(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w}) + g(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ja que $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} f$ i $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} g$.
   - $\lambda f \in U_2 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda f) \subseteq W \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda f)$.
     - Inclusió $\operatorname{Im}(\lambda f) \subseteq W$. Sigui $(\lambda f)(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}(\lambda f)$. Aleshores $(\lambda f)(\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v}) \in W$ ja que $f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f \subseteq W$ i W és un subespai.
     - Inclusió $W \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda f)$. Sigui $\boldsymbol{w} \in W$. Aleshores $(\lambda f)(\boldsymbol{w}) = \lambda f(\boldsymbol{w}) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ja que $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} f$.

2. Sigui $\ell = n - k$. Com que els primers k vectors $\boldsymbol{v}_i$ pertanyen a $W \subseteq \operatorname{Ker} f$, les seves imatges són zero, i per tant les primeres k columnes de la matriu contenen zeros. Els ℓ vectors $\boldsymbol{v}_i$ restants poden tenir imatge qualsevol, però com que $\operatorname{Im} f \subseteq W$ aquesta imatge és una combinació lineal dels k primers vectors $\boldsymbol{v}_i$, que són base de W. Per tant la matriu de f és una matriu per caixes de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} & \boldsymbol{A} \\ \mathbf{0}_{\ell\times k} & \mathbf{0}_{\ell\times\ell} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{k\times\ell}(\mathbb{K}).$$

Tota matriu com aquesta correspon en la base $\boldsymbol{v}_i$ a un endomorfisme $f \in U$ ja que el fet que les primeres k columnes siguin zero equival a que $W \subseteq \operatorname{Ker} f$ i el fet que les últimes $\ell = n - k$ columnes siguin zero equival a que $\operatorname{Im} f \subseteq W$. Aquestes matrius formen un espai vectorial de dimensió $k \times \ell = k \times (n-k)$, i aquesta és, per tant, la dimensió de l'espai U

Problema 3 (2 punts). Sigui $f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$ un endomorfisme.

1. Demostreu que si f no té subespais invariants diferents de $\{\mathbf{0}\}$ i de $\mathbb{K}^n$ aleshores existeix una base en que la matriu de f és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

2. És cert el recíproc de l'apartat anterior?

Solució:

1. Sigui $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ un vector no nul qualsevol. Es vol veure que els n vectors

$$\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}), f^2(\boldsymbol{v}), \ldots, f^{n-1}(\boldsymbol{v})$$

són linealment independents, i per tant una base de $\mathbb{K}^n$. Suposi's que no ho són, i sigui $x_0\boldsymbol{v} + x_1 f(\boldsymbol{v}) + \cdots + x_{n-1} f^{n-1}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ una relació de dependència lineal. Sigui $1 \leqslant k \leqslant n-1$ l'índex més gran amb coeficient $x_k \neq 0$. Aleshores

$$f^k(\boldsymbol{v}) = -\frac{x_0}{x_k}\boldsymbol{v} - \frac{x_1}{x_k} f(\boldsymbol{v}) - \cdots - \frac{x_{k-1}}{x_k} f^{k-1}(\boldsymbol{v})$$

és una combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}), \cdots, f^{k-1}(\boldsymbol{v})$. Aleshores el subespai generat per aquests vectors $W = \langle \boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}), \cdots, f^{k-1}(\boldsymbol{v}) \rangle$ és un subespai invariant per f, ja que f envia cadascun dels seus generadors a un element del mateix subespai. Però aquest espai és $\neq \{\mathbf{0}\}$ ja que conté $\boldsymbol{v}$ i és diferent de $\mathbb{K}^n$ ja que està generat per $k < n$ vectors en contra de la hipòtesi, i aquesta contradicció demostra que la suposició era falsa.

En la base $\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}), f^2(\boldsymbol{v}), \ldots, f^{n-1}(\boldsymbol{v})$ la matriu de f té la forma donada, on els escalars x_i de l'última columna són els coeficients de la combinació lineal

$$f(f^{n-1}(\boldsymbol{v})) = x_1\boldsymbol{v} + x_2 f(\boldsymbol{v}) + \cdots + x_n f^{n-1}(\boldsymbol{v}).$$

2. El recíproc d'aquesta afirmació no és cert. Per exemple, es pot agafar la matriu de la forma donada amb tots els x_i iguals a zero. És la matriu en la base canònica d'un endomorfisme f que té nucli $\operatorname{Ker} f = \langle (0, 0, \ldots, 0, 1) \rangle$ de dimensió 1 generat per l'últim vector de la base canònica. Com que el nucli d'un endomorfisme és sempre un subespai invariant, aquest és un exemple en que la matriu de l'endomorfisme té la forma donada i en canvi l'endomorfisme té un subespai invariant diferent del trivial i del total.

Problema 4 (3 punts). Calculeu, en funció dels paràmetres $a, b, c \in \mathbb{K}$, la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}).$$

Solució: El polinomi característic és $(X-1)^4$: valor propi 1 de multiplicitat 4. Per tant la seva forma de Jordan de la matriu consisteix en caixes de Jordan totes de valor propi 1. Per calcular la forma de Jordan s'han de calcular els subespais $\operatorname{Ker}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^k)$. Les matrius són:

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^4 = \boldsymbol{0}_{4\times 4}$$

Les dimensions d'aquests nuclis es veuen clarament en aquestes matrius. Es tenen els casos següents:

- $a \neq 0$. La matriu $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$ té rang $3 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4) = 1$. Això implica que $\boldsymbol{A}$ té un únic bloc de Jordan de mida 4. Per trobar una base de Jordan es comença amb un vector $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^4) \setminus \operatorname{Ker}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^3)$, per exemple $\boldsymbol{v} = (0,0,0,1)$ i se li va aplicant $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$. La base és:

  $$(0,0,0,1), (c,b,a,0), (2ab,a^2,0,0), (a^3,0,0,0).$$

  Es té:

  $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a^3 & 2ab & c & 0 \\ 0 & a^2 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $a = 0$ i $b \neq 0$. La matriu $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$ té rang $2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4) = 2$. La matriu $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^2$ és zero i per tant el seu nucli ja és l'espai total. Això implica que $\boldsymbol{A}$ té dos blocs de Jordan de mida 2. Per trobar-los es comença amb dos vectors de $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4)^2 = \mathbb{K}^4$ que siguin independents mòdul el subespai $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$; per exemple els vectors $(0,0,0,1)$ i $(0,0,1,0)$. La base de Jordan s'obté afegint les imatges d'aquests vectors per $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}_4$:

  $$(0,0,0,1), (c,b,0,0), (0,0,1,0), (b,0,0,0).$$

  Es té:

  $$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $a = b = 0$ i $c \neq 0$. La matriu $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4$ té rang 1 $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4) = 3$. Això implica que $\boldsymbol{A}$ té tres blocs de Jordan, que han de ser dos de mida un i un de mida dos. Per trobar-los s'agafa un vector de $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4)^2 = \mathbb{K}^4$ que no sigui del subespai $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4) = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$. Per exemple el vector $(0,0,0,1)$. La seva imatge per $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4$ és el vector $(c,0,0,0)$ i ara es completa a una base amb dos vectors més de $\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4)$. Per exemple una base de Jordan és

$$(0,0,0,1),(c,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0).$$

  Es té:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $a = b = c = 0$. En aquest cas la matriu ja és directament diagonal i és la seva pròpia forma de Jordan: té quatre blocs de Jordan tots de mida 1. Com que $\dim \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_4) = 4$, qualsevol base de $\mathbb{K}^4$ és una base de Jordan.