Facultat de Matemàtiques i Estadística
Examen final d'Àlgebra Lineal
19 de gener de 2015

Problema 1 (1.5 punts). Siguin $f, g, h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ els tres endomorfismes definits per:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (-2x+y, 3x+2y), \\ g^{-1}(x,y) &= (2x+3y, x+2y), \\ h(1,3) &= (-1,8), \quad h(2,-1) = (-2,2) \end{aligned}.$$

Digueu si són linealment dependents o independents a l'espai vectorial $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ i, si són linealment dependents, doneu una relació de dependència lineal entre ells.

Solució: Els endomorfismes de $\mathbb{R}^2$ s'identifiquen amb matrius de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ usant la base canònica. Les matrius $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ corresponents a f, g i h són:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El sistema lineal $\boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}y + \boldsymbol{C}z = \boldsymbol{0}$ equival al sistema de quatre equacions i tres incògnites següent:

$$\begin{aligned} -2x + 2y - z &= 0 \\ x - 3y &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Aplicant eliminació gaussiana aquest sistema es transforma en el sistema en forma esglaonada reduïda $x + \frac{3}{4}z = y + \frac{1}{4}z = 0$. Per tant, té solució no trivial, i això equival a dir que els tres endomorfismes són linealment dependents. Una solució no trivial es pot trobar donant el valor $z = -4$, amb el qual es té $x = 3$ i $y = 1$. Aquesta solució dona la relació de dependència lineal

$$3f + g - 4h = 0.$$

Problema 2 (1.5 punts). Siguin U i V dos $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita. Siguin $W_1 \subseteq U$ i $W_2 \subseteq V$ subespais. Demostreu que existeix una aplicació lineal $f\colon U \to V$ amb $\mathrm{Ker}\, f = W_1$ i $\mathrm{Im}\, f = W_2$ si, i només si, $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim U$.

Solució: Per a tota aplicació lineal es compleix la igualtat

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim U.$$

Per tant si $W_1 = \mathrm{Ker}\, f$ i $W_2 = \mathrm{Im}\, f$ aleshores $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim U$. Per veure que és suficient, sigui $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ una base del subespai W_1 i sigui $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$ una ampliació a una base de U, amb $r + s = n = \dim U$. Aleshores la igualtat $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim U$

assegura que $\dim W_2 = s$. Sigui $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ una base de $W_2 \subseteq V$. Es defineix $f\colon U \to V$ com l'aplicació lineal que sobre els elements de la base $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ pren els valors següents:

$$f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{v}_i,\ i = 1, \dots, s, \qquad f(\boldsymbol{w}_j) = \boldsymbol{0},\ j = 1, \dots, r.$$

Aquesta aplicació lineal compleix les condicions demanades: $\operatorname{Ker} f = \langle \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r \rangle = W_1$ i $\operatorname{Im} f = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s \rangle = W_2$.

Problema 3 (1.5 punts). Siguin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demostreu que:

1. $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leqslant \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rang}(\boldsymbol{B})$.
2. $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = 1$ si, i només si, existeixen vectors columna no nuls $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tals que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^t$.
3. $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) \leqslant r$ si, i només si, existeixen vectors columna $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tals que $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^t$.

Solució:

1. Siguin $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^n$ les files de $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, respectivament. Per definició, el rang d'una matriu és la dimensió del subespai generat per les seves files. Com que cada suma $\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i$ és una combinació lineal de les $\boldsymbol{a}_i$ i les $\boldsymbol{b}_j$ es té la inclusió de subespais de $\mathbb{R}^n$ següent:

$$\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{b}_n \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle + \langle \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \rangle.$$

   Per tant,

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \dim(\langle \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{b}_n \rangle) \\ &\leqslant \dim(\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle) + \dim(\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rang}(\boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

2. Sigui $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^t$. Aleshores les files de $\boldsymbol{A}$ són els múltiples del vector no nul $\boldsymbol{v}^t$ amb coeficients les components $u_1, \dots, u_n$ del vector $\boldsymbol{u}$. Com que alguna d'aquestes components és no nul·la, es té:

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \dim(\langle u_1\boldsymbol{v}^t, u_2\boldsymbol{v}^t, \dots, u_n\boldsymbol{v}^t \rangle) = \dim(\langle \boldsymbol{v}^t \rangle) = 1.$$

   Recíprocament, si la matriu $\boldsymbol{A}$ té rang 1 aleshores les seves files $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ generen un espai vectorial de dimensió 1. Sigui $\boldsymbol{a}_k$ una fila diferent del vector $\boldsymbol{0}$. Aleshores totes les files són múltiples de $\boldsymbol{a}_k$. Sigui $\boldsymbol{a}_i = x_i\boldsymbol{a}_k$ amb $x_i \in \mathbb{R}$ no tots zero (per exemple, $a_k = 1$). La matriu $\boldsymbol{A}$ és el producte del vector columna no nul $\boldsymbol{u}$ de components $x_1, \dots, x_n$ pel vector fila no nul $\boldsymbol{v}^t$, amb $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_k$.

3. Suposi's que $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^t$. L'apartat anterior assegura que el rang de cada matriu $\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^t$ és 1 si $\boldsymbol{u}_i$ i $\boldsymbol{v}_i$ són diferents de zero, i aquest rang és clarament 0 si algun dels dos vectors és el vector zero. Aplicant l'apartat 1 es té

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \operatorname{rang}(\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^t) = \sum_{i=1}^{r} (0 \ o\ 1) \leqslant r.$$

   Recíprocament, suposi's que $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) \leqslant r$. Siguin $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ vectors qualsevol que generen les files de la matriu. La fila i-èsima $\boldsymbol{a}_i$ es pot escriure de la forma

$\boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^r x_{ij}\boldsymbol{w}_j$, per a $i = 1, \dots, n$. Siguin $\boldsymbol{u}_j$ els vectors columna de components $(x_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, i siguin $\boldsymbol{v}_j$ els vectors columna $\boldsymbol{w}_j^t$, transposats dels $\boldsymbol{w}_j$. Aleshores $\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^r \boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^t$. En efecte, la fila i-èsima de cada producte $\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^t$ és el vector $x_{ij}\boldsymbol{v}_j^t = x_{ij}\boldsymbol{w}_j$, i la fila i-èsima del sumatori és $\sum_{j=1}^r x_{ij}\boldsymbol{w}_j$, que és la fila i-èsima de $\boldsymbol{A}$.

Alternativament: sigui $s = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) \leqslant r$. Aleshores existeixen matrius invertibles $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tals que la matriu $\boldsymbol{PAQ}$ és la matriu diagonal que té s uns i després tot zeros a la diagonal. Tenint en compte que el producte $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^t$ del vector i-èsim de la base canònica és la matriu que té zeros a totes les entrades excepte un 1 a la posició (i, i) es veu que $\boldsymbol{PAQ} = \sum_{i=1}^s \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^t$. Per tant, $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^s \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^t\boldsymbol{Q}^{-1}$. Dient $\boldsymbol{u}_i$ als vectors columna $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{v}_i^t$ als vectors fila $\boldsymbol{e}_i^t\boldsymbol{Q}^{-1}$ per a $i = 1, \dots, s$ i agafant com a zero els vectors $\boldsymbol{u}_i$ i $\boldsymbol{v}_i^t$ per a $i = s+1, \dots, r$ s'obté una expressió $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^s \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^t = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i^t$.

Problema 4 (3.5 punts). Donats $a, b \in \mathbb{R}$, es considera l'endomorfisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ que en la base canònica ve donat per la matriu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Demostreu que $\det \boldsymbol{A} = (a+3b)(a-b)^3$.
2. Discutiu el rang de $\boldsymbol{A}$ segons els valors de a i b.
3. Comproveu que el subespai $W = \langle (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1) \rangle$ és invariant per f, i calculeu la matriu de la restricció $f|_W$.
4. Digueu per a quins valors de a i b l'endomorfisme diagonalitza i, quan ho faci, doneu una base de vectors propis.
5. Calculeu $\boldsymbol{A}^n$ per a tot $n \geqslant 1$ quan $a + 3b = 1$.

SOLUCIÓ:

1. Restant a la quarta fila la tercera, a la tercera la segona, i a la segona la primera, el determinant no canvia:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & a-b & 0 \\ 0 & 0 & b-a & a-b \end{vmatrix}.$$

Ara se suma a la tercera columna la quarta, a la segona la tercera i a la primera la segona. El determinant no canvia:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & a-b & 0 \\ 0 & 0 & b-a & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & 3b & 2b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Aquesta matriu és diagonal i el seu determinant és el producte dels elements de la diagonal: $(a+3b)(a-b)^3$

2. Les manipulacions anteriors de files i columnes no modifiquen el rang. Mirant la darrera matriu de l'apartat anterior es veu immediatament que

   - si $a \neq b$ i $a \neq -3b$ el rang és 4 (les quatre files són independents),
   - si $a \neq b$ i $a = -3b$ el rang és 3 (les tres últimes files són independents),
   - si $a = b$ i $a \neq -3b$ el rang és 1 (només la primera fila és diferent de zero), i
   - si $a = b$ i $a = -3b$ (que equival a $a = b = 0$) el rang és 0 (la matriu és zero).

3. Es calcula

$$\begin{aligned} f(1,1,-1,-1) &= (a-b, a-b, b-a, b-a) = (a-b)(1,1,-1,-1), \\ f(1,-1,1,-1) &= (a-b, b-a, a-b, b-a) = (a-b)(1,-1,1,-1), \\ f(1,-1,-1,1) &= (a-b, b-a, b-a, a-b) = (a-b)(1,-1,-1,1). \end{aligned}$$

   Per tant, tots tres vectors, que són linealment independents, tal i com es pot comprovar fàcilment, són vectors propis de valor propi $a-b$. La matriu de $f|_W$, en la base formada per aquests tres vectors, és la matriu diagonal

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

4. Per l'apartat anterior l'escalar $a-b$ és un valor propi de multiplicitat geomètrica $\geqslant 3$. Per tant és una arrel del polinomi característic de multiplicitat $\geqslant 3$. Com que la traça de la matriu és la suma de les arrels (o el determinant és el producte) es dedueix que la quarta arrel λ ha de complir $3(a-b)+\lambda = 4a$ (o $(a-b)^3\lambda = (a-b)^3(a+3b)$) i s'obté que el quart valor propi és $a+3b$.

   Com que a l'apartat anterior s'han trobat tres vectors independents de valor propi $a-b$, si $a+3b \neq a-b$ la matriu segur que diagonalitza. Per completar una base de vectors propis se n'ha de trobar un de valor propi $a+3b$. Per a això cal resoldre el sistema d'equacions

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3b & b & b & b \\ b & -3b & b & b \\ b & b & -3b & b \\ b & b & b & -3b \end{pmatrix},$$

   que (si $b \neq 0$) té com a solució el subespai 1-dimensional generat pel vector $(1,1,1,1)$. En aquest cas una base de vectors propis s'obté afegint aquest vector als tres que són base del subespai W.

   En cas que es tingui la igualtat $a+3b = a-b \Leftrightarrow 3b = -b \Leftrightarrow b = 0$ la matriu té el valor propi a amb multiplicitat 4 i ja és diagonal. Qualsevol base de $\mathbb{R}^4$ és una base de vectors propis.

   En resum, la matriu diagonalitza sempre i es pot agafar com a base de vectors propis la base formada pels vectors

$$(1,1,1,1), \quad (1,1,-1,-1), \quad (1,-1,1,-1), \quad (1,-1,-1,1).$$

5. Com que la matriu diagonalitza es pot calcular la seva potència n-èsima com

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} a+3b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

on $\boldsymbol{P}$ és la matriu que té per columnes la base de vectors propis anterior. Dóna

$$\boldsymbol{A}^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n \\ 1-(a-b)^n & 1+3(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n \\ 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1+3(a-b)^n & 1-(a-b)^n \\ 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1-(a-b)^n & 1+3(a-b)^n \end{pmatrix}.$$

Problema 5 (2 punts). Calculeu una base de Jordan i la forma de Jordan d'una matriu donada com un producte de dos blocs de Jordan de mida 3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Solució: Es calcula $\boldsymbol{A}$ multiplicant i queda:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} ab & a+b & 1 \\ 0 & ab & a+b \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}.$$

Com que és triangular superior el seu polinomi característic es calcula immediatament. És $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-ab)^3$: té el valor propi ab de multiplicitat 3. Per calcular $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3)$ s'ha de resoldre el sistema homogeni de matriu

$$\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & a+b & 1 \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 1 si $a+b=0$ i té rang 2 si $a+b \neq 0$. Per tant, es tenen dues possibilitats:

- Si $a+b \neq 0$ aleshores $\dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3) = 1$ i necessàriament ha de ser $\dim \mathrm{Ker}((\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3)^2) = 2$ i $\dim \mathrm{Ker}((\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3)^3) = 3$. Els subespais corresponents són $\langle (1,0,0) \rangle$, $\langle (1,0,0), (1,1,0) \rangle$ i $\mathbb{R}^3$. Una base de Jordan està formada per un únic cicle de Jordan, de longitud 3, i s'obté agafant un vector qualsevol de $\mathbb{R}^3 \setminus \langle (1,0,0), (1,1,0) \rangle$ i les seves imatges en multiplicar per $\boldsymbol{A} - ab\boldsymbol{I}_3$. Per exemple, el cicle

$$(0,0,1), \quad (1, a+b, 0), \quad ((a+b)^2, 0, 0).$$

  La forma de Jordan té un únic bloc:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} ab & 1 & 0 \\ 0 & ab & 1 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 1 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si $a+b=0$ aleshores $\dim \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-ab\boldsymbol{I}_3)=2$ i necessàriament ha de ser $\dim \mathrm{Ker}((\boldsymbol{A}-ab\boldsymbol{I}_3)^2)=3$. Els subespais corresponents són $\langle (1,0,0),(1,1,0)\rangle$ i $\mathbb{R}^3$. Una base de Jordan està formada per dos cicles de Jordan, de longituds 2 i 1. El primer s'obté agafant un vector qualsevol de $\mathbb{R}^3 \setminus \langle (1,0,0),(1,1,0)\rangle$ i la seva imatges en multiplicar per $\boldsymbol{A}-ab\boldsymbol{I}_3$. Per exemple, el cicle $(0,0,1),(1,0,0)$, i l'altre està format per un vector propi independent de $(1,0,0)$, per exemple el vector $(0,1,0)$. La forma de Jordan té dos blocs de mides 2 i 1:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} ab & 1 & 0 \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$