0.1/2

Full 2 de

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Algebra lineal

Estudiant/a:

Data:

Problema 2

0.1 $W \subset V$ tq $\{v_1, \dots, v_k\}$ és una base de W
i $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una ampliació a la base de V

$U_i \subseteq End(V)$

$U_1 = \{ f \in End(V) : \ker f \subseteq W \subseteq Im f \}$

$U_2 = \{ f \in End(V) : Im f \subseteq W \subseteq \ker f$

per les propietats dels endomorfismes, sabem que
$Dim(Im(f)) + Dim(Ker(f)) = Dim(V)$
per la definició de subconjunt sabem que
$W \subset V \Rightarrow Dim(W) < Dim(V)$

En U_1 tenim $D(\ker f) \leq k \leq D(Im f)$

i sabem que $Ker(f)$ amb $f \in End(V) = \{0\}$?

per tant tenim $0 \leq k \leq n$ i compleix la hipotesi

En U_2 tenim $D(Im f) \leq k \leq D(Ker f)$
amb f $n \leq k \leq$ $\Rightarrow$ només és cert si
$n = k =$ que contradiu l'enunciat

?

No!

Fabricat Ecològicament

$U_1 = \{ f \in End(V) \mid \ker f \subseteq W \subseteq Im f \}$

$M\{f, B_W'\}$ amb $f \in U$

base de W ampliada

$$M\{f, B_W'\} = \begin{pmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_n(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(v_k) & \cdots & f_n(v_k) \\ f_1(v_{k+1}) & \cdots & f_n(v_{k+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(v_n) & \cdots & f_n(v_n) \end{pmatrix}$$

$M\{f, B_W'\}$ és una matriu quadrada, i sabem que tots els $f_{1 \dots k}(v_i)$ són linealment independents ($Im f \geq k$)

per tant, $Dim(U) \geq k$

?

No calcules la dim. ni veus com són les matrius.

0.1/2

Full 3 de

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant/a:

Data:

Problema 3

$f \in End(\mathbb{K}^n)$ f no te subespais invariants diferents de $\{0\}$ i $\mathbb{K}$

$$\Rightarrow \exists B \text{ tq } M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1\ v_n \end{pmatrix}$$

$A = \{v_1, \dots, v_n\}$ ← què és ?

$$f(A) \subsetneq A \Rightarrow f(v_1)_B + f(v_2)_B + \cdots + f(v_n)_B \neq \lambda v_1, \dots, v_n$$

?

$$\begin{pmatrix} f(a_{11}) & f(a_{12}) & \cdots & f(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ f(a_{n1}) & \cdots & & f(nn) \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$f(v) = \lambda v \Rightarrow$ v són els v s de A

λ són els VAPs de A

?

aquesta desigualtat es complex excepte quan

V_i base del ~~...~~ espai vectorial $\mathbb{K} \Rightarrow V_i$ ind. $\Rightarrow f$ te n VAPs diferents

V_i base del espai trivial $\Rightarrow f$ te un VAP que és 0

$\Rightarrow$ La base B és una base que diagonalitza la matriu del endomorfisme

$$\text{on } D = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix} \text{ tq } A = BDB^{-1}$$

El recíproc és fals

Pot existir una matriu B que diagonalitza una matriu del endomorfisme amb un VAP = 0 però algún $v_i = x_j \Rightarrow$ això implica que pot existir un subespai invariant que sigui una partició de $\mathbb{K}^n$?

$\forall\, v_{i \to j} \in A$ tq $f(A) \subseteq A$

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant/a:

Data:

Problema 4 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El primer pas per Trobar la forma de Jordan de A és conèixer els seus valors propis, ho farem amb el polinomi característic $Char(A\,x) = \begin{vmatrix} 1-x & a & b & c \\ 0 & 1-x & a & b \\ 0 & 0 & 1-x & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$

A triangular
Det A = Tr A
$Det\ A = (1-x)^4$

Els valors propis d'A són les arrels de $Char(A,x)$ λ VAP de A
$\underline{\lambda = 1}$

El segon pas es comprovar si A diagonalitza, és a dir si $mg(\lambda) = ma(\lambda_i)\ \forall \lambda_i$ $mg(1) = Ker(A - 1\,Id)$
$ma(1) = 4$

$A - 1\,Id = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $dim\,Ker(A - Id) = \begin{cases} 1 & si\ a \neq 0 \\ 2 & si\ a=0\ b\neq 0 \\ 3 & si\ a=b=0 \\ & c \neq 0 \end{cases}$

* Veiem que el cas $a=b=c=0$ dóna $A = Id_4$, que és una matriu diagonal, per tant no és posible expressar A en forma de Jordan

Fabricat Ecològicament

Cas 1 $a \neq 0$ $A - Id$ $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El nucli de $A - Id$ te dim 1, un vector $v_1 \in Ker(A - Id)$ és per exemple $(1,0,0,0)$

El següent pas es completar una base de Jordan, ho fem a partir de vectors del $Ker(A^2 - Id)$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2+2b & 2c+2ab \\ 0 & 1 & 2a & a^2+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 - Id = \begin{pmatrix} 0 & 2a & a^2+2b & 2c+2ab \\ 0 & 0 & 2a & a^2+2b \\ 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Com $a \neq 0$ $Ker(A^2 - Id)$ té dimensió 1, ampliem la base de Jordan amb $v_2 \in Ker(A^3 - Id)$

per $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3(a^2+b) & a^3+3(c+2ab) \\ 0 & 1 & 3a & 3(a^2+b) \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El nucli de $A^3 - Id$ és $=1$ per tant ampliem la base de Jordan amb $v_3 \in Ker(A^3 - Id)$

Per A^4

Al construir la matriu de Jordan sabem que la mg(1) en $Ker(A^4 - Id)$ és 4 per tant, podem expressar J com 1 blocs de Jordan

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ base? et lis als

Problema 4

Cas 2 $a=0$ $b\neq 0$ $A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Dim(Ker(A-Id)) = 2$

$v_1, v_2 \in Ker(A-Id) = (1,0,0,0), (0,1,0,0)$

Ampliem la base de Jordan

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2b & 2c \\ 0 & 1 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? $A^2 - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Dim(Ker(A^2-Id)) = 2$ per tant, tenim que $Dim(Ker(A-Id)) + Dim(Ker(A^2-Id)) = Dim(A)$

podem assegurar que la forma de Jordan quan $b\neq 0$, $a=0$

és $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ Dos blocs de Jordan

Fabricat Ecològicament

Cas 3

$a = b = 0$
$c \neq 0$

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Dim(Ker(A - Id)) = 3$$

$v_1, v_2, v_3 \in Ker(A - Id)$
$(1,0,0,0)\ (0,1,0,0)\ (0,0,1,0)$

Ampliem la base de Jordan

$$A^2 - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Dim(Ker(A^2 - Id))$$

En el cas $a = b = 0$, $c \neq 0$ tenim la forma de Jordan amb dos blocs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0

alguna bunteria + no saps calcular la base de Jordan

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full 1 de

QUALIFICACIÓ 2

Assignatura: Algebra lineal

Estudiant/a:

Data: 30 juny 2015

Problema 1

$f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida com $f(x,y,z) = (x+y-2z, -2x-y+4z, -3x-y+6z)$

$W_1, W_2 \in \mathbb{R}^3$ $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-3z=0\} = \langle (1,-1,0), (0,3,1) \rangle$

$W_2 = \langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle = \{(x,y,z) \mid x-z=0\}$

$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-3z = x-z = 0\} = \langle (1,2,1) \rangle$

$x+y-3z=0 \Rightarrow y=2x$
$x-z=0 \Rightarrow x=z$

Doneu equacions de

$f(W_1) = \{ f(1,-1,0) = f(0,3,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -y-2z = x+y+3z = 0\}$

$f(W_2) = \{ f(0,1,0) = f(1,0,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z = -x+2y+3z = 0\}$

$f(W_1 \cap W_2) = \{ f(1,2,1) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+2z = 0\}$

$f(W_1) \cap f(W_2) = \{-y-2z = x+y+3z = x-y-z = -x+2y+3z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+3z = y+2z = 0\}$

2

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Doneu bases de

$f^{-1}(W_1) = \{(x,y,z) \in A \mid f(x,y,z) = W\} = \langle \frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3} \rangle$

1

$$\left.\begin{aligned} x+y-3z &= x \\ -2x-y+4z &= y \\ -3x-y+6z &= z-3z \end{aligned}\right\}$$

$f^{-1}(W_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = x-z\} = \langle(\frac{-3}{10}, 1, \frac{1}{2})\rangle$

$x+y-2z = x \quad y = 2z$

$-2x-y+4z = 0$

$3x-y+6z = -z \quad 5x+2z = -z$

$x = \frac{-3z}{5} \quad -3$

$f^{-1}(W_1 \cap W_2) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = x+y-3z,\ f(x,y,z) = x-z\} =$

$x+y-2z = 0$

$-2x-y+4z = y$

$-2x-y+4z = 0$

$3x-y+6z = 3z$

$3x-y+6z = -z$

Sigui $f: U \to V$ una aplicació qualsevol i $W_1, W_2 \subseteq U$, $W_1', W_2' \subseteq V$

3) $f^{-1}(W_1' \cap W_2') = f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2')$

4) $f(W_1 \cap W_2) \subseteq f(W_1) \cap f(W_2)$

$= \{(x,y,z) \in W_1 \text{ i } \in W_2\} \subseteq \{(x,y,z) \in W_1\} \cap \{x,y,z \in W_2\}$

$\| \quad \{(x,y,z) \in W_1 \text{ i } W_2\} \cup \{(x,y,z) \in W_1,\ (x',y',z') \in W_2 \text{ amb } x \neq x' \mid f(x,y,z) = f(x',y',z')\}$

Els element no comuns entre W_1, W_2 que tenen la mateixa imatge pertanyen a $f(W_1 \cap W_2)$ però no a $f(W_1) \cap f(W_2)$

5) f injectiva $\Rightarrow f(x,y,z) = f(x',y',z') \Rightarrow x,y,z = x',y',z'$

per tant $\{(x,y,z) \in W_1,\ (x',y',z') \in W_2 \mid x \neq x' \ f(x,y,z) = f(x',y',z')\} = \emptyset \quad f(W_1 \cap W_2) = f(W_1) \cap f(W_2)$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

0.1/2

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant/a:

Data: 30-6-15

Problema 3

① Suposem la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ segons la matriu tenim
$f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, ..., $f(v_{n-1}) = v_n$, $f(v_n) = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n$

Com resulta la base?

Com que f no té subespais invariants tenim que $f(W) \neq W$ $\forall W$, on W és un subespai.

$0 \neq \mathbb{K}^n$

Si f tingués subespais invariants, aleshores:

$$f(v_i) = x f(v_i) + y f(v_{i+1}) + \dots + t f(v_k)$$
$$f(v_{i+1}) = m f(v_i) + n f(v_{i+2}) + \dots + s \cdot f(v_k)$$
$$\vdots$$
$$f(v_k) = \lambda \cdot f(v_i) + \mu f(v_{i+1}) + \dots + \theta f(v_{k-1})$$

?

2) ?

1/2

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant/a:

Data: 30-6-15

Problema 2

0.7 1. Volem veure que U_1 o U_2 són subespais, és a dir, que contenen el 0, que la seva suma "cau" dins ells i que la seva multiplicació per escalar també.

· Veiem si U_2 és subespai:

Hem de veure primer que, si $f, g \in U_2$, aleshores $f+g \in U_2$, és a dir, que $f+g$ és un endomorfisme tal que:

$$Im(f+g) \subseteq W \subseteq ker(f+g)$$

Aquí podem utilitzar que $Im(f+g) \subseteq Im f + Im g$. Ho demostrem:

$v \in Im(f+g) \Rightarrow \exists u \in f+g$ tal que $(f+g)(u) = v \Rightarrow$
$\Rightarrow$ per linealitat $f(u) + g(u) = v \Rightarrow$
$\Rightarrow v \in Im f + Im g$.

Aleshores, com que $f \in U_2$ i $g \in U_2$, $Im f \subseteq W$ i $Im g \subseteq W \Rightarrow Im f + Im g \subseteq W$.

Però per la proposició anterior: $Im(f+g) \subseteq Im f + Im g$.
Per tant:
$$Im(f+g) \subseteq Im f + Im g \subseteq W.$$

Per altra banda, per ser la dimensió del ker "oposada" a la de la Imatge, tenim que $ker f + ker g \subseteq ker(f+g)$.

Per tant $\left.\begin{array}{l} W \subset ker f \\ W \subset ker g \end{array}\right\} \Rightarrow W \subseteq ker f + ker g \subseteq ker(f+g)$.

Ho comprovem pel producte:
Volem veure si es compleix que:
$Im f \subseteq W \subseteq ker f \Rightarrow Im(\lambda f) \subseteq W \subseteq ker f$

$x \in Im(\lambda f) \Rightarrow f(\lambda u) = x \Rightarrow \lambda f(u) = x$.
Per ser W un subespai, si $f(u) \in W \Rightarrow \lambda f(u) \in W$

És anàleg pel ker.

Per tant, U_2 és subespai.

Has de veure també que U_1 no ho és

Fabricat Ecològicament

0.3

2. Suposem que el subespai és U_2, aleshores:

Tenim per base $\{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{W}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Com que, en U_2, $\mathrm{Im} f \subseteq W \subseteq \ker f$, vol dir que alguns dels v_i, $i = k+1, \dots, n$ seran base del $\ker f$ - a no ser que $W = \ker f$.

Com que $W \subseteq \ker f \Rightarrow f(W) = 0 \quad \forall v \in W$.

Per tant:

$$\left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{f(W)} \quad \underbrace{f(v_{k+1}) \dots f(v_n)}_{=?} \end{array}\right)$$

on, si $W \subsetneq \ker$, $f(v_i) = 0$, per algun $i = k+1 \div n$.

dim ?

Si el subespai és U_1 la matriu serà:

?

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \underset{i \leq k}{f(v_i)} & f(v_{k+1}) \dots f(v_n) \\ 0 & & 0 & & \end{pmatrix}$$

on $f(v_i) \in \mathrm{Im} f$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ: 10

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a:

Data: 30-6-2015

Problema 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu l'haurem de dividir en casos, segons si a, b, c són 0.

Calculem el polinomi característic:

$$\mathrm{Char}(A;x) = \begin{vmatrix} 1-x & a & b & c \\ 0 & 1-x & a & b \\ 0 & 0 & 1-x & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Per ser A una matriu triangular superior: $\mathrm{Char}(A;x) = (1-x)^4$

Per tant, tenim un únic vap, que és 1, de multiplicitat 4.
Calculem $\ker(f - Id)$:

$$\ker(f-Id) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

• Suposem $a=b=c \neq 0$

Per tant, $\dim \ker(f-Id) = 1$, i per tant ja podem saber com serà la matriu:

$\ker(f-Id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem la base en la que la matriu adopta aquesta forma:

$$\ker(f-Id) = \langle (1,0,0,0) \rangle$$

Calculem $\ker(f-Id)^2$:

$$(A-Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores $\ker(f-Id)^2 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

Calculem ker $(f-Id)^3$:

$$(A-Id)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Per tant, ker $(f-Id)^3 =$ $= \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$

En conseqüència, ker $(f-Id)^4 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Agafem $v \in \ker(f-Id)^4 \setminus \ker(f-Id)^3 \Rightarrow v = (0,0,0,1)$

Calculem $(A-Id)(v) = (c,b,a,0) = u \in \ker(f-Id)^3$

Calculem $(A-Id)(u) = (2ab, a^2, 0, 0) = w \in \ker(f-Id)^2$.

Calculem $(A-Id)(w) = (a^3, 0,0,0) = z \in \ker(f-Id)$.

Per tant tenim una base de vectors propis (quan $a = b = c \neq 0$):

$\langle (a^3,0,0,0), (2ab, a^2, 0, 0), (c,b,a,0), (0,0,0,1) \rangle$

En aquesta base la matriu té forma:

OK

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $a = b = c = 0$ la matriu A ja està diagonalitzada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $a = 0$, $b, c \neq 0$

la matriu A serà: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ker $(f-Id) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

ker $(f-Id)^2 = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a: [redacted]

Data: 30-6-15

La matriu serà de la forma: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La base serà:

$v=(0,0,1,0)$ $(A-Id)(v)=(b,0,0,0)$

$w=(0,0,0,1)$ $(A-Id)(w)=(c,b,0,0)$

Per tant, tindrem la base: $<(b,0,0,0),(0,0,1,0),(c,b,0,0),$
$(0,0,0,1)>$

on la matriu és la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $b=0$, $a,c\neq 0$ aquest no calia

la matriu A serà: $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En aquest cas, $\ker(f-Id)=<(1,0,0,0)>$, $\ker(f-Id)^2=<(1,0,0,0),$
$(0,1,0,0)>$, $\ker(f-Id)^3=<(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)>$
i $\ker(f-Id)^4=<(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)>$

De forma anàloga als casos anteriors la matriu serà:

$v=(0,0,0,1)$, $(A-Id)(v)=(c\ 0\ a\ 0)=w$

$(A-Id)(w)=(0\ a^2\ 0\ 0)=z$

$(A-Id)(z)=(a^3\ 0\ 0\ 0)$

Per tant la base serà: $<(a^3,0,0,0),(0,a^2,0,0),(c,0,a,0),$
$(0,0,0,1)>$, i la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Si $c=0$, $a, b \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas $\dim(\ker f - Id) = 2$.

Per tant, $\ker(f - Id) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$ i

$\ker(f - Id)^2 = \langle \underbrace{(0,0,1,0)}_{u}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{v} \rangle$

$(A - Id)(u) = (b, a, 1, 0)$

$(A - Id)(v) = (0, b, a, 1)$

Per tant, la base serà: $\langle (b,a,1,0), (0,0,1,0), (0,b,a,1), (0,0,0,1) \rangle$ i la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $a = b = 0$, $c \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas la matriu diagonalitza perquè $\dim(\ker f - Id) = 4$

Per tant la matriu serà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si $a = c = 0$, $b \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com en el cas anterior la matriu diagonalitza perquè $\dim(\ker f - Id) = 4$.

La matriu tornarà a ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

· Si $b = c = 0,\ a \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas:
dim ker $(f - Id) = 2$

$\ker(f - Id) = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

$\ker(f - Id)^2 = \langle \underbrace{(0,0,1,0)}_{u}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{v}, (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$

La base de Jordan serà:

$(A - Id)(u) = (0, a, 0, 0)$
$(A - Id)(v) = (0, 0, a, 0)$

$\langle (0,a,0,0), (0,0,1,0), (0,0,a,0), (0,0,0,1) \rangle$

i la matriu:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ok

fer coses que no calia.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ 8

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a:

Data: 30-6-2015

Problema 1

(1) Passem W_1 a generadors: $W_1 = \langle (3,0,1), (-1,1,0) \rangle$
Aleshores:
$$f(W_1) = \langle f(3,0,1), f(-1,1,0) \rangle = \langle (1,-2,-3), (0,1,2) \rangle$$

Passem $f(W_1)$ a equacions:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -2 & 1 & y \\ -3 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -2y+z \\ -3 & 2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+2y-z \\ 1 & 0 & -2y+z \\ -3 & 2 & z \end{array}\right)$$

Per tant, l'equació de $f(W_1)$ serà: $x+2y-z=0$. És només una equació perquè estem a $\mathbb{R}^3$ i tenim 2 generadors.

Fem el mateix amb $f(W_2)$:

$$f(W_2) = \langle f(0,1,0), f(1,0,1) \rangle = \langle (1,-1,-1), (-1,2,3) \rangle$$

Passem $f(W_2)$ a equacions:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ -1 & 2 & y \\ -1 & 3 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x+y \\ -1 & 2 & y \\ 1 & -3 & -z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x+y \\ 0 & -1 & y-z \\ 1 & -3 & -z \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+2y-z \\ 0 & -1 & y-z \\ 1 & -3 & -z \end{array}\right)$$

Per tant, l'equació de $f(W_2)$ serà: $x+2y-z=0$ ✓

Fem el mateix amb $f(W_1 \cap W_2)$:
Calculem: $W_1 \cap W_2$:
La intersecció la calculem per equacions:
$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 3z\}$ i $W_2 = \langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle =$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0\}$

La intersecció serà:
$$\begin{cases} x+y = 3z \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \langle (1,2,1) \rangle$$

Les equacions seran (en aquest cas 2 perquè estem a $\mathbb{R}^3$ amb un sol generador):
$$f(W_1 \cap W_2) = \langle (1,0,1) \rangle = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$$

2 ✓

Fabricat Ecològicament

Per calcular $f(W_1) \cap f(W_2)$:

Sabem que: $f(W_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$ i que $f(W_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$.

Per tant, $f(W_1) \cap f(W_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$

(2) Volem saber $f^{-1}(W_1)$, i sabem que $W_1 = \langle (3,0,1), (-1,1,0) \rangle$

Aleshores hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ -2x-y+4z=0 \\ -3x-y+6z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2z=-1 \\ -2x-y+4z=1 \\ -3x-y+6z=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \overbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)}_{M}}^{MA} \Rightarrow \text{és un sistema incompatible, perquè rang } M \neq \text{rang } MA$$

Per tant, W_1 no pertany a la imatge de f

Calculem $f^{-1}(W_2)$. Anàlogament al cas anterior volem:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ -2x-y+4z=1 \\ -3x-y+6z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x-y+4z=0 \\ -3x-y+6z=1 \end{cases}$$

També és un sistema incompatible i per tant $W_2 \notin \text{Im} f$

Calculem $f^{-1}(W_1 \cap W_2)$: Hem de trobar (x,y,z) tal que

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x-y+4z=2 \\ -3x-y+6z=1 \end{cases}$$

Tornem a estar en el mateix cas, perquè la matriu M és la mateixa que en els dos casos anteriors, rang $M = 2$. Aleshores només tindríem solució si rang $MA = 2$, i en aquest cas rang $MA = 3$.

Per tant, $W_1 \cap W_2 \notin \text{Im} f$

Per últim tenim $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$. Hem vist que $W_1 \notin \text{Im} f$ i $W_2 \notin \text{Im} f$, per tant tampoc té sentit parlar de $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$

Assignatura: Àlgebra lineal

Estudiant/a:

Data: 30-6-15

(3) • $f^{-1}(W_1' \cap W_2') = f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2')$

Per veure la igualtat hem de veure cada inclusió:

$\subseteq$] $v \in f^{-1}(W_1' \cap W_2') \Rightarrow \exists u \in W_1' \cap W_2'$ tal que $f(v) = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists u \in W_1' \text{ tal que } f(v) = u \Rightarrow v \in f^{-1}(W_1') \\ \exists u \in W_2' \text{ tal que } f(v) = u \Rightarrow v \in f^{-1}(W_2') \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2')$

$\supseteq$] $v \in f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2') \Rightarrow \begin{array}{l} v \in f^{-1}(W_1') \\ v \in f^{-1}(W_2') \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists u \in W_1' \text{ tal que } f(v) = u \\ \exists u \in W_2' \text{ tal que } f(v) = u \end{array} \Rightarrow \exists u \in W_1' \cap W_2'$ tal que $f(v) = u \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in f^{-1}(W_1' \cap W_2')$

2

(4) • $f(W_1 \cap W_2) \subseteq f(W_1) \cap f(W_2)$

$v \in f(W_1 \cap W_2) \Rightarrow \exists u \in W_1 \cap W_2$ tal que $f(u) = v \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \exists u \in W_1 \text{ tal que } f(u) = v \\ \exists u \in W_2 \text{ tal que } f(u) = v \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v \in f(W_1) \\ v \in f(W_2) \end{array} \Rightarrow v \in f(W_1) \cap f(W_2)$

2

(5) • Si f és injectiva aleshores $f(W_1 \cap W_2) = f(W_1) \cap f(W_2)$

En l'apartat anterior hem demostrat una de les inclusions, ara hem de demostrar l'altre:

$\supseteq$] $v \in f(W_1) \cap f(W_2) \Rightarrow \begin{array}{l} \exists u \in W_1 \text{ tal que } f(u) = v \\ \exists u' \in W_2 \text{ tal que } f(u') = v \end{array}$

Sabem per tant que $f(u) = f(u')$, i per ser f injectiva aleshores, $u = u'$.

Per tant $\exists u \in W_1 \cap W_2$ tal que $f(u) = v \Rightarrow v \in f(W_1 \cap W_2)$

2

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

6↓

Assignatura: Àlgebra Lineal.

Estudiant/a:

Data: 30 juny 2015

(1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) = (x+y-2z, -2x-y+4z, -3x-y+6z)$

$$M_{f_e} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 3z\} = \langle (1,-1,0), (0,3,1) \rangle$

$W_2 = \langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

1) Equacions de $f(W_1)$, $f(W_2)$, $f(W_1 \cap W_2)$ i $f(W_1) \cap f(W_2)$.

$f(W_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (3 \ 2 \ -6)$$

Per calcular $f(W_1)$ fem la imatge dels dos vectors que generen el subespai W_1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-9 \ -4 \ 18) \Rightarrow f(W_1) = \langle (3,2,-6), (-9,-4,18) \rangle$$

$\Rightarrow f(W_1) = \langle (3,2,-6), (-9,-4,18) \rangle$

Fem el mateix amb els vectors que generen W_2:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= (-2 \ -1 \ 4) \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-2 \ 0 \ -4) \end{aligned}\right\} f(W_2) = \langle (-2,-1,4), (-2,0,-4) \rangle$$

Per calcular $f(W_1) \cap f(W_2)$, només caldrà calcular la intersecció de les imatges dels dos subespais.

Per facilitar-nos la feina però, primer passarem $f(W_1)$ i $f(W_2)$ a equacions.

$\Rightarrow f(W_1) = \langle (3,2,-6), (-9,-4,18) \rangle$ Passant-ho a equacions:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -9 & x \\ 2 & -4 & y \\ -6 & 18 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -9 & x \\ 2 & -4 & y \\ 0 & 0 & 2x+z \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{f(W_1) = 2x+z}$$

$\Rightarrow f(W_2) = \langle (-2,-1,4), (-2,0,-4) \rangle$. Passant-ho a equacions:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x \\ -1 & 0 & y \\ 4 & -4 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x \\ -1 & 0 & y \\ 8 & 0 & z-2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z-2x+8y \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{f(W_2) = -2x+8y+z}$$

Ara per calcular $f(W_1) \cap f(W_2)$ només cal calcular la solució del sistema d'equacions generat per $f(W_1)$ i $f(W_2)$ i passar-lo a equació.

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} 2x+z=0 \\ -2x+8y+z=0 \end{array}\right\} = f(W_1) \cap f(W_2)}$$

1

Per calcular $f(W_1 \cap W_2)$, primer calculem $W_1 \cap W_2$

Tenim que W_1 i fàcilment podem veure que W_2

$\hookrightarrow \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z=0\}$ $\qquad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z=0\}$

i $W_1 \cap W_2$: $\left.\begin{array}{r} x+y-3z=0 \\ x \quad -z=0 \end{array}\right\}$ $x=z$, $2x=y$, que correspon al vector $(1,2,1)$

Calculem:

$$f(W_1 \cap W_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-6 \;\; -2 \;\; 12)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} -6 & x \\ -2 & y \\ 12 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} -6 & x \\ 0 & y-\frac{1}{3}x \\ 0 & 2x+z \end{array}\right) \qquad \boxed{f(W_1 \cap W_2) = \left\{\begin{array}{l} -x+3y=0 \\ 2x+z=0 \end{array}\right.}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a:

Data: 30 juny 2015

2) Donem bases de $f^{-1}(W_1)$, $f^{-1}(W_2)$, $f^{-1}(W_1 \cap W_2)$ i $f^{-1}(W_1) \cap f^{-1}(W_2)$.

Recordem que sigui W un sub-e.v i f una aplicació $f: U \to W$,

$f^{-1}(W) = \{u \in U : f(u) = w, w \in W\}$.

Fabricat Ecològicament

$f: U \to V$ aplicació lineal entre $\mathbb{K}$-e.v. $W_1, W_2 \subseteq U$ i $W_1', W_2' \subseteq V$ subespais.

3) $f^{-1}(W_1' \cap W_2') = f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2')$.

$f^{-1}(W_1' \cap W_2') = \{u \in U : f(u) \in W_1' \text{ i } f(u) \in W_2'\}$.

$f^{-1}(W_1') = \{u \in U : f(u) \in W_1'\}$
$f^{-1}(W_2') = \{u \in U : f(u) \in W_2'\}$. $\Rightarrow f^{-1}(W_1') \cap f^{-1}(W_2') = \{u \in U : f(u) \in W_1'$ i $f(u) \in W_2'\} = f^{-1}(W_1' \cap W_2')$.

4) $f(W_1 \cap W_2) \subseteq f(W_1) \cap f(W_2)$

$f(W_1 \cap W_2) = \{v \in V : f(u) = v \text{ on } u \in W_1 \text{ i } u \in W_2\}$

$f(W_1) = \{v \in V : f(u) = v \text{ on } u \in W_1\}$

$f(W_2) = \{v \in V : f(u) = v \text{ on } u \in W_2\}$

Sigui $w \in f(W_1 \cap W_2)$

$\Rightarrow f(u) = w$, on $u \in W_1$ i $u \in W_2 \Rightarrow w \in f(W_1)$, ja que $u \in W_1$.
$w \in f(W_2)$, ja que $u \in W_2$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow w \in f(W_1) \cap f(W_2)$.

2

5) Si f és injectiva $\Rightarrow f(W_1 \cap W_2) = f(W_1) \cap f(W_2)$.

f injectiva $\Rightarrow \forall u_1, u_2 \in U,\ f(u_1) = f(u_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$v_1 \in f(W_1) = \{v_1 = f(u_1),\ u_1 \in W_1\}$
$v_2 \in f(W_2) = \{v_2 = f(u_2),\ u_2 \in W_2\}$ $\quad f(W_1) \cap f(W_2) = W$?

$v \in W \Rightarrow v \in f(W_1)$ i $v \in f(W_2) \Rightarrow$ però com que f injectiva, $\exists!$ $u \in W$ tq $f(u) = v \Rightarrow u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow f(W_1 \cap W_2) = W$.
$\forall u \in U$

$\sim$

1

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ 9,5

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a:

Data: 30 juny 2015

(4) $a, b, c \in \mathbb{K}$. Calculeu la forma de Jordan i una base de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K})$$

Primer de tot, haurem de buscar el polinomi característic de la matriu A:

$$\text{Char } A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b & c \\ 0 & 1-\lambda & a & b \\ 0 & 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4$$

Per ser 0 tots els elements de la matriu que estan per sota de la diagonal.

Per tant, l'únic VAP de A és $\lambda = 1$, que té multiplicitat 4.

Calculem ara, els possibles VEPs de A i mirem la dimensió de $\ker(A-\lambda Id)$

$\Rightarrow \ker(A-\lambda Id) = \ker(A - Id)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} ay + bz + ct &= 0 \\ az + bt &= 0 \\ at &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(Obviem el cas $a = b = c = 0$, en el qual la matriu A és la identitat, que ja és diagonal).

Si tenim $\boxed{a=b=0 \;\; i \;\; c\neq 0}$ el nostre sistema es reduiria a l'equació $ct=0$, per tant $\ker(A-Id) = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$ amb $\dim \ker(A-Id)=3$.

Ara hauríem de calcular $\ker[(A-Id)^2]$:

$$(A-Id)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&c\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&c\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker[(A-Id)^2] = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$$

Agafem un vector que pertanyi a $\ker[(A-Id)^2]/\ker(A-Id)$ és a dir $u_4 = \langle(0,0,0,1)\rangle$. $(A-Id)(u_4) = (c\;0\;0\;0)$

Ja tenim que la matriu de Jordan de A quan $a=b=0$ i $c\neq 0$ serà

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

i la base de Jordan $= \langle(c,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$

Estudiem ara el cas $a=0$ i b i $c\neq 0$.

El sistema per trobar $\ker(A-Id)$ quedarà de la forma:

$$\left.\begin{aligned} bz+ct&=0\\ bt&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ker(A-Id) = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$$

$$\dim\ker(A-Id)=2$$

Calculem ara $\ker([A-Id]^2)$

$$(A-Id)^2 = \begin{pmatrix} 0&0&b&c\\ 0&0&0&b\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&b&c\\ 0&0&0&b\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ker[(A-Id)^2] = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$ i ja sabem com serà la forma de Jordan de la matriu A en el cas $a=0$ i b i $c\neq 0$.

$$J = \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a: _

Data: 30 juny 2015

(4 continuació)

Calculem ara però, la base de Jordan

Prenem $e_3, e_4 \in \operatorname{Ker}[(A-Id)^2] / \operatorname{Ker}(A-Id)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

i calculem $(A-Id)(e_3) = (b,0,0,0)$ i $(A-Id)(e_4) = (c,b,0,0)$

i tenim que la base de Jordan és $B = \langle (b,0,0,0), (0,0,1,0), (c,b,0,0), (0,0,0,1) \rangle$.

Ok

Fixem-nos en el cas en què a, b i c són tots tres diferents de zero. El sistema que correspon a $\operatorname{Ker}(A-Id)$ serà:

$$\left.\begin{array}{r} ay+bz+ct=0 \\ az+bt=0 \\ at=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \operatorname{Ker}(A-Id) = \langle (1,0,0,0) \rangle \\ \dim \operatorname{Ker}(A-Id) = 1. \end{array}$$

Calculem $\operatorname{Ker}[(A-Id)^2]$:

$$(A-Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}[(A-Id)^2] \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 z + 2ab\, t = 0 \\ a^2 t = 0 \end{array}\right\}$$

$\operatorname{Ker}[(A-Id)^2] = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}[(A-Id)^2] = 2$.

Calculem ara $\operatorname{Ker}[(A-Id)^3]$

$$(A-Id)^3 = (A-Id)^2 \cdot (A-Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'on treiem el sistema $a^3 t = 0$ i deduïm que $\ker[(A-Id)^3] =$
$\langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle \Rightarrow \dim \ker[(A-Id)^3] = 3$.

Calculem $\ker[(A-Id)^4]$:

$$(A-Id)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker[(A-Id)^4] = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

Ja sabem que la matriu de Jordan J serà de la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i per calcular la base de Jordan en aquest cas, haurem de prendre $e_4 \in \ker[(A-Id)^4] / \ker[(A-Id)^3]$

$$(A-Id)(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (c \ \ b \ \ a \ \ 0) = e_3$$

$$(A-Id)(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = (2ab \ \ a^2 \ \ 0 \ \ 0) = e_2$$

?

tot bé falta petsa acabar

0.6/2

Full ___ de ___

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Algebra Lineal

Estudiant/a:

Data: 30 juny 2015

(2) $W \subset V$ subespai de V amb $W \neq V$. ($\Rightarrow$ dim $W <$ dim V)

$e_1 \dots e_k$ és base de W.
$e_1 \dots e_k\, e_{k+1} \dots e_n$ és base de V. } Considerem $U_i \subseteq End(V)$:

$U_1 = \{ f \in End(V) : Ker\, f \subseteq W \subseteq Im\, f \}$

$U_2 = \{ f \in End(V) : Im\, f \subseteq W \subseteq Ker\, f \}$

0.6 1) Demostreu que dels dos conjunts un és subespai i l'altre no.

Per ser isomorfisme sabem que $f: V \rightarrow V$, i també tenim que dim Ker f + dim Im f = dim V.

NO

Aleshores, sigui m = dim Im f i k = dim W, per U_1 tenim que $n-m \leq k \leq n$, i per U_2, $m \leq k \leq n-m$ (no oblidem que els estudiarem per separat).

Per ser U_i subespais vectorials, han de complir que, $\forall \lambda \in K$, i $\forall f \in U_i$ $\lambda \cdot f \in U_i$ i també que $\forall f, g \in U_i$, $f+g \in U_i$

En U_1 veiem fàcilment que es compleix que $\lambda f \in End\, f$, per ser Ker f, W i Img subespais vectorials.

$\Rightarrow$ Si $f \in End(V)$: Ker $f \subseteq W \subseteq Im f$

$\Rightarrow \lambda f \in End(V)$: Ker $(\lambda f) \subseteq W \subseteq Im(\lambda f)$ ✓

Ara volem veure però, si tenim f i g tals que $f \in End(V)$: Ker $f \subseteq W \subseteq Im f$ i $g \in End(V)$: Ker $g \subseteq W \subseteq Im\, g$ $\Rightarrow (f+g) \in End(V)$: Ker $(f+g) \subseteq W \subseteq Im(f+g)$.

Ok ✓

Quan fem $(f+g)$, pot complir-se que $f+g$ s'anul·lin una a l'altra, i per tant $Im(f+g) = \{0\}$, de dimensió 0, la qual cosa implicaria que $W \not\subseteq Im(f+g) \Rightarrow U_1$ no és subespai vectorial.

En U_2 veiem que $\lambda f \in U_2$, així que la primera condició es compleix, pel mateix fet que hem vist en U_1, és a dir, per ser $\mathrm{Im} f$ i $\ker f$ i W subespais vectorials.

Anem a veure ara, si tenint $f \in \mathrm{End}(V): \mathrm{Im} f \subseteq W \subseteq \ker f$, i $g \in \mathrm{End}(V): \mathrm{Im}\, g \subseteq W \subseteq \ker g$ $\exists (f+g) \in \mathrm{End}(V): \mathrm{Im}(f+g) \subseteq W \subseteq \ker(f+g)$.

En aquest cas no hi ha problema si $f+g$ s'anul·len perquè en el cas que $f+g$ fos la matriu nul·la, la dimensió del subespai generat per $\ker(f+g) = \mathbb{K}^n$, per tant es mantindria la inclusió de subespais $\Rightarrow f+g \in U_2$

$\mathrm{Im}\, f+g \subseteq W \subseteq \ker f+g$

no ho demostra!

$\Rightarrow U_2$ és sub-espai vectorial.

2) Com és la matriu d'un element de U_i (U_i subespai) en la base $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ i calculeu $\dim U$.

$$M f_U = \left(\begin{array}{ccccc} & & ? & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) \dots & f(e_k) & f(e_{k+1}) & \dots f(e_n) \end{array} \right)$$

Imatge dels vectors de la base en columna

no ho has fet!

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

0.1/2

Full ____ de ____

QUALIFICACIÓ

Assignatura: Àlgebra Lineal

Estudiant/a

Data: 30 juny 2015

(3) $f \in End(\mathbb{K}^n)$

1) f no té subespais invariants diferents de $\{0\}$ i de $\mathbb{K}^n$, $\exists$ una base en la qual Mf és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}_n)$$

Recordem que sigui V un subespai, diem que V és invariant per un endomorfisme f si tenim que ~~$V = f(V)$~~. $f(V) \subseteq V$

Sigui B una base d'un subespai vectorial tenim que la matriu de f en aquella base és: ($B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$)

$$\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_{n-1}) & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x_n \end{pmatrix}$$

En el nostre cas en concret.

Com surt la base?

2) ?