Problema plantejat a la secció "Divertiments" d'El Full de Novembre 2013

Siguin x i y nombres racionals tals que $\tan(\pi x) = y$. Demostreu que $x = k/4$ per a algun enter k no congruent amb 2 (mod 4).

Resolució:

Com que x i y són nombres racionals, existeixen nombres enters p, q, r i s tals que:

$$\begin{cases} x = p/q,\ \ y = r/s,\ \ q > 0,\ \ s > 0, \\ \quad \operatorname{mcd}(p,q) = \operatorname{mcd}(r,s) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Llavors, tenint en compte (1), $\tan(\pi x) = y$ es pot reescriure així:

$$\tan\left(\pi \frac{p}{q}\right) = \frac{r}{s} \quad (2)$$

Fent servir (2), s'arriba al següent resultat:

$$\left(\frac{s+ir}{s-ir}\right)^q = \left(\frac{1+i(r/s)}{1-i(r/s)}\right)^q \overset{(2)}{=} \left(\frac{1+i\tan(\pi p/q)}{1-i\tan(\pi p/q)}\right)^q =$$

$$= \left(\frac{\cos(\pi p/q)+i\sin(\pi p/q)}{\cos(\pi p/q)-i\sin(\pi p/q)}\right)^q = \left(\frac{e^{i\left(\pi\frac{p}{q}\right)}}{e^{-i\left(\pi\frac{p}{q}\right)}}\right)^q = \left(e^{i\left(2\pi\frac{p}{q}\right)}\right)^q = e^{i(2\pi p)} = 1 \quad (3)$$

Ara, a partir de (3), es té:

$$(s+ir)^q \overset{(3)}{=} (s-ir)^q = \left((s+ir)-i2r\right)^q = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(s+ir)^{q-k}(-i2r)^k =$$

$$= \binom{q}{0}(s+ir)^q(-i2r)^0 + \sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s+ir)^{q-k}(-i2r)^k + \binom{q}{q}(s+ir)^0(-i2r)^q =$$

$$= (s+ir)^q + \sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s+ir)^{q-k}(-i2r)^k + (-i2r)^q \quad (4)$$

Per tant:

$$(-i2r)^q = -\sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s+ir)^{q-k}(-i2r)^k = -(s+ir)\sum_{k=1}^{q-1}\binom{q}{k}(s+ir)^{q-k-1}(-i2r)^k \quad (5)$$

És a dir:

$$(-i2r)^q = (s+ir)(a+ib),\ \ a,b \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Prenent mòduls elevats al quadrat en ambdós membres de (6), s'obté:

$$2^{2q} r^{2q} = \left(s^2+r^2\right)\left(a^2+b^2\right),\ \ a,b \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

Sigui m un nombre enter primer senar (per tant, $m \geq 3$) que divideixi a s^2+r^2 . Llavors:

$$m \mid s^2+r^2 \overset{(7)}{\Rightarrow} m \mid 2^{2q} r^{2q} \Rightarrow m \mid r \quad (8)$$

I també:

$$\left.\begin{array}{r} m \mid s^2+r^2 \\ (8) \Rightarrow m \mid r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid (s^2+r^2)-r^2 \Rightarrow m \mid s^2 \Rightarrow m \mid s \quad (9)$$

Com que (8) i (9) complint-se a la vegada contradiuen el fet establert en (1) que $\operatorname{mcd}(r,s)=1$, es dedueix que no hi pot haver cap nombre enter primer senar que divideixi a s^2+r^2 . En conseqüència:

$$s^2+r^2=2^c,\ c \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad (10)$$

A més, sigui $c \geq 2$ en (10). Llavors els nombres enters r i s han de ser tots dos parells. Com que complint-se això darrer s'entra en contradicció amb el fet establert en (1) que $\operatorname{mcd}(r,s)=1$, es dedueix que $c<2$ en (10). Per tant, només cal analitzar els següents casos:

► Cas $c=0$:

$$\begin{aligned} & s^2+r^2=2^0=1 \overset{s>0}{\Rightarrow} (r,s)=(0,1) \Rightarrow y=\frac{r}{s}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \tan(\pi x)=y=0 \Rightarrow \pi x=4n\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{4n}{4},\ n \in \mathbb{Z} \quad (11) \end{aligned}$$

► Cas $c=1$:

$$s^2+r^2=2^1=2 \overset{s>0}{\Rightarrow} \begin{cases} (r,s)=(1,1) \Rightarrow y=\frac{r}{s}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \\ \qquad \vee \\ (r,s)=(-1,1) \Rightarrow y=\frac{r}{s}=\frac{-1}{1}=-1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(\pi x)=y=1 \Rightarrow \pi x=(4n+1)\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{4n+1}{4},\ n \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \tan(\pi x)=y=-1 \Rightarrow \pi x=(4n+3)\frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{4n+3}{4},\ n \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

D'altra banda, es verifica:

$$\left.\begin{array}{r} (4n)-2=4n-2 \\ 4 \nmid 4n-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4n \not\equiv 2 \pmod 4 \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{r} (4n+1)-2=4n-1 \\ 4 \nmid 4n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4n+1 \not\equiv 2 \pmod 4 \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{r} (4n+3)-2=4n+1 \\ 4 \nmid 4n+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4n+3 \not\equiv 2 \pmod 4 \quad (16)$$

Així doncs, finalment:

$$\left.\begin{array}{r}(11)\\(12)\\(13)\\(14)\\(15)\\(16)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = k/4,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ k \not\equiv 2 \pmod 4}$$