Problema plantejat a la secció "Divertiments" d'El Full de Març 2014

Una piràmide recta és aquella en la qual es pot inscriure un cercle a la base i l'altura cau sobre el centre del cercle. Demostreu que l'àrea lateral d'una piràmide recta és mínima entre totes les piràmides que tenen la mateixa altura i la mateixa àrea i perímetre de la base.

Resolució:

Sigui h l'altura de la piràmide, siguin a_1, a_2, $\cdots$, a_n les longituds dels costats de la seva base (en conseqüència, $a_1+a_2+\cdots+a_n=P$, essent P el perímetre de la base) i siguin b_1, b_2, $\cdots$, b_n les distàncies perpendiculars des del peu de l'altura de la piràmide a cadascun dels costats de la seva base (per tant, $a_1b_1/2+a_2b_2/2+\cdots+a_nb_n/2=S$, essent S l'àrea de la base). Llavors, essent Σ l'àrea de la superfície lateral de la piràmide, Σ és calculable així:

$$\Sigma=\frac{1}{2}a_1\sqrt{b_1^2+h^2}+\frac{1}{2}a_2\sqrt{b_2^2+h^2}+\cdots+\frac{1}{2}a_n\sqrt{b_n^2+h^2} \quad (1)$$

Multiplicant ambdós membres de (1) per 2, queda el següent:

$$2\Sigma=\sqrt{\left(a_1b_1\right)^2+\left(a_1h\right)^2}+\sqrt{\left(a_2b_2\right)^2+\left(a_2h\right)^2}+\cdots+\sqrt{\left(a_nb_n\right)^2+\left(a_nh\right)^2} \quad (2)$$

Siguin α_1, α_2, $\cdots$, α_m; β_1, β_2, $\cdots$, β_m; $\overset{n)}{\cdots}$; ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_m n seqüències de m nombres reals no negatius i sigui p un nombre real major que 1. Llavors, la desigualtat de Minkowski estableix que:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{m}\beta_k^p\right)^{1/p}+\overset{n)}{\cdots}+\left(\sum_{k=1}^{m}\omega_k^p\right)^{1/p}\geq\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k+\beta_k+\overset{n)}{\cdots}+\omega_k\right)^p\right)^{1/p} \quad (3)$$

Per tal que la desigualtat (3) esdevingui una igualtat, cal que es verifiqui:

$$\alpha_1:\beta_1\overset{n)}{:\cdots:}\omega_1=\alpha_2:\beta_2\overset{n)}{:\cdots:}\omega_2=\cdots=\alpha_m:\beta_m\overset{n)}{:\cdots:}\omega_m \quad (4)$$

Prenent a_1b_1, a_1h; a_2b_2, a_2h; $\cdots$; a_nb_n, a_nh com a n seqüències de 2 nombres reals no negatius i 2 com a nombre real p major que 1, la desigualtat (3) permet establir una cota inferior de (2):

$$\begin{aligned}2\Sigma&=\sqrt{\left(a_1b_1\right)^2+\left(a_1h\right)^2}+\sqrt{\left(a_2b_2\right)^2+\left(a_2h\right)^2}+\cdots+\sqrt{\left(a_nb_n\right)^2+\left(a_nh\right)^2}\\&\geq\sqrt{\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2+\left(a_1h+a_2h+\cdots+a_nh\right)^2}\\&=\sqrt{\left(2S\right)^2+\left(hP\right)^2} \quad (5)\end{aligned}$$

Així doncs, Σ serà mínima en una piràmide d'altura h, perímetre de la base P i àrea de la base S quan el membre esquerre de la desigualtat (5) iguali al membre dret (cota inferior), és a dir, quan la desigualtat (5) esdevingui una igualtat. D'acord amb (4), cal que es verifiqui:

$$a_1b_1:a_2b_2:\cdots:a_nb_n=a_1h:a_2h:\cdots:a_nh \quad (6)$$

La qual cosa implica el que segueix:

$$(6) \Rightarrow \frac{a_1 b_1}{a_1 h} = \frac{a_2 b_2}{a_2 h} = \cdots = \frac{a_n b_n}{a_n h} \Rightarrow \frac{b_1}{h} = \frac{b_2}{h} = \cdots = \frac{b_n}{h} \Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

Per tant, Σ serà mínima en una piràmide d'altura h, perímetre de la base P i àrea de la base S quan es pugui inscriure un cercle de radi $r = b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ a la base de la piràmide, essent el peu de l'altura d'aquesta piràmide el centre del cercle. És a dir, quan la piràmide sigui una piràmide recta.