Resolució del problema de mes de Maig de 2014

Sigui $n \geq 3$ un enter. Demostreu que la suma de tots els enters de n dígits és igual a 49499…95500…0, on 99…9 representa un conjunt de $n-3$ nous seguits i 00…0 representa $n-2$ zeros seguits.

Aplicarem les fórmules de la suma dels n primer termes d'una progressió aritmètica i d'una progressió geomètrica que són, respectivament:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}; \quad S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

a) Primerament, expressarem el nombre N= 4949…(n-3)...9550…(n-2)...0 d'una altra forma. Com que N té 2n dígits, la seva expressió decimal seria:
$N= 4\cdot10^{2n-1}+9\cdot10^{2n-2}+4\cdot10^{2n-3}+9(10^{2n-4}+...+10^{n})+5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2}$
Ara bé, $(10^{2n-4}+...+10^{n})$ és la suma de n-3 termes d'una progressió geomètrica de raó r =10, en la qual $a_1 = 10^n$ i $a_n = 10^{2n-4}$, per tant, serà: $S= \frac{10^{2n-3}-10^{n}}{9}$. Així doncs,
$N= 4\cdot10^{2n-1}+9\cdot10^{2n-2}+4\cdot10^{2n-3}+9\ \frac{10^{2n-3}-10^{n}}{9} +5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2} =$
$4\cdot10^{2n-1}+9\cdot10^{2n-2}+5\cdot10^{2n-3}- 10^{n} +5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2} = 495\cdot10^{2n-3}- 45\cdot10^{n-2}$

b) Ara sumarem tots els enters de n dígits. Els enters de n dígits formen una progressió aritmètica de diferència d=1, el primer terme és $a_1 = 10^{n-1}$ i $a_n = 10^{n}-1$ i el nombre de termes és $9\cdot10^{n-1}$. Així doncs,
$S= \frac{9\cdot10^{n-1}(10^{n-1}+10^{n}-1)}{2} = \frac{9\cdot10^{n-1}(11\cdot10^{n-1}-1)}{2} = \frac{99\cdot10^{2n-2}-9\cdot10^{n-1}}{2} =$
$\frac{990\cdot10^{2n-3}-90\cdot10^{n-2}}{2} = 495\cdot10^{2n-3}- 45\cdot10^{n-2}$
I aquesta és la mateixa expressió de N que havíem trobat a l'apartat a.

Albert Cobo Molina