FME	3 – 5 - 14
Divertiment abril 2014	M. Salichs

Demostreu que si $p \geq 3$ és un nombre primer, aleshores és un divisor de $\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^p\right]-2^{p+1}$, on $[x]$ representa la part entera de x.

Sigui $f(p)=\left[\left(\sqrt{5}+2\right)^p\right]$ llavors es té (veure nota al final ; p senar),

$$f(p)=\left(\sqrt{5}+2\right)^p-\left(\sqrt{5}-2\right)^p$$

i per tant amb l'ajut del desenvolupament binomial i donat que p es senar tenim,

$$f(p)-2^{p+1}=2\sum_{m=0}^{(p-1)/2}\binom{p}{2m}5^m 2^{p-2m}-2^{p+1}=2\sum_{m=1}^{(p-1)/2}\binom{p}{2m}5^m 2^{p-2m}$$

Ara be, si p es primer resulta un divisor de,

$$\binom{p}{2m}=\frac{p!}{(2m)!\cdot(p-2m)!}\qquad\left(m=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\right)$$

ja que tots els factors del denominador son inferiors a p i p es un factor del numerador que no es pot factoritzar (primer). Així dons, $f(p)-2^{p+1}$ es divisible per p .

Nota

Es clar que tenim,

$$0<\left(\sqrt{5}-2\right)^p<1\quad\rightarrow\quad\left[\left(\sqrt{5}-2\right)^p\right]=0$$

i el desenvolupament binomial dona (p senar),

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^p=\alpha\sqrt{5}+\beta\quad;\quad\left(\sqrt{5}-2\right)^p=\alpha\sqrt{5}-\beta$$

a on α , β son dos enters positius.

Si notem amb $\{x\}$ la part fraccionària d'x i donat que $x=[x]+\{x\}$, resulta clarament,

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^p=\left[\alpha\sqrt{5}+\beta\right]+\left\{\alpha\sqrt{5}+\beta\right\}$$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^p=\left[\alpha\sqrt{5}-\beta\right]+\left\{\alpha\sqrt{5}-\beta\right\}=0+\left\{\alpha\sqrt{5}-\beta\right\}=\left\{\alpha\sqrt{5}+\beta\right\}$$

ja que $\alpha\sqrt{5}+\beta$ i $\alpha\sqrt{5}-\beta$ tenen la mateixa part fraccionària (la seva diferència es un enter).

Si restem,

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^p-\left(\sqrt{5}-2\right)^p=\left[\alpha\sqrt{5}+\beta\right]$$

que es l'expressió utilitzada.