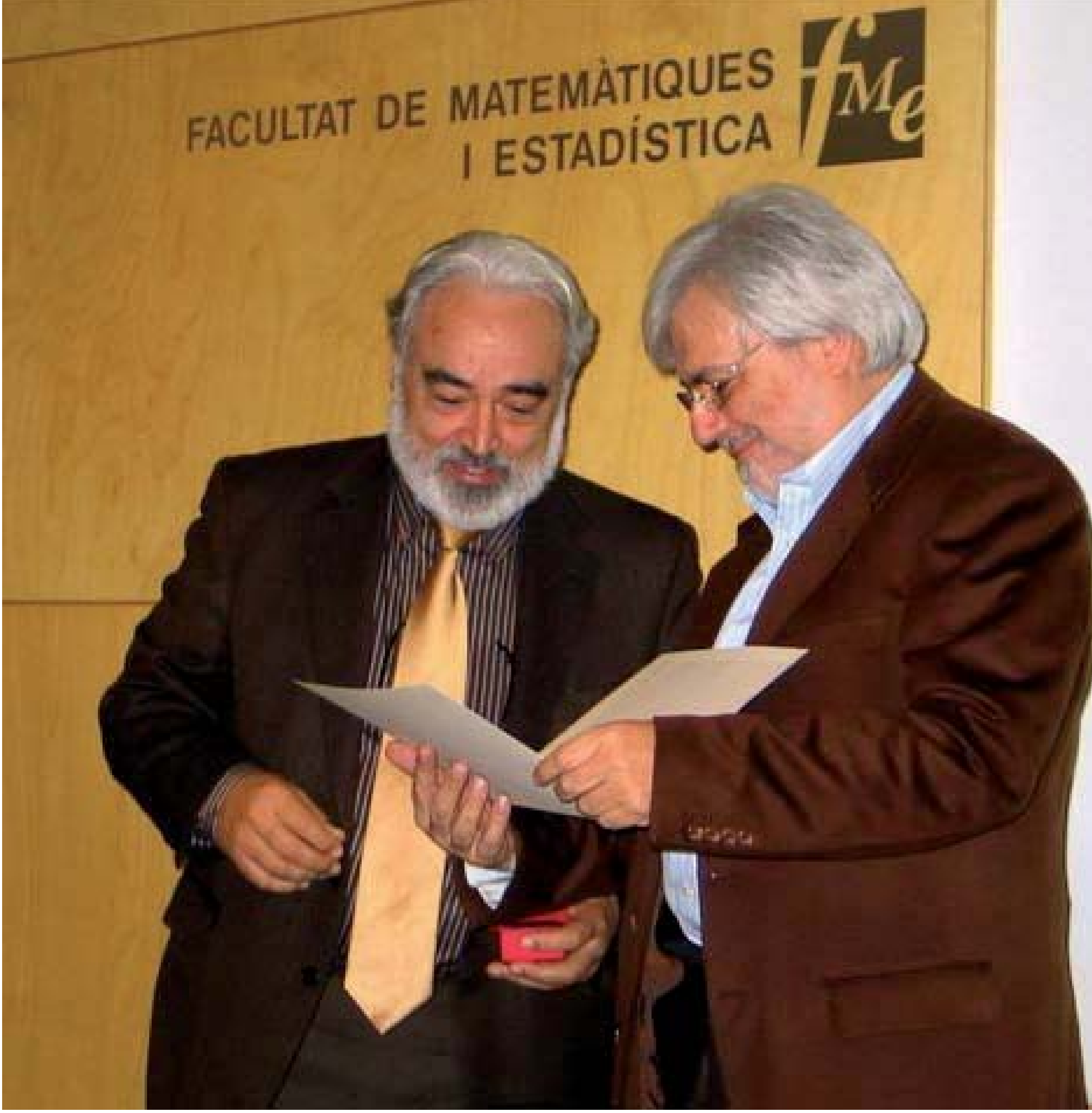
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

ACTE DE DISTINCIÓ COM A *MAGISTER HONORIS CAUSA*

DE

JOSEP PLA I CARRERA

28 de febrer de 2007


FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
I ESTADÍSTICA
fMe

Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya

Acte de Distinció com a *Magister Honoris Causa*

de

Josep Pla i Carrera

28 de febrer de 2007

Facultat de Matemàtiques i Estadística
Pau Gargallo, 5 — 08028 Barcelona

Fotocomposició, impressió i enquadernació:
Barcelona digital
c/ Rosselló, 77. 08029 Barcelona
Tel. 93-3638610

ISBN: 978-84-7653-410-6
Dipòsit legal: B-33625-2009

Printed in Spain

Índex

Sebastià Xambó Descamps

Exordi

L'acte de distinció del professor Josep Pla i Carrera per part de la Facultat de Matemàtiques i Estadística fou celebrat el dimecres 28 de febrer de 2007, a dos quarts de set.

La iniciativa que portà a aquesta avinentesa s'originà per la confluència de dos esdeveniments singulars. El primer fou la publicació del llibre *Introducció a la metodologia de la matemàtica*,[1] cosa que l'equip deganal del moment va estimar mereixedora d'una invitació a l'autor per presentar-lo a la facultat. El segon esdeveniment fou la jubilació d'en Josep Pla, precisament el darrer dia del mes de febrer de 2007. Fou així que es va considerar oportú imaginar un acte en el qual, a més de la conferència, es fés una semblança de la seva trajectòria vital.

No va costar trobar la persona més indicada per preparar un relat de la vida i obra de Josep Pla: havia de ser n'Eduard Recasens. Hi havia almenys tres raons que reforçaven aquesta conclusió. En primer lloc, Josep Pla fou professor seu en els cursos de lògica, tant de la llicenciatura com de doctorat, a la UB. Després, Pla fou membre del tribunal de la tesi, dirigida per Albert Dou, *La Geometria Magna in Minimis de J. Zaragozà. El centre mínim i el lloc 5è d'Apol·loni*.[2] Finalment, un fet que Recasens tot just havia descobert: ell i Pla eren conciutadans de Sant Feliu de Guíxols, i això sens dubte deu imprimir algun caràcter.

El disseny de l'acte, i la difusió que se'n va fer, es va anar perfilant a les reunions de l'equip deganal de gener i febrer de 2007. S'hi va implicar el rectorat, i més concretament el vicerectorat de Personal Acadèmic, i es va decidir que l'acte es clouria atorgant-li el pin de plata de l'FME i un diploma de *Magister honoris causa* de l'FME, i

[1] Josep Pla i Carrera: Universitat 20, Publicacions i Edicions de la UB, 2006. Del llibre se'n va fer una recensió al Full de l'FME de febrer de 2007.

[2] Eduard Recasens Gallart, Universitat Autònoma de Barcelona, 1991.

és de remarcar que no vam ser conscients fins passats uns dies que ‘Magister’ era el títol del capítol 9 de *Damunt les espatlles dels gegants*...

A l’acte assistí José Luis Andrés Yebra, com a vicerector de Personal Acadèmic i en representació del rectorat, i el programa, a més de la presentació del llibre a càrrec del seu autor, d’un interludi en què la Coral de l’FME va interpretar *Good News* i de la semblança personal i acadèmica que en va fer n’Eduard Recasens, es va perllongar amb «una felicitació, i un reconeixement, amb motiu del seu 65è aniversari, per part de l’FME i de tots els qui avui ens heu volgut acompanyar». Aquí només puc citar les paraules que vaig dir en aquesta darrera part:

> L’FME, en el seu afany per contribuir a dinamitzar un sentit de les matemàtiques, la ciència i la tècnica no circumscrit merament als formalismes, s’ha proposat iniciar l’atorgament de distincions a persones que representin aquest esperit. Aprofitant l’avinentesa del 65è aniversari de Josep Pla, i el seu pas de professor ordinari a professor emèrit, l’FME ha considerat oportú d’atorgar-li la distinció de *Magister honoris causa*, que hem volgut materialitzar amb el lliurament d’un diploma.
>
> I per tal que en puguis presumir, em plau lliurar-te també el pin de plata de l’FME.
>
> Tal com es pot llegir a la pàgina 193 de la seva *Damunt les espatlles dels gegants*, Valeri Gassiot, l’alter ego d’en Josep es va dir: «Jo ho tenia clar. Seria mestre. Res ni ningú m’ho impediria. Però de què?» Ara ja ho sabem: és, ha estat, i serà un *Magister*, tres vegades coneixedor, potser no exactament en el sentit del seu pare, però si en el que ens ha recordat n’Eduard Recasens en la seva semblança.

Tot seguit en Josep Pla va prendre la paraula per llegir un text d’«agraïment a l’FME» i José Luis Andrés Yebra va dirigir unes paraules en nom propi i en representació del rectorat.

Cal dir finalment que la primera secció del ***Discurs*** de Josep Pla recollit en aquest opuscle coincideix amb el text d’«agraïment» que hem esmentat, mentre que la resta és l’assaig escrit corresponent a la conferència que ens va impartir per presentar el seu llibre.

Eduard Recasens Gallart

Elogi del professor Josep Pla i Carrera

Aquesta *Laudatio* del professor Josep Pla i Carrera es basa en dues converses mantingudes recentment amb ell sobre la seva vida professional i privada, també en la meva pròpia experiència com alumne seu i, finalment, en altres converses que hem sostingut al llarg de la nostra vida com a docents i estudiosos de les matemàtiques i de la seva història.

Josep Pla i Carrera és fill de Manuel Pla i de Francesca Carrera. Manuel Pla era barceloní i, uns anys abans del 1936, atenent una proposta d'Alexandre Galí, fundador de l'Escola Blanquerna, es va traslladar a viure a Sant Feliu de Guixols per a fer-se càrrec com a psico-pedagog d'una escola-residència que estava situada al bell paratge de S'Agaró. En aquesta ciutat del Baix Empordà és on va conèixer a la guixolenca Francesca Carrera amb qui es va casar l'any 1936 i fruit d'aquesta unió, el 7 de maig de 1942, naixia Josep Pla i Carrera.

Josep Pla i Carrera va viure els sis primers anys de la seva vida a Sant Feliu i el 1948 la família Pla-Carrera amb els seus tres fills es van traslladar a viure a Barcelona i des de llavors aquesta ha estat la ciutat on ha residit Josep Pla.

A la família Pla-Carrera, una vegada a Barcelona, i com passava a molta altra gent en aquella dècada dels 50, la vida no els va ser fàcil, ja que les dificultats econòmiques hi eren presents. En Josep es recorda en aquell temps com un noi entremaliat, rebel i indisciplinat. Els seus pares esperaven que acabada l'escola bàsica es posés a treballar i així ho va fer. Va començar algunes feines, va fer de «noi dels recados» i d'aprenent d'alguns oficis, però aviat se'n va cansar i, un dia, quan ja tenia més d'onze anys, va decidir que estudiaria. Això implicava haver de fer el batxillerat. Segons ell mateix m'ha explicat, li va costar convèncer als seus pares de que la decisió que havia pres era seriosa. Una vegada acceptada, va preparar per lliure l'ingrés i el primer curs de batxillerat i el curs 53-54 es va presentar als exàmens de l'Institut Ausiàs March. Amb el primer de batxillerat aprovat, va aconseguir una beca dels Jesuïtes per a estudiar al «Colegio de San Ignacio» de Sarrià que era el barri barceloní on vivia amb els seus pares. En Pla estudiava de valent i treia bones notes, quedava doncs ben clar que «aquell noi servia per estudiar».

Durant el batxillerat li van agradar les matemàtiques i l'anàlisi sintàctica de les oracions gramaticals del llatí i del castellà —del català no pot dir res, ja que llavors estava prohibit ensenyar-lo. Amb aquesta afecció a les matemàtiques i l'anàlisi sintàctica, es començava a perfilar el Pla matemàtic i lògic, però no pas el Pla historiador, ja que, segons explica, si una assignatura no li agradava era la història.

Llavors va arribar aquell dia en què va haver de contestar —i contestar-se a ell mateix— aquella pregunta que els grans fan als petits: «Nen, què vols ser quan siguis gran?». Josep Pla ho tenia clar: **volia fer quelcom que es pogués ensenyar i fos racional**, però això implicava estudiar o bé matemàtiques o bé teologia. En aquella època i en aquest país, si volies estudiar teologia havies d'anar al seminari i fer-te capellà. Així doncs, a en Josep no li va costar gens prendre una decisió: l'octubre de 1962 entrava a la Facultat de Ciències de la Universitat de Barcelona amb el clar propòsit d'estudiar la ciència racional de les matemàtiques per després poder ensenyar-la.

El seu primer professor de matemàtiques fou el Dr. Josep Vaquer. Josep Pla recorda també els altres professors: Enrique Linés, Rafael Mallol, Josep Teixidor, Joan Augé, Juan Bautista Sancho, Rafael Aguiló, Francesc d'Assís Sales, etc. Amb ells va aprendre que hi havia «grups de permutacions», «anells», «ideals principals», «isomorfismes», «conjunts quocients» i que «per a tot èpsilon existia un delta». En aquells temps eren pocs els que estudiaven matemàtiques i tots ells es coneixien: Pilar Bayer, Carles Simó, Nadal Batle, Joaquín Navarro, Julià Cufí, Mercè Potau, Montserrat Cullell, Sebastià Xambó, Francisco Gómez, Pilar Cerdà, Joaquim Ortega, Irene Llerena, Manuel Castellet, Josep Grané, Joan Girbau etc.

Josep Pla, estudiant de matemàtiques, quedava meravellat amb aquelles definicions tan perfectes, amb aquelles hipòtesis tan ben escollides, amb aquelles proposicions tan ben demostrades, i, també amb aquells èpsilons tant ben fraccionats per tal que esdevinguessin enters al final, però Josep Pla volia saber com s'havia arribat a tot allò, es preguntava perquè unes hipòtesis i no unes altres, perquè aquelles definicions, perquè aquells teoremes, en definitiva, volia saber com es feia per arribar a aconseguir tanta perfecció, **Josep Pla volia veure els esborranys, volia saber quin era «el mètode de descobriment»**.

I és això mateix el que, anys més tard, caracteritzarà en Josep Pla com a professor i escriptor. A les seves classes ho escriurà tot a la pissarra, amb rigor i claredat, de manera que no li faria falta parlar. Tanmateix, ell parla i parla tota l'estona, sense parar, i això és perquè ell vol que l'alumne arribi a conèixer l'esborrany que hi ha al darrera de l'ordre lògic i la presentació formal i, per la mateixa raó, els seus escrits són plens de notes i més notes a peu de pàgina. I és que allò que en Pla volia per a ell quan era estudiant, el coneixement **de l'esborrany i el mètode de descobriment**, ara ho dóna generosament als seus alumnes i als seus lectors.

Un dia, quan només faltaven dos anys per al 2000 (llavors ell ja en tindrà 56), Josep Pla decideix escriure una novel·la. La novel·la es titolarà *Damunt les espatlles dels gegants*. Aquesta novel·la és una narració en paral·lel de dues històries sobre dos matemàtics. Un dels relats descriu certs moments de la vida i mort del jove matemàtic Galois. L'altre fa referència a un fictici professor de matemàtiques anomenat Valeri Gassiot, al qual, a punt de jubilar-se, se li encarrega d'impartir la lliçó inaugural d'un nou curs acadèmic. Valeri Gassiot, mentre prepara la lliçó inaugural, va recordant diversos moments de la seva vida com a adolescent, com a estudiant i després com a professor. Els records d'en Gassiot, encara que novel·lats, són els propis records d'en Josep Pla.

Llegeixo d'aquest llibre un dels records d'en Gassiot que figuren en una de les addendes a la novel·la:

> Recordo que quan estudiava segon de matemàtiques, el doctor Linés ens va proposar com a llibre de text l'*Análisis matemático* de Tom Apostol. El llibre, com corresponia a l'època, era més aviat teòric i formal. El professor que ens feia les classes de problemes —un home ja madur, amb molt bona voluntat— sabia calcular límits, fer integrals, sumar sèries..., i ho ensenyava bé. Però no havia après la matemàtica moderna —en aquell temps tothom li deia així— que impregnava les pàgines de l'Apostol, i els problemes que el text ens proposava quedaven per fer. Com podríem aconseguir que algú ens iniciés en la manera de fer-los? Ho vàrem exposar al doctor Linés. Ell ens va escoltar, i es va fer càrrec de la situació. Va dir que hi pensaria i que buscaria una solució. Al cap d'uns dies, l'havia trobada: «No se preocupen. Dedicaremos dos o tres sábados por la mañana a resolver algunos de los problemas del Apostol ¿Les parece bien?»
>
> Varem acceptar. Les classes pràctiques que ens va donar van ser apassionants. Ens explicava cada problema tal i com l'havia pensat, des del començament. Intentava

> fer-nos veure què li havia fet intuir l'enunciat, què li havien suggerit les dades, com calia articular els resultats teòrics per anar avançant. Però el que ens resultava més profitós de tot, era quan ens explicava que havia equivocat el camí, per què, i com havia aconseguit reconduir el problema.[3]

En aquest paràgraf de la novel·la queda clar l'interès de l'estudiant Josep Pla en voler conèixer l'esborrany que hi havia darrera l'obra, que és, en definitiva, on s'hi poden trobar els indicis del mètode de descobriment. Aquesta inquietud cap al mètode de descobriment és allò que en el futur ha de portar a Josep Pla cap a l'estudi de la història de la matemàtica.

Però en Josep Pla, mentre estudiava la carrera, també feia de les seves. Una vegada, davant d'un professor de problemes que no els acabava de fer el pes, ell i el seu amic Nadal Batle van voler posar-lo a prova. Van escollir un problema on es demanava si un conjunt era compacte, es van posar d'acord i un d'ells va sortir a la pissarra a demostrar que ho era, tot seguit va sortir l'altre i va demostrar que no ho era. Es tractava de veure com se'n sortia aquell professor d'aquell embolic. No sé com deuria acabar aquella classe.

Josep Pla també es va implicar políticament en contra de la dictadura i en defensa de les llibertats democràtiques. Va viure de prop la caputxinada de l'any 1966 i va patir alguna retirada del carnet i del passaport, amb tot el risc que això implicava en aquelles circumstàncies.

L'any que oficialment inicià la seva carrera docent com a matemàtic és el 1969, encara que ell, per ajudar-se a costejar els estudis, ja portava alguns anys donant classes particulars i en acadèmies.

El curs 69/70 fou professor ajudant a la Universitat de Barcelona (UB), i també fou professor a la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), que llavors començava. Josep Pla, juntament amb Nadal Batle, Pilar Bayer, Carles Simó i Julià Cufí, serien els primers professors de matemàtiques de la UAB que, provisionalment, es trobava ubicada al costat de l'Hospital de Sant Pau. Aquell curs també va donar classes a l'Institut Químic de Sarrià i als cursos nocturns de l'Institut Infanta Isabel.

[3] Josep Pla i Carrera: *Damunt les espatlles dels gegants* (2a edició, Col·lecció FME, 2007), pàg. 255.

Els cursos següents continuà donant classes, tant de teoria com de problemes, de l'assignatura que fes falta: càlcul, anàlisi, àlgebra lineal, lògica, topologia, etc., i, per fer el complert, també va ser contractat com a professor a l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de la UPC.

Després va arribar el dia en què Josep Pla va decidir fer la tesi i va escollir el camp de la lògica algebraica com a camp d'investigació. El 17 d'octubre de 1975, sota la direcció del Dr. Francesc d'Assís Sales, Josep Pla va presentar i va defensar a la UB la tesi que porta per nom *Contribució a l'estudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius*, i obtingué la màxima puntuació.

Des del curs 74/75, Josep Pla ha dedicat tota la seva vida professional a la docència i a la recerca en matemàtiques essent professor de la Facultat de Matemàtiques de la UB amb dedicació exclusiva. També ha dedicat una bona part del seu temps a la gestió acadèmica de la seva Facultat. En el període 1985-1989, fou cap d'estudis, el primer cap d'estudis d'una Facultat de Matemàtiques. En el període 1989-1992, en va ser degà, el període 1992-1994, vicedegà i últimament ha estat elegit director del Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística.

Fins el 1984 Josep Pla va treballar especialment en el camp de la lògica algebraica, tant en l'aspecte docent com en el de recerca, i va ser el primer en endegar docència en lògica matemàtica en una Facultat de Matemàtiques. Juntament amb Francesc d'Assís Sales, foren pioners en la direcció de tesis doctorals sobre lògica algebraica. Però durant aquests anys, també donà classes d'estadística i probabilitat, que, en definitiva, és allò que tocava fer en el departament on es trobava.

Llavors va arribar el dia en què Josep Pla **va decidir estudiar història de la matemàtica** i, com no podia ser d'altra manera, també va decidir **ensenyar-la**. Dóna el seu primer curs d'Història de la matemàtica el 84/85, assignatura que ha continuat impartint fins el dia d'avui. El cultiu d'aquesta disciplina l'ha marcat de tal manera que avui es fa difícil pensar en Josep Pla i no pensar en la història de la matemàtica.

Amb aquesta nova faceta d'historiador, la labor docent d'en Pla s'ha estès més enllà de les aules a través d'articles, conferències i llibres que publica amb certa regularitat, i en aquests moments és ell qui més ha publicat en català sobre història de la matemàtica.

Cito a continuació alguns títols del conjunt de l'obra d'en Josep Pla, cito especialment aquells que tenen més relació amb el seu esperit docent i divulgador, però amb aquest llistat no exhaureixo, ni de bon tros, totes les seves publicacions:

- «L'axioma de l'elecció i la paradoxa de Banach- Tarski» (1983, article, Butlletí Societat Catalana de Matemàtiques (BSCM))
- «Alfred Tarski i la lògica contemporània» (1984, article BSCM)
- *Las Matemáticas* (1984, llibre)
- «L'article de Richard Dedekind sobre el teorema d'equivalència» (1987, VI Congrés Català de Lògica)
- El 1989 escriu un capítol de la *Historia general de las Ciencias* de René Taton.
- «Las sèries en Newton» (1989, article BSCM)
- «La Helena de las matemáticas y el principio de mínima acción» (1989, article, Quaderns Fundació Caixa de Pensions)
- *Lliçons de Lògica* (1991, llibre)
- «El teorema fonamental de l'àlgebra abans de Gauss» (1992, article UAB)
- «Sherlock Holmes y Pitágoras en Mesopotamia» (1995, article, Mundo Científico)
- «Les matemàtiques i els matemàtics de la Revolució Francesa» (1996, article BSCM)
- «Arquimedes i Descartes. El mètode com un canvi de llenguatge» (1998, article BSCM)

- *Damunt les espatlles dels gegants* (1998, llibre que obtingué el Premi de Literatura Científica de la Fundació Catalana per a la Recerca)
- *La geometria de René Descartes* (juntament amb Pelegrí Viader, 1999, llibre)
- «Matemàtiques: Naturalesa, Art i Espionatge» (2000, conferència Sant Feliu de Guíxols)
- «Anàlisi combinatòria» (2002, Sessions preparatòries per a l'Olimpíada matemàtica)
- *Notes per a unes classes de Teoria de models i indecidibilitat* (2002, llibre, Universitat de les Illes Balears)
- «Una història breu de la matemàtica» (2003, article BSCM)
- *La Veritat matemàtica* (2003, discurs d'entrada a Reial Acadèmia de Doctors)
- «Fermat i la cuadratura del Folium de Descartes» (juntament amb Jaume Paradís i Pelegrí Viader, 2003, article, American Mathematical Montly)
- «Matemàtiques i multiculturalitat» (2004, conferència, SCM)
- «Aproximació històrica i heurística al teorema fonamental de l'àlgebra» (2006, conferència, FME)
- «L'àlgebra de la papiroflèxia» (2006, article BSCM)
- *Introducció a la metodologia de les matemàtiques* (2006, llibre, UB)
- *Els nombres. Una aproximació a la història de la matemàtica* (pendent de publicació)
- *Opera Varia de Fermat* (en col·laboració amb Pelegrí Viader i Jaume Paradís, pendent de publicació)[4]

---

[4] Aquesta obra fou publicada el 2008 per l'Institu d'Estudis Catalans.

Josep Pla ha rebut diversos premis i distincions: els anys 1984 i 1992 obtingué el premi Barcelona per a estudis i investigacions en ciència cognitiva i lògica, pures i aplicades.

El 1991 fou premi Ferran Sunyer i Balaguer de l'Institut d'Estudis Catalans per la seva obra *Aspectes alternatius de la teoria axiomàtica de conjunts*.

El 1998 fou Premi de Literatura Científica de la Fundació Catalana per a la recerca pel llibre *Damunt les espatlles del gegants*.

El 2003 va entrar a formar part de la Reial Acadèmia de Doctors com a membre de número i ho va fer amb un discurs d'entrada que portava per títol «La veritat matemàtica».

No puc acabar aquesta breu incursió a l''homenot' Josep Pla sense dir alguna cosa d'en Pla no matemàtic. En Pla gaudeix llegint els clàssics. Ja ho feia de jove: als 18 anys llegí tot el Quixot i als 24 anys, *Vides paral·leles*, de Plutarc. Li agrada molt llegir Dostoievski, però també li agrada la novel·la policíaca. En pintura, li agraden els impressionistes, especialment Van Gogh i Toulouse-Lautrec. Li agrada l'òpera, perquè és un gran espectacle, però prefereix escoltar Brahms. També li agrada el jazz clàssic. Abans anava sovint al cinema, últimament no hi va gaire; li agradaven especialment els westerns, però també *Matar a un Ruiseñor*, *Calle Mayor* i *Ladrón de bicicletas*.

Se sent molt bé vivint a l'àrea mediterrània. Li agrada la cultura mediterrània i guarda un grat record dels seus viatges a Sicília, Egipte i Turquia. I, sobretot, li agrada sentir-se acompanyat per Margarida Bassols, la persona amb qui comparteix la seva vida.

Josep Pla és català i li agrada ser-ho. Parla i llegeix diverses llengües, però quan se sent d'allò més bé es quan pot fer-ho en català, perquè, com ell diu, «aquesta és la llengua que es parlava a casa». Diu que el català es defensa parlant-lo i escrivint-lo, i això és el que ell sempre ha fet. La seva tesi és la primera tesi de matemàtiques que s'escriví en català (això era l'any 1975) i pràcticament tots els seus articles i llibres són escrits en aquesta llengua.

Josep Pla ha estat membre de la Societat Catalana de Matemàtiques des de 1974, abans que fos de nou institucionalitzada, i hi ha col·laborat assíduament en la seva gestió. També hi ha col·laborat durant molts anys preparant alumnes per competir a l'olimpíada matemàtica.

Sovint ha anat a França per assistir als cursos de la Universitat de Prada. Recorda que allà es trobava amb Eduard Bonet, Porter Moix, Salvador Giner, Mª Aurelia Capmany, Emili Giralt, etc., i guarda un grat record de totes aquelles trobades.

Per acabar voldria llegir-vos uns fragments de *Damunt les espatlles dels gegants*, on Josep Pla recorda les seves primeres inquietuds docents. Són fragments extrets del capítol 9, que precisament es titula «Magister» (*loc. cit.*, nota 3):

> Aquell tercer de batxillerat —per a mi, era el segon curs als jesuïtes— va ser d'allò més apassionant. Vaig descobrir-hi una llengua —el llatí, que m'apropava als clàssics— i un llenguatge —l'àlgebra, que em permetia de resoldre problemes que altrament m'hauria estat molt difícil de resoldre i, en alguns casos, impossible. Però, a més de tot això, vaig descobrir la passió per explicar les coses que descobria als altres, als companys. Era apassionant, però no era fàcil. Quan et semblava que ja ho havies entès tot, una pregunta d'un company et deixava clavat en la teva incomprensió [...] Al vespre, mentre sopàvem, vaig contar l'experiència als de casa. Els vaig dir que m'apassionava això d'ensenyar, però que era ben difícil. El pare —com sempre— llegia, com si no hi fos. Al cap d'una estona —quan hagué acabat de llegir el capítol— em va dir: —Valeri, la paraula mestre ve del llatí *magister*. Significa «tres vegades més». Ningú que no sàpiga tres vegades més que aquell a qui ensenya no pot ser mai un bon mestre. Fill, —va continuar, mentre jo el mirava astorat— si realment et vols dedicar a ensenyar, hauràs d'aprendre molt més que no pas un altre. Hauràs d'aprendre tres vegades més que qualsevol dels teus companys.

Josep Pla m'ha explicat que al seu pare li agradava l'etimologia de les paraules, tot i que, a vegades, hi afegia molta imaginació.

Cap al final d'aquest capítol 9, es llegeix:

> Com més hi pensava més em convencia que l'important, com deia el pare, no era saber tres vegades més. El que realment importava era aconseguir tres punts de vista d'una mateixa qüestió i ser capaç de relacionar-los. Un bon mestre era el que tenia tres bones perspectives, i un sistema per passar de l'una a l'altra.

I s'acaba el capítol 9 amb aquesta reflexió del professor Gassiot:

> [...] I vaig ser ben conscient que, de ben jove, havia pres la decisió de ser professor. No vaig trigar gaire a decidir que seria professor de matemàtiques. I, si ho podia aconseguir, un professor de la Facultat de Matemàtiques. Hauria de ser capaç de veure les matemàtiques amb els ulls de la intuïció i, molt més difícil encara, de transmetre aquesta manera de mirar. Hauria de poder suscitar problemes i teoremes des de moltes perspectives alhora. Mai no he sabut ben bé si ho he assolit. Espero haver-ho aconseguit encara que només sigui una mica perquè, si no, la meva vida hauria estat un fracàs massa gran.

Amic Josep, jo no he tingut l'oportunitat d'assistir a les classes del professor Gassiot, però he tingut la sort de poder assistir a les teves, tant les orals com les escrites, i et puc assegurar que tu has fet realitat les seves aspiracions.

I acabo:

Josep Pla de jove volia estudiar quelcom que fos racional i que es pogués ensenyar, i ara que ja ha arribat a la maduresa sap i sabem que ha aconseguit plenament allò que s'havia proposat.

Josep Pla ha estat mestre per a molts de nosaltres que hem estat i ens hem sentit alumnes d'ell, alumnes d'ell perquè ens ha ensenyat matemàtiques, lògica i història, i ho ha fet a través de les seves classes, ho ha fet a través de les seves apassionades i a la vegada ordenades conferències, ho ha fet a través dels seus articles i llibres, i sobretot, ho ha fet a través de les moltes converses mantingudes amb tots nosaltres.

Conversar és un art. El diccionari de la llengua catalana diu de 'conversar' que és 'entretenir-se enraonant'. Em fixo amb la paraula 'entretenir-se', la busco al diccionari i trobo: «Passar el temps agradablement en alguna cosa». Aviat és dit això de «passar el temps», avui que ningú en té, però Josep Pla treu temps d'allà on sigui per conversar de matemàtiques i del que calgui, i nosaltres, conversant amb ell, aprenem i el temps ens passa agradablement tal i com és manat al diccionari de la llengua catalana.

Josep, amigues i amics, moltes gràcies per la vostra atenció.

Fotografies

1

2

Josep Pla i Carrera

Discurs

1. Paraules d'agraïment

Distingit i il·lustríssim Sr. José Luís Andrés Yebra, vicerector de Personal Acadèmic de la UPC, estimat amic Sebastià Xambó, degà de la Facultat de Matemàtiques i Estadística, companyes i companys, amigues i amics, senyores i senyors.

D'entrada i abans d'aprofundir més, vull abraçar, en un acte simbòlic, Eduard Recasens pel perfil humà que acaba de fer de la meva persona. Sé que hi ha dedicat il·lusió, esforç i dedicació, però sobretot hi ha posat el valor de l'amistat, com heu pogut veure prou bé. Eduard, gràcies per tot, que és molt més del que es veu a simple vista.

Ara, però, en una ocasió com aquesta, corresponen unes paraules d'agraïment sincer, autèntic, que provingui de l'emoció del cor i alhora de la serenitat de la pensa.

Per això en respondre la distinció que la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC m'ha volgut retre amb aquest acte, d'entrada haig de dir que, quan l'amic Sebastià em va comunicar la decisió que la Junta de Facultat havia pres, em vaig sentir realment emocionat.

Us puc ben assegurar que mai no havia pensat que fos possible una distinció com aquesta a la meva activitat universitària i em va causar una satisfacció immensa alhora que em creava una responsabilitat indiscutible.

Ara, en aquestes paraules breus, voldria fer-vos partícips dels meus sentiments perquè penso que simplement agrair-ho, sense fer paleses les raons per les quals m'he sentit personalment honorat, no fora propi de l'esperit de l'acte que estem celebrant.

Crec sincerament que no hi ha cap satisfacció que pugui superar el fet de rebre una distinció i reconeixement dels mèrits personals de part dels companys. Són, de fet, els més capacitats —en dedicar-se a la mateixa tasca— per poder valorar en allò que val el que realment he aportat al col·lectiu, tant des del punt vista acadèmic —docent, investigador, i de gestió— com humà, social i polític. És un reconeixement professional i vital.

Considero també que és una distinció a tota una generació: la generació que va donar el primer impuls al creixement de la recerca matemàtica i al canvi de paradigma docent a Catalunya, i a la qual pertanyen noms simbòlics que no vull oblidar. Manuel Castellet que va crear i impulsar el CRM, Nadal Batle [Felanitx (Palma de Mallorca), 1945–ciutat de Mallorca (Palma de Mallorca), 1997], primer rector i ànima viva de la UIB als seus inicis, Pilar Bayer, Julià Cufí, Carles Simó i jo mateix que vàrem posar la llavor del que avui és el Departament de Matemàtiques de la UAB. A ella pertany també en Josep Grané que, amb el seu entusiasme personal i capacitat de treball, ha donat vida i fet créixer les Olimpíades Matemàtiques catalanes. També és la generació que impulsà, amb saba nova, la Secció de Matemàtiques de l'IEC i, d'alguna manera, va aconseguir que el català, en la docència i en la divulgació de la matemàtica, esdevingués una llengua més normalitzada. I ho va fer en unes circumstàncies polítiques encara adverses. En aquesta tasca va ser important la Universitat catalana de Prades de Conflent en la qual molts de nosaltres —la promoció que va de 1965 a 1975— va jugar un paper força rellevant.[5]

Però penso que de fet, amb aquesta distinció, el que la Facultat de Matemàtiques i Estadística ha pretès és fer palès que vàrem ser els mestres d'una altra generació probablement encara més gran. Aquesta generació —forjada fonamentalment, malgrat totes les seves limitacions, a la Facultat de Matemàtiques de la UB, però també de forma més incipient a la UAB— és la generació que ha fet que la matemàtica catalana s'hagi estès més enllà de les nostres fronteres, s'hagin pogut fer «meetings internacionals» a casa nostra, i «congressos», com el Congrés europeu que va organitzar la Secció de Matemàtiques de l'IEC, l'any 2000, quan n'era president l'amic Sebastià. Són ells, de fet, els que han portat a terme la creació, desenvolupament i consolidació de la Facultat on som ara i que avui em ret homenatge, alhora que es ret homenatge a si mateixa per la seva capacitat de treball, seriositat en la recerca, capacitat docent, i habilitat política. És la generació que omple d'articles revistes de «primer nivell» i aconsegueix que les revistes de casa nostra siguin valorades més enllà de les fronteres locals, i que ha vist la necessitat de disposar d'altres centres de recerca com ara l'IMUB, i de participar activament en el CEHIC, i d'altres, per esmentar els centres de recerca catalans. I alhora és la generació que ha fet possible les proves «Cangur»,[6]

[5] Aquí caldria recordar el paper del poeta Gabriel Ferraté [Reus (Tarragona), 1922 - Sant Cugat del Vallès (Barcelona), 1972] i d'Eduard Bonet.

[6] Amb l'esforç, entre d'altres, de Sebastià Xambó, Pelegrí Viader, Antoni Gomà, etc.

les activitats de portes obertes a les facultats, i tantes altres activitats, que han apropat —quelcom que semblava impensable— les faculats de matemàtiques, els centres d'ensenyament no universitari i les organitzacions de professors de matemàtiques com ara l'ABEAM, la FEMCAT, etc. I, n'estic ben convençut, sense la intromissió dels polítics —una intervenció que va molt més enllà del que l'autonomia de les institucions mereix— s'hauria pogut produir un diàleg molt fructífer en relació a la formació dels docents de matemàtica a l'ensenyament mitjà.[7]

En definitiva, encara que em faci pesat —és un dels privilegis de l'edat— deixeu-me recordar una vegada més les paraules de Francesc d'Assís Sales [Tarrassa, 1914–Barcelona, 2006]: «Un bon mestre és aquell que aconsegueix que els seus alumnes arribin més enllà que ell».[8] Penso que aquesta distinció que em feu reconeix que la meva generació ha aconseguit els objectius docents i de recerca que calia produir.

Amb la creació de centres d'ensenyament i recerca matemàtica s'ha provocat una situació de competència i de rivalitat —quelcom noble i positiu—, però que, no obstant això, en certs moments puntuals, pot haver tingut algun punt d'agror. Amb aquest acte, tanmateix, la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC demostra una generositat i una qualitat acadèmica que vull posar de manifest. En triar-me per a aquesta distinció posa de relleu que la competència i la rivalitat és, com deia, sana, positiva, té capacitat i voluntat de cooperació, reconeixement i diàleg. Alhora —deixeu-me aquest espai de vanitat— m'honora pensar que, malgrat haver mantingut els meus principis, criteris i opinions i haver discrepat, en ocasions, dels companys i de les autoritats, he aconseguit mantenir-me amic de tots i respectuós en la diferència.

I encara un últim fet que no puc —i no vull— obviar. Aquesta distinció és la primera que s'atorga a un professor per una universitat, a través de la petició d'una Facultat. Sóc conscient —és d'allò més natural amb les decisions i accions pioneres, ni els teoremes de matemàtiques neixen amb la perfecció que adquireixen amb el pas del temps— que aquest acte solament és la llavor d'un reconeixement que, ben aviat,

---

[7]Quelcom que, amb el mestratge que es vol endagar, quedarà molt danyat i, probablement, passarà un grapat d'anys abans no s'esmeni l'error que estem a punt de cometre.

[8]Recentment, he descobert que és una dita de la saviesa xinesa.

creixerà, s'estendrà, es consolidarà i esdevindrà un acte acadèmic i de política universitària institucional i de política catalana.[9] No puc deixar d'emocionar-me per aquest fet singular que inicia una tradició. No és pas la primera vegada que, amb actuacions molt simples, a voltes docents, a voltes institucionals, he estat pioner d'algun afer senzill. Deixeu-me'n recordar un: vaig ser l'autor de la primera tesi de matemàtica escrita en català (1975), la qual, a més, inicià el grup consolidat de lògica algèbrica.[10]

Vull creure, però, que aquesta distinció —malgrat recollir tot això— va més enllà i és un acte humà, en el qual la fM$_e$ de la UPC ha volgut —i ha sabut— valorar quelcom que oblidem sovint: darrere de tota la nostra activitat hi ha sempre una persona, un col·lectiu de persones, amb les seves qualitats i els seus defectes. És bo de criticar els defectes quan cal per poder aconseguir millorar el demà, però cal, tant o més, reconèixer els encerts i no avergonyir-nos de dir-los.[11]

Per això, tot reiterant-me, vull agrair, de cor i de pensament, a la fM$_e$ que m'hagi fet aquesta distinció, i a la Universitat Politècnica que, amb generositat, hagi estat capaç

[9] Amb la concessió de la segona distinció *Magíster honoris causa* de la fM$_e$ a l'il·lustríssim amic i company Jaume Pagès Fita l'esdeveniment ha adquirit ja —com era d'esperar— una qualitat humana, social i política indiscutible.

[10] Vaig ser el primer professor a instaurar una docència de Lògica matemàtica i d'Història de la matemàtica força completes en una Facultat de Matemàtiques. Amb Francesc d'Assís Sales, vaig iniciar la direcció de tesis doctorals de lògica algèbrica que han culminat en el grup consolidat de Lògica algèbrica (Josep M. Font, Joan Gispert, Antoni Torrens, Ventura Verdú). Amb Albert Dou i Antoni Malet vaig iniciar la direcció de tesis en Història de la matemàtica i la lògica. Vaig contribuir a implantar, també en una Facultat de Matemàtiques, la docència d'un curs de 'didàctica' (amb la connivència de la Griselda Pascual [Barcelona, 1926–Barcelona, 2001], seguit per la il·lusió i professionalitat d'Anton Aubanell), el primer Cap d'Estudis d'un ensenyament de Matemàtiques, el primer a impulsar l'acte acadèmicoinstitucional de la concessió pública del títols de llicenciat de matemàtiques amb l'assistència dels pares, i recentment el primer director del Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Facultat de Matemàtiques de la UB.

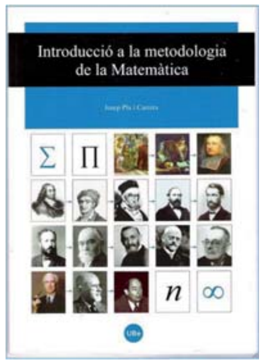
[11] Aquí voldria indicar la necessitat d'iniciar un camí de reconeixement —si no pot ser la concessió d'alguna mena de grau doctoral— de les Facultats de Matemàtiques pels qui, des de fora de la Universitat, s'esforcen per mantenir viu l'esperit de la matemàtica en les noies i nois abans dels estudis universitaris, persones com n'Antònia Canals, Marta Berini, Elisabet Sagués, Anton Aubanell, Antoni Gomà, Iolanda Guevara, etc.

d'acollir la iniciativa, i hagi contribuït al fet que aquest acte sigui un acte universitari en el sentit més ple de la paraula. Aquest acolliment de la UPC em retorna a l'època, ja llunyana, quan sota la batuta del professor Pedro Pi-Calleja [Barcelona, 19 de gener de 1907–Barcelona, 11 d'octubre de 1986] i la direcció acadèmica d'Enric Trillas, vaig tenir l'oportunitat —molt formativa— de fer classes de matemàtica superior a l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura. També em plau de recordar la col·laboració entre la UB i la UPC quan vàrem dur a terme els «Congressos catalans de lògica», tot col·laborant amb Llorenç Valverde, o el «Seminari sobre la responsabilitat dels matemàtics» d'Emilio Garbayo Martínez, catedràtic de l'Escola d'Enginyers de Camins i Ponts.

A tots i totes, per totes aquestes vivències, moltes, moltíssimes gràcies.

2. Una reflexió metodològica

2.1. **Introducció a la metodologia matemàtica.** Ara, però, voldria fer una reflexió metodològica de l'ensenyament de la matemàtica en sintonia amb el text *Introducció a la metodologia de la matemàtica* que acaba d'editar UBe i del qual n'Eduard en diu:



> *Introducció a la metodologia de la Matemàtica* no és com un llibre de text per fer un curs d'àlgebra o un curs de càlcul, ni és un manual d'exercicis i problemes, com tampoc no és, en absolut, un llibre de divulgació. Més que catalogar-lo, diria que és un llibre per acompanyar l'estudiant al llarg de la carrera ja que, al mateix temps que presenta materials bàsics de la matemàtica, ensenya a treballar-los seriosament i a reflexionar-hi en profunditat.

De fet, si se'm pregunta quin és l'objectiu del llibre, què pretenia quan el vaig escriure, hauria de dir amb sinceritat que el que volia era expressar d'alguna manera la meva manera d'entendre allò que cal 'aprendre' si volem ser uns bons 'transmisors' de la matemàtica.

2.1.1. *Metodologia i història.* En la controvèrsia sobre què és el que cal ensenyar als qui volen dedicar-se, com a feina, a ensenyar la matemàtica i, de retruc, qui l'ha de fer aquesta tasca, el llibre vol ser una resposta parcial d'entre d'altres de possibles.

Al llarg dels anys —i probablement per la meva pròpia experiència docent i d'estudi— cada cop estic més convençut que els dos eixos que han de 'coordenar' la docència de la matemàtica són: la història i la metodologia.

Per tot això quan, a la vista dels coneixements que d'aquetes qüestions tenien els estudiants que arribaven a la Facultat de Matemàtiques de la UB, vaig considerar que fóra oportú de fer el que, en un principi, es va anomenar 'curs zero' o 'curs d'adaptació', i vaig creure que era el moment d'elaborar un projecte docent de metodologia matemàtica.

Així ho vaig fer durant els quatre cursos acadèmics en què em vaig encarregar d'una part de la docència del curs d'adaptació. I el fruit de les reflexions sobre com havia de ser el curs i el seu desenvolupament, en forma de llibre, més complet i acabat, és el que ara serveix de leitmotiv per fer un reflexió.

No sé si aquella experiència de la Facultat de Matemàtiques de la UB—que encara avui perdura—quallarà en els plans d'estudis nous, emanats del 'projecte Bolonya' i el seu desenvolupament, ni tampoc no sé si s'imposarà de forma general, encara que així ho espero. Sigui com sigui, la refelxió i el text són a punt.

Se'm podria preguntar: I què passa amb la història de la matemàtica?, l'altre eix de coordenades.

La resposta —sempre al meu entendre— és que la història de la matemàtica és una disciplina que cal desenvolupar paral·lelament amb el desenvolupament dels continguts matemàtics al si de l'ensenyament de la matemàtica, com una disciplina més, perquè ajuda a prendre consciència de les raons —a voltes externes a la presentació actual de la qüestió— que en varen motivar el naixement i desenvolupament.

Queda per a una altra ocasió, i ara espero tenir prou temps per dedicar-m'hi plenament, una reflexió i presentació històrica de la matemàtica. És tanmateix —us ho prometo— un objectiu que no penso deixar passar.

Ambdues facetes —metodologia i història— no són, al meu entendre, equivalents sinò complementàries.

2.1.2. *La matemàtica en espiral.* La metodologia matemàtica és quelcom que, en una primera aproximació, no s'hauria d'adquirir, ni abans ni després, sinò simultàniament amb el desenvolupament tècnic i rigorós dels conceptes específics de la matemàtica i que caldria aprofundir a mesura que s'aprofundeixen els conceptes, els problemes i els teoremes.

En tot cas, una idea que fa temps que em balla pel cap és que l'ensenyament de la matemàtica s'hauria de fer sempre en espiral. Els conceptes i resultats cal introduir-los —sempre que sigui possible de la manera més intuïtiva i informal possible, amb l'ajud de qüestions i exemples concrets— i retornar-hi sempre que el desenvolupament ho precisi, tot fixant l'atenció en allò que podem afegir en base a allò que hem après des que vàrem analitzar la qüestió la darrera vegada.

La metodologia, doncs, com molt bé observa l'Eduard, no constitueix mai un corpus per llegir d'una tirada. És un text de tipus enciclopèdic al qual cal recórrer quan hi ha quelcom en la qüestió matemàtica que s'està desenvolupant davant nostre que no ens ha acabat de quedar clar perquè ens manquen les eines cognitives més bàsicas, com passa també, a vegades, quan llegim una novel·la, amb la semàntica de les paraules, de les dites, de les frases fetes, etc. És, doncs, una eina útil tant per als estudiants com per als professors de matemàtiques.

Per fer més entenedor l'esperit de la metodologia matemàtica res millor que un exemple fet amb qüestions matemàtiques concretes.

Amb ell el que pretenc és fer-vos més entenedor el que vull transmetre amb la idea que l'aprenentatge de la matemàtica—i, de retruc, el seu ensenyament—s'ha de fer en espiral.

2.1.3. *L'acte educatiu en la seva globalitat.* Deixeu-me insistir en el fet que, independentment del tros que toqui a cada docent, a cada franja d'edat, a cada etapa del procés educatiu, al final del procés formtiu l'alumne hauria de ser capaç de refer parts importants de la matemàtica com qui explica un conte —quelcom que hauria d'estar assumit com un fet natural i característic pels docents— en el qual hi ha un o diversos personatges protagonistes que tenen unes aventures que, per a uns seran apassionants i per a d'altres no tindran cap mena d'interès. Això tanmateix no fa pas que el conte no existeixi i tingui el seu argument.

En això consisteix —ho afirmo categòricament— l'acte educatiu entès en la seva globalitat.

Ara bé, per poder contar un capítol o una de les aventures, cal tenir un coneixement del conte en la seva totalitat.[12] Ajuda moltíssim a aconseguir-ho una bona formació en la història de la matemàtica, entensa com l'evolució conceptual en si mateixa i contextual.

Val a dir que aleshores el binomi metodologia-història, entés d'aquesta manera, esdevé també ofici de matemàtic —i de matemàtic global, encara que la globalitat sigui només d'una part de l'univers matemàtic. Sense una formació i coneixements matemàtics profunds i arrelats és impossible oferir-ne una visió històrica en un sentit evolutiu del concepte. Cal tenir les idees molt ben assentades per poder entendre com van nèixer, què les va motivar, per què van evolucionar d'aquesta manera en un moment del procés de desenvolupament, i d'aquesta altra, en un altre, etc.

3. El conte: la representació decimal dels nombres

Per fer palesa, d'una forma concreta, la idea que estic exposant usaré, com ja he indicat abans, un exemple senzill: l'expressió decimal dels nombres.

---

[12]Recordo —record fugisser— l'experiència de la novel·la policíaca *The floating amiral* (1931), dels autors G. K. Chesterton, Canon Victor L. Whitechurch, G. D. H., M. Cole, Henry Wade, Agatha Christie, John Rhode, Milward Kennedy, Dorothy L. Sayers, Ronald A. Knox, Freeman Wills Crofts, Edgar Jepson, Clemence Dane, y Anthony Berkeley. Es donaven per endevant dos capítols incials d'una trama policíaca. Llavors un tercer autor escrivia un tercer capítol i seguia la novel·la fins el final. Els tres primers capítols passaven a un quart autor que procedia de forma anàloga. El que fa curiosa l'experiència és que cada autor, a partir del que rebia com a previ, confegia una novel·la diferent. Això no tindria sentit —o poser sí?— en el fet educatiu de la formació matemàtica.

L'exemple n'és molt de senzill, però l'esperit amb què el presento hauria de recórrer, en tot moment, tant la presentació de les qüestions en les nostres aules com el camí a seguir en l'estudi per assolir-ne la comprensió més pregona possible.[13]

Recordo que, en més d'una ocasió, em vaig a adonar —havien passat uns anys i el context era un altre— del significat últim d'un teorema que m'havien explicat feia temps. Aleshores podia dir: «Ostres!, això és allò que no acabava d'entendre».

Certament que és una anècdota particular i que, com a tal, no s'ha de prendre amb un valor universal. Però tampoc em considero tan atípic per pensar que sóc un ésser únic i irrepetible. Per això crec que algunes de les meves experiències poden ser útils a algú. De fet, fer-se gran, entre d'altres circumstàncies, consisteix a haver acumulat experiències i, de retruc, compartir-les amb d'altres que, en algun moment, també hi arribaran.

Desitjo que, un cop explicat el conte, quedi ben aclarit el que entenc per comprensió en espiral i transversal de les qüestions matemàtiques. I espero també que s'entengui el que vull dir quan afirmo que hi ha dos eixos de coordenades bàsics per a la comprensió dels resultats matemàtics: l'històric i el que avui en dic metodològic.

3.1. **La introducció del sistema decimal posicional indoaràbic.** És quelcom ben conegut de tothom que, pels volts del segle IX, els matemàtics de l'islam usaven un sistema de numeració que s'havia gestat a l'Índia alguns segles abans. Em refereixo al sistema de numeració posicional en base deu que actualment coneixem com a sistema de numeració posicional indoaràbic. Els nombres, per grans que siguin, es poden escriure usant solament deu xifres:

$$\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.}$$

Moḥammad ibn Mūsà al–H̱wārizmī
Bagdad (ara Iraq), ~780–?, ~850

És indubtable que, al segle IX, els erudits àrabs coneixien el sistema indi de numeració amb zero. L'any 825, al–H̱wārizmī va elaborar un petit

[13] Sense oblidar que sempre és possible afegir-hi un altre personatge, una altra aventura, etc., perquè pot ser molt difícil conèixer el conte tot sencer.

opuscle en el qual posava de manifest la vàlua del sistema de numeració. Solament ens n'han arribat, com el títol indica, traduccions llatines. La més coneguda és probablement d'Adelard de Bath [Bath (Anglaterra), ~1075–?, 1160]: *Liber Algorismi de numero indorum*.[14] D'aquesta traducció se'n coneix solament una còpia incompleta del segle XIII.[15]

LEONARDO DA PISA, FIBONACCI
Pisa (Itàlia), 1170–Pisa (Itàlia), 1250

Tanmateix el més important i útil d'aquesta numeració, que seria defensada aferrissadament per Leonardo da Pisa, de sobrenom Fibonacci, al *Liber Abaci* [1202],[16] n'era la simplicitat dels algorismes de càlcul —sumar, restar, multiplicar, dividir, extracció d'arrels quadrades— que permetia. Però el text de Fibonacci fou prematur per la seva extensió i per la seva complexitat.[17] Caldria esperar al segle XV i a les aritmètiques comercials —escrites en la llèngua vernàcula dels diversos països— perquè el sistema s'imposés a occident com a eina d'ús normal. Val la pena recordar l'existència de l'*Ars de la Summa de Arismetica* (1482), de Francesc de Sanclíment, en català.[18] És el segon tractat d'art comercial d'Europa, després de l'anònim de Treviso (Itàlia, 1478). De l'*Ars* se'n conserva un incunable a la Biblioteca de Catalunya.

Ara bé, aquesta metodologia d'expressió numèrica ha tingut certa importància més enllà del fet de l'escriptura decimal. D'aquesta importància en podem posar de relleu alguns fets, en els temes de reflexió següents:

Temes de reflexió

1.– En relació amb l'expressió decimal dels nombres enters positius podem observar que hi ha propietats del nombre que no depenen de l'expressió, com ara el fet que el

[14]Vegeu [All92].

[15]No se'n conserva cap còpia en àrab i per això aquesta obra es cita sempre pel seu títol llatí.

[16]El títol és irònic. En síntesi, diu: «L'àbac autèntic no és l'àbac romà que féu servir. És el sistema de numeració indoaràbic».

[17]Vegeu [Sig02].

[18]Referència de l'obra: R 093:51 Esc 8º 1 c.5. Sala de Reserva. Vegeu també [San82].

nombre sigui perfecte, parell, primer, etc. En canvi, n'hi ha altres, de propietats —com ara els criteris de divisibilitat— que depenen de la base elegida per expressar-los.[19]

2.– Tot nombre enter positiu **b** > 1 serveix per oferir una escriptura de tipus decimal dels nombres enters. És possible passar d'una base de numeració a una altra amb facilitat. També és possible donar taules de sumar i de multiplicar en la base que desitgem.

3.– Ens podem apropar als sistemes de numeració mesopotàmic i maia.

4.– Podem reflexionar sobre el sistema de numeració en base **2**, que és, de fet, la base que s'usa en els càlculs amb ordinadors. I veure què és el que justifica els mètodes de càlcul dels egipcis.

5.– Apareix la necessitat del **0**, però no pas amb la mateixa naturalesa que els altres nombres, sinò com un indicador de carència en un indret concret de l'expressió numèrica.

6.– Podem intentar de compendre els algoritmes de càlcul de sumar, restar, multiplicar i dividir, en base al fet que els nombres s'expressin en forma posicional.

7.– Podem reflexionar sobre els avantatges i inconvenients en comparació amb d'altres sistemes de numeració, com ara el grec, o el romà.

3.2. **Els decimals expressats en el sistema decimal.** Tanmateix, és curiós adonar-se que, fins ben entrat el segle XVI, occident no usà els nombres en l'expressió decimal posicional actual. I tanmateix aquesta descripció numèrica s'usava solament per expressar els nombres enters.

Caldria esperar l'aparició de *The Deinde* [*La Disme*] (1585) de Simon Stevin perquè fóssim conscients que el sistema era tan apte pels enters com per als fraccionaris amb expressió decimal finita perquè, en aquest cas, els algorismes de càlcul —sempre íntimament vinculats a l'expressió numèrica— són els mateixos.[20]

---

[19] En aquest aspecte, vegeu la secció 3.6.

[20] Vegeu [Str69, pàgines 7–11].

SIMON STEVIN
Bruixes (Flandes, ara Bèlgica), 1548
La Haia (Holanda), 1620

Ara bé, si volem estendre l'expressió decimal (o en una base **b** > 1) a tots el nombres racionals, caldrà fonamentar-la en el fet que les sèries geomètriques de raó decreixent tenen una suma finita en el món dels nombres reals.

I si volem que tota expressió decimal tingui sentit, cal fer atenció al bucle. Es tracta d'un bucle que, en algun moment o altre, caldrà aclarir, però no és gens senzill. Els matemàtics no ho aconseguiren fins a finals del segle XIX. De fet, cal que prèviament existeixin els nombres reals en la seva totalitat per saber si una expressió decimal infinita té alguna mena de sentit i que aquest sentit és precisament un nombre real. Perquè:

> *Podria haver-hi més nombres reals que els que s'expressen en forma decimal infinita? I menys?*

Treballarem en la hipòtesi

> **Hipòtesi.** *Cada nombre real admet una expressió decimal.*

Aleshores els **temes de reflexió** més simples —menys compromesos— són, entre d'altres:

8.– L'escriptura decimal infinita d'un nombre és única?

9.– L'escriptura decimal infinita d'un nombre permet de classificar els nombres reals en racionals i irracionals segons com sigui l'expressió decimal que el nombre tingui.

És possible demostrar —amb una certa facilitat— que els nombres que tenen una expressió decimal periòdica són necessàriament racionals, i recíprocament:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} = \mathbf{0,04}\left(= \mathbf{0,03}\widehat{\mathbf{9}}\right), \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0,333}\ldots\left(= \mathbf{0,}\widehat{\mathbf{3}}\right), \quad \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}} = \mathbf{0,1333}\ldots\left(= \mathbf{0,1}\widehat{\mathbf{3}}\right).$$

De retruc, doncs, els nombres que tenen una expressió decimal no-periòdica són irracionals.[21]

10.– Ens podem preguntar si aquest fet depèn o no de la base que hàgim triat per fer la representació dels nombres.

11.– També ens podem preguntar si, donat un nombre racional $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$, amb $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$, podem saber —sense determinar de forma específica el seu desenvolupament decimal— el nombre de xifres que té la part no-periòdica i quantes la part periòdica.[22]

12.– Tanmateix això no clou pas la qüestió de classificació dels nombres reals en racionals i irracionals perquè no és fàcil saber —quan l'expressem en decimal— si un nombre té una expressió periòdica o no.

Per això, per veure, per exemple, que $\sqrt{\mathbf{2}}$ o el nombre d'or són irracionals, hom no recorre pas a l'expressió decimal. Una manera és la que dóna Aristòtil [Estagira (Macedònia, Grècia), 384 aC–Chalcis (Euboea, Grècia), 322 aC] als *Analítics Primers*: «Si $\sqrt{\mathbf{2}}$ fos racional, un nombre parell fóra senar».

---

[21] Per simplificar, entenem que tot nombre racional té una expressió decimal periòdica exacta [que podríem considerar mixta], pura, o mixta.

[22] És un problema interessant perquè posa de manifest dues o tres qüestions colaterals. La primera, on buscar el que cal per poder respondre a una pregunta. En aquest cas és un resultat d'aritmètica que pot semblar-nos sorprenent. La segona, adonar-nos d'un fet inesperat: com afecta el numerador i/o el denominador en la naturalesa periòdica del nombre fraccionari. La tercera, ens trobem davant d'un problema —o teorema— que s'ha de resoldre pel mètode de la disjunció de casos.

Un exemple històric rellevant d'aquest mètode l'aplicà Giovanni Girolamo Saccheri [San Remo (Itàlia), 5 de setembre de 1667–Milà (Itàlia), 25 d'octubre de 1733] en l'anàlisi de la veracitat del postulat de les paral·leles a l'*Euclides ab Omni Nævo Vindicatus* [1733].

És un mètode interessant que, d'alguna manera, matisa el principi del tercer exclòs: la negació d'un fet pot comportar l'anàlisi de dos o més fets i no necessàriament d'un sol fet.

Aquest camí es pot estendre a tots els nombres que provenen de l'extracció d'arrels.

13.– Però, com sabem molt bé, no va ser gens fàcil demostrar que els nombres $\mathbf{e}$ i π són irracionals. I, naturalment, no s'aconsegueiex pas, en general, observant com és l'expressió decimal, sinó per d'altres camins.[23]

14.– És bo conèixer aquesta complexitat i saber també que encara avui hi ha nombres reals dels quals no sabem si són racionals o irracionals com ara, per exemple, la constant γ d'Euler.[24]

3.3. **El problema de la unicitat.** Ens hem preguntat per la unicitat en la representació numèrica en base deu. Però,

És important un fet com aquest?

Per respondre a aquesta pregunta res millor que el diàleg que s'establí entre Georg Fredinad Cantor i Richard Dedekind quan el primer li envià una demostració del fet que el segment de la recta real $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ i el quadrat del pla real $[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \times [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ tenen la mateixa quantitat de punts.

---

[23] Hi ha una demostració senzilla d'August de Morgan [Madura (Presidència de Madràs, Índia (ara Madurai, Tamil Nadu, Índia), 27 de juny de 1806–Londres (Anglaterra), 18 de març de 1871] per a demostrar que $\mathbf{e}$ és irracional, basada en la sèrie dels inversos dels factorials de $\mathbf{k}$, amb $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots$. Malahuradament no té una rèplica en el cas del nombre π.

El camí més curt, observat per Leonhard Euler [Basilea (Suïssa), 15 d'abril de 1707–Sant Petersburg (Rússia), 18 de setembre de 1783], es basa en l'ús de les fraccions contínues: n'hi ha prou a veure que el desenvolupament no és finit. Però això és, potser, un altre conte.

[24] Aquí s'obre tota una altra possible història: dues successions divergents del mateix ordre de divergència, poden diferir d'una constant?

En el cas de la constant d'Euler es comparen, de fet, $(\ln \mathbf{n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}}$ i $(\mathbf{S_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}}$, on $\mathbf{S_n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. És a dir, com de bé aproxima la sèrie harmònica la funció logaritme neparià?

L'any 1877, Cantor somet per a la seva publicació al *Journal de Crelle* l'article «Una contribució a la teoria de les varietats», on demostra que l'equipotència dels conjunts $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ i $[\mathbf{0},\mathbf{1}]\times[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.[25]

Aquest teorema és el que féu que Cantor exclamés: «Ho veig però no m'ho crec».

Per comprendre l'enunciat, el raonament i l'error comès hem d'entendre, d'entrada, el concepte d'equipotència de conjunts.

3.3.1. *De l'equipotència i la dominància.* En 1874, Cantor introdueix l'equipotència i la dominància de conjunts de nombres reals.

Tot el problema neix de la preocupació següent:

És possible comptar tots els nombres reals usant els nombres naturals?

Ens retrobem, de vell nou, després de molts i molts segles amb el problema de comptar elements d'un conjunt. Però ara el conjunt que volem comptar és infinit. Per tant, Cantor no disposa de cap nombre natural —els nombres naturals són finits— per comptar els elements d'un conjunt infinit.[26]

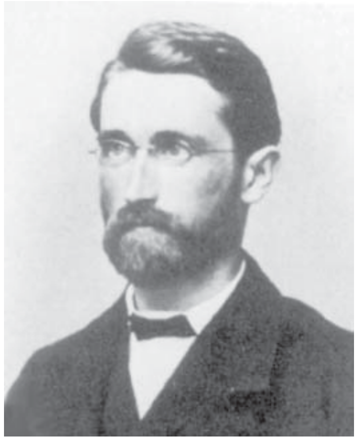
Aleshores se li acut tornar al començament quan encara no es disposava dels nombres per comptar les ovelles d'un ramat i el pastor feia servir pedres. Quan sortien a pasturar, per cada ovella, apilava una pedra. En tornar, al capvespre, refeia l'operació. Si les pedres del munt del matí concordava amb les ovelles que havien tornat al tombant del dia, tot anava bé; si li quedava alguna pedra a la pila, és que havia perdut una ovella; si li mancaven pedres, al ramat del matí se li havien afegit ovelles que, en sortir a pasturar, no hi eren. És a dir, l'home primitiu recorria a la correspondència u a u. Cantor fa exactament el mateix:

---

[25]Vegeu [Can78]; presentat l'any 1877, fou publicat l'any següent. Són interessants els comentaris de [Bur89, pàgina 607].

[26]Una qüestió que deixo de banda és: Què és un conjunt infinit? Ras i curt, podríem dir: «Un conjunt és infinit quan dins d'ell n'hi ha un que té tants objectes com el conjunt **N** dels nombres naturals».

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
San Petersbourg, 3 de març de 1845
Halle, 6 de gener de 1918



Julius Wilhelm Richard Dedekind
Braunschweig, 6 d'octubre de 1831
Braunschweig, 17 de febrer de 1916

Definició. *Dos conjunts* $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}$*,* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}$ *són equipotents si, i només si, existeix una aplicació bijectiva* $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$.

Si, en canvi, existeix una injecció $\iota : X \longrightarrow Y$*, però no existeix cap bijecció, diem que* $\mathbf{Y}$ *domina (estrictament)* $\mathbf{X}$.

En el primer cas, escrivim: $\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$, o bé: $\mathrm{card}(\mathbf{X}) = \mathrm{card}(\mathbf{Y})$; en el segon, $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$, o bé: $\mathrm{card}(\mathbf{X}) < \mathrm{card}(\mathbf{Y})$.

Tot seguit demostra, per exemple, que

$$\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} \simeq \mathbb{Q} \quad \text{i} \quad \mathbb{N} \prec \mathbb{R}.$$

L'equipotència no és, en absolut, un problema menor com palesen els exemples següents.[27]

[27] L'infinit provoca un trencament intuïtiu —gens difícil de copsar— que en dificulta, tanmateix, la comprensió.

A.– Ens podem entretenir a veure la paradoxa, plantejada per Galileo Galilei [Pisa (ara Itàlia), 5 de febrer de 1564–Arcetri (a prop de Florència (ara Itàlia), 8 de gener de 1642] a *Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze* [1638], segons la qual «hi ha tants nombres naturals com quadrats de nombres naturals».[28] En concret,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & 12 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 1^2{=}1 & 2^2{=}4 & 3^2{=}9 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 & 10^2 & \dots & 12^2 & \dots \end{array}$$

És la primera vegada que, d'una forma clara i precisa, es planteja l'aparent paradoxa que un cert subconjunt de nombres té, en quantitat, els mateixos elements que el conjunt que el conté.[29]

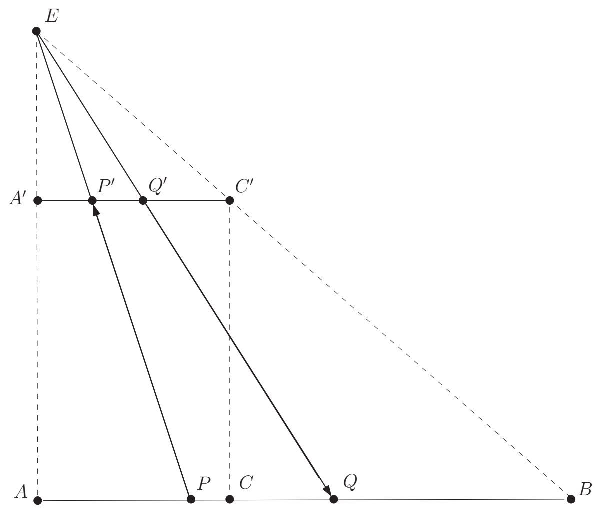
B.– Podem recórrer a la projecció d'un segment sobre un subsegment [vegeu la figura de la pàgina següent] per fer més clara l'equipotència entre conjunts infinits: d'una banda, un d'ells, AB, té més punts que l'altre, $A'C' \simeq AC$, i, d'una altra, tenen la 'mateixa quantitat' de punts.

Òbviament, el segment AB conté el subsegment AC. Considerem ara el segment $A'C' \simeq AC$ de la mateixa longitud que AC, desplaçat cap amunt. Unim els punts A i A', i els punts B i C'. Les dues rectes es tallen en el punt E, que és el punt des del qual fem la projecció. Aleshores, a cada punt P del segment AB, li correspon un punt, i només un, P', del segment $A'C'$; i, recíprocament, a cada punt, Q', del segment $A'C'$, un i només un, Q, del segment AC.

Hem establert una correspondència u a u entre els punts d'un segment i els punts d'un subsegment propi, una constatació força sorprenent.

[28]Vegeu [Gal38, pàgines 78-79].

[29]Paradoxa. Els quadrats dels nombres enters positius són enters positius —molts menys que tots ells— i alhora es poden fer correspondre u a u els uns i els altres. És, de fet, aquesta paradoxa el que vol posar de manifest Galileo, encara que no n'acalareix ni la intenció ni tampoc el fet que no és cap de paradoxa.



C.– O bé, podem resoldre la paradoxa de l'hotel de Hilbert, en honor de David Hilbert [Königsberg (Prússia, ara Kaliningrad, Rússia), 23 de gener de 1862–Göttingen (Alemanya), 14 de febrer de 1943]: «Hi ha un hotel amb tantes habitacions com nombres naturals. És ple de gom a gom. És un hotel molt decent. A cada habitació hi ha —i no n'hi poden haver més— una sola persona. Arriba un autocar amb tants seients com nombres naturals, ple de gom a gom, a cada seient un sol viatger. La nit és freda, i cal que els viatgers s'aixopluguin a l'hotel. L'amo de l'hotel, que no és 'geòmetra' —un greu defecte, segons Pascal—, diu: "No és possible". A l'autocar hi va Hilbert, que el replica dient-li: "No hi cap mena de problema"».

Deduir-ne que la unió de dos conjunts disjunts equipotents a $\mathbb{N}$ també ho és, d'equipotent a $\mathbb{N}$.

15.– Veure aleshores que $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$.

16.– Repassar la demostració d'Euclides [?, ~325 aC–Alexandria (Egipte), 265 aC], segons la qual «hi ha infinits nombres primers».

Demostrar que hi ha tants primers com naturals.[30]

17.– Veure que hi ha tants naturals com fraccionaris.[31]

3.3.2. *El mètode de la diagonal.* Molt més difícil, però, és veure que «hi ha més nombres reals que naturals».

L'any 1891,[32] Cantor ho demostrà de forma brillant i relativament senzilla usant el fet següent:

> Supòsit. *Tot nombre real de l'interval* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ *admet una expressió decimal única.*

La seva demostració, molt elegant, és una demostració per reducció a l'absurd[33] i el mètode que usa es coneix amb el nom de mètode de la diagonal.

És un mètode que ha sigut d'una gran utilitat en la tècnica demostrativa matemàtica, sobre tot en qüestions d'indecidibilitat.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{r_1} & = & \mathbf{0,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots} \\
\mathbf{r_2} & = & \mathbf{0,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots} \\
\mathbf{r_3} & = & \mathbf{0,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots} \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{r_n} & = & \mathbf{0,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots} \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

Demostració breu. Si els nombres reals fossin en quantitat numerable, els podríem enumerar i obtendríem un quadre com el de la dreta en el qual, per a cada índex $\mathbf{n}$, hem exclòs que, a partir d'un valor concret $\mathbf{r}$ —és a dir, per a tot $\mathbf{r} > \mathbf{r_n}$—, tots els $\mathbf{a_{nr}}$ siguin iguals a $\mathbf{0}$.[34]

Ara construïm el nombre real

$$\mathbf{s} = \mathbf{0,b_1b_2\cdots b_n\cdots}, \text{ on } \mathbf{b_n} = \mathbf{1}, \text{ si } \mathbf{a_{nn}} \neq \mathbf{1}, \text{ i } \mathbf{b_n} = \mathbf{2}, \text{ si } \mathbf{a_{nn}} = \mathbf{1}.$$

[30] N'hi ha prou a veure que és infinit i està ficat a dins, però és una mica delicat de demostrar.
[31] De fet, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.
[32] Vegeu [Can91].
[33] El mateix recurs que usà Aristòtil per veure que $\sqrt{\mathbf{2}}$ és irracional.
[34] Aquesta precisió cal per poder garantir la unicitat de la representació.

En aquesta construcció és clar, atesa la unicitat de la representació decimal dels nombres reals, que, per a tot $\mathbf{n}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{r_n}$. És a dir, hi ha un nombre real que és diferents de tots els nombres reals. Contradicció!

En aquest cas ja és més complicat posar exemples als quals puguem recórrer per familiaritzar-nos amb aquesta manera de raonar o procedir, però podem citar un parell o tres de problemes, encara que sigui molt per sobre:

A.– Teorema de Cantor. *No és possible d'establir cap bijecció entre un conjunt* $\mathbf{X}$ *i el conjunt* $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ *de les seves parts.*[35]

Demostració breu. Suposem que existís. Aleshores tindríem una aplicació

$$\mathbf{g} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}).$$

A cada element $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ li correspondria un subconjunt $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{X}$. Considerem ara el següent subconjunt $\mathbf{X_0} \subseteq \mathbf{X}$:

$$\mathbf{X_0} = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ i } \mathbf{x} \notin \mathbf{g}(\mathbf{x})\right\} \in \mathcal{P}(\mathbf{X}).$$

Li correspon una antiimatge $\mathbf{x_0} \in \mathbf{X}$ que satisfà $\mathbf{g}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{X_0}$.

La pregunta que ens fem ara és:

$$\mathbf{x_0} \in \mathbf{g}(\mathbf{x_0}) \text{ o } \mathbf{x_0} \notin \mathbf{g}(\mathbf{x_0})?$$

(a) Suposem que $\mathbf{x_0} \in \mathbf{g}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{X_0}$. Aleshores, per la definició de $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{x_0} \notin \mathbf{g}(\mathbf{x_0})$.
Per tant, necessàriament,
(b) $\mathbf{x_0} \notin \mathbf{g}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{X_0}$. Aleshores, per la definició de $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{x_0} \in \mathbf{g}(\mathbf{x_0})$.

Això porta a una contradicció que prové d'haver suposat l'existència d'una bijecció entre $\mathbf{X}$ i $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.

D'aquesta manera, Cantor genera conjunts infinits cada cop més grans.

Un corol·lari d'aquest teorema és la no-equipotència dels conjunts $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$, independent del mètode de la diagonal. De fet, consisteix a veure que $\mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

[35] Vegeu [Can91].

Una manera senzilla d'establir-ho és usant el teorema de Bernstein-Cantor-Dedekind:

> **Teorema de Bernstein-Cantor-Dedekind.** *Donats dos conjunts* $\mathbf{X}$ *i* $\mathbf{Y}$*, si* $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ *i* $\mathbf{Y} \prec \mathbf{X}$*, aleshores* $\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$.

Hauríem de veure, doncs, que $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec [\mathbf{0},\mathbf{1}]$, atès que $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \simeq \mathbb{R}$.[36]

B.– La paradoxa de Richard que fa referència a la numeració que donem a les frases relatives als nombres enters positius, frases com ara:[37]

> 'És múltiple de tres'.
> 'És un quadrat perfecte'.
> 'És un nombre perfecte parell'.
>
> $\vdots$

N'hi ha una quantitat numerable.[38] Ara, les frases les ordenem, per exemple, per ordre alfabètic i les enumerem. Aleshores definim els nombres richardians com segueix.

> **Definició de nombre richardià.** *Un nombre natural* $\mathbf{n}$ *és richardià si, i només si, no satisfà la propietat que enumera.*
>
> *En cas contrari, si satisfà la propietat que enumera, és no-richardià.*

---

[36]Cada nombre real $\mathbf{r} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ és de la forma $\mathbf{r} = \mathbf{0},\mathbf{a_1a_2}\ldots\mathbf{a_n}\ldots$, on no tots els a_n, a partir d'un lloc endavant, són $\mathbf{0}$. Genera un conjunt $\mathbb{N}_\mathbf{r} := \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_1a_2}, \ldots, \mathbf{a_1a_2}\ldots\mathbf{a_n}, \ldots\}$. L'aplicació és clarament injectiva. D'on: $[\mathbf{0},\mathbf{1}] \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. D'altra banda, per a cada subconjunt $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{N}$, definim un nombre real de la forma següent: Si $\mathbf{S} = \{\mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_k}, \ldots\}$, aleshores considerem el nombre real $\mathbf{r_S} = \mathbf{0}, \mathbf{x_1}\overset{\mathbf{x_1})}{\cdots}\mathbf{x_1}\mathbf{n_1}\mathbf{x_2}\overset{\mathbf{x_2})}{\cdots}\mathbf{x_2}\mathbf{n_2}\cdots\mathbf{x_k}\overset{\mathbf{x_k})}{\cdots}\mathbf{x_k}\mathbf{n_k}\cdots$, on $\mathbf{x_i}$ és el nombre de xifres de $\mathbf{n_i}$, per a $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$. Aquesta aplicació és injectiva.

[37]Vegeu [Ric05].

[38]De fet, només disposem d'un nombre finit de signes gramaticals per fer frases, i les frases acceptables són finites. En total, doncs, com a màxim, hi ha una quantitat numerable de frases que fan referència als nombres naturals.

Per exemple, si a la frase 'és un quadrat' li correspon el nombre **31**, com que **31** no és un quadrat, aleshores **31** és richardià. I, si a la frase 'és un triangular' li correspon el nombre **500 500**, resulta que no és richardià perquè **500 500** és triangular.

Així obtenim una propietat dels nombres naturals

És un nombre richardià

que, per tant, es troba a la llista de les propietats dels nombres enters positius i li correspon un nombre natural $\mathbf{r}$. La qüestió és:

Com és $\mathbf{r}$*, richardià o no-richardià?*

(1) Suposem que $\mathbf{r}$ és richardià, aleshores no pot satisfer la propietat que enumera —'ser richardià'.

Per tant,

(2) $\mathbf{r}$ no és richardià, però aleshores ha de satisfer la propietat —'ser richardià'— que enumera. Impossible!

Molta atenció!!! Aquest problema —de fet, és una paradoxa— no es resol pas com l'anterior. És encara més subtil. Està més en la línia de la paradoxa que produeixen expressions com ara 'Això no és una frase', o bé 'Aquest és el més petit nombre que es pot definir amb menys de quinze paraules'.

3.3.3. *«Ho veig, però no m'ho crec».* Ara disposem de les eines que calen per comprendre el problema que sorgí en la primera demostració de Cantor de l'equipotència entre els conjunts $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ i $[\mathbf{0},\mathbf{1}]\times[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

La idea de Cantor —ben simple— consisteix a establir una bijecció

$$\begin{aligned}\mathbf{h}:[\mathbf{0},\mathbf{1}]\times[\mathbf{0},\mathbf{1}] &\longrightarrow [\mathbf{0},\mathbf{1}]\\ \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle &\mapsto \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\end{aligned}$$

on $\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ s'obté intercalant les xifres decimals de la parella de nombres reals, $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, expressats en forma decimal.

Per exemple, a la parella

$$\mathbf{x} = \mathbf{0,1223334444\ldots} \text{ i } \mathbf{y} = \mathbf{0,03033033303333\ldots},$$

li correspon el real

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0,10232033333043434340\ldots}.$$

Ara bé, la qüestió és:

$$\text{És bijectiva l'aplicació de } \mathbf{h} : [\mathbf{0},\mathbf{1}] \times [\mathbf{0},\mathbf{1}] \longrightarrow [\mathbf{0},\mathbf{1}]?$$

Aquí entra en joc la unicitat de l'escriptura dels nombres reals en forma decimal infinita. Cal excloure els nombres que, a partir d'un lloc en endavant, només tenen zeros, com ara $\mathbf{0,78323\overset{\frown}{0}}$, i usar en canvi nombres en els quals la darrera xifra no nul·la té una unitat menys i la resta són nous, o sigui $\mathbf{0,78322\overset{\frown}{9}}$.[39]

S'obren, doncs, dues qüestions que val la pena plantejar-se i mirar de resoldre per nosaltres mateixos, un cop copsat l'objectiu a atényer i les dificultats que comporta.

18.– Per què no és bijectiva l'aplicació $\mathbf{h}$ anterior? Què falla quan, donat un valor $\mathbf{z} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$ volem determinar la parella $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \in [\mathbf{0},\mathbf{1}] \times [\mathbf{0},\mathbf{1}]$?

19.– Què podem fer per corregir l'error inicial de Cantor?[40]

3.4. **El problema dels nombres transcendents i la qüestió de l'existència en matemàtica.** L'insigne filòsof i matemàtic alemany G. W. Leibniz va classificar els nombres reals en dues categories noves: els nombres algèbrics i els nombres transcendents, als quals va donar aquest nom simplement «perquè transcendeixen l'àlgebra».

Els nombres algèbrics són aquells nombres reals que són solució d'un polinomi amb coeficients enters.

És a dir, formalment

---

[39] Com ja hem indicat a la pàgina 42, és una conseqüència de la convergència de les progressions geomètriques.

[40] Només cal evitar que els zeros es puguin agrupar, a partir d'un lloc en endevant.

Definició de nombre algèbric. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, diem que $\alpha \in \mathbb{R}$ és algèbric si, i només si, existeixen enters $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_{n-1}}, \mathbf{a_n}$ tals que $\mathbf{a_n} \neq 0$ i de manera que*

$$\mathbf{P}(\alpha) := \mathbf{a_n}\, \alpha^{\mathbf{n}} + \mathbf{a_{n-1}}\, \alpha^{\mathbf{n-1}} + \cdots + \mathbf{a_1}\, \alpha + \mathbf{a_0} = \mathbf{0}.$$

Si el polinomi $\mathbf{P}(\mathbf{X})$ és irreductible a $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$, diem que α és algèbric de grau **n**.

La resta de nombres reals són transcendents perquè, com dèiem, «transcendeixen l'àlgebra».

20.– És molt fàcil veure que hi ha nombres algèbrics. Tots els enters, tots els fraccionaris, les arrels, arrels dins d'arrels, etc.

Gottfried Wilhelm von Leibniz
Leipzig, 1 de juliol de 1646
Hannover, 14 de novembre de 1716

Però, en canvi, veure que hi ha nombres transcendents és força més difícil. Avui sabem, gràcies als teoremes de Charles Hermite [Dieuze (Lorraine, França), 24 de desembre de 1822–París, 14 de gener de 1901] i Ferdinand von Lindemann [Hannover (Hanover, Alemanya), 12 d'abril de 1852–Munic (Alemanya), 6 de març de 1939], de 1873 i 1882 respectivament:

Teoremes d'Hermite i de Lindemann. *Els nombres reals* **e** *i π són transcendents.*

Però no foren pas ells els primers a demostrar l'existència dels nombres transcendents.

Aquesta conquesta és obra de Joseph Liouville i de Georg Cantor i val la pena veure com ho van fer per demostrar-ho perquè els seus teoremes permeten una reflexió sobre l'existència en la matemàtica.

3.4.1. *El camí de Liouville: existència amb testimonis.* L'any 1844, Liouville va demostrar que els nombres de la forma

$$\ell := \mathbf{0,a_1a_2000a_3 00000000000000000 a_4 0} \cdots = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{10^{n!}}},$$

amb $\mathbf{a_n} \in \{\mathbf{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}\}$, no són transcendents perquè no satisfan el seu teorema d'aproximació.[41]

> **Teorema d'aproximació de Liouville.** *Si* $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$*, amb* $\mathbf{p}$ *i* $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}$*, és una aproximació d'un irracional algèbric* α *de grau* $\mathbf{d}$*, aleshores existeix un* $\mathbf{K} \geq \mathbf{1}$ *que* $\left|\alpha - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right| > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{K\,q^d}}$.

Aleshores, veient que els nombres anteriors ℓ no compleixen la desigualtat del teorema de Liouville, per a cap $\mathbf{d}$ i cap $\mathbf{K}$, sap automàticament que els nombres ℓ no són algèbrics per a cap grau $\mathbf{d}$ i, per tant, són transcendents, que és el que volia veure.

D'aquesta demostració en resulta, de retruc, que, de nombres transcendents, n'existeixen perquè almenys hi ha els que són com els nombres ℓ.

Heus ací, doncs, una manera d'establir l'existència d'un objecte matemàtic: mostrant-ne un de concret, o diversos —amb això ja n'hi ha prou. És a dir, proporcionant un testimoni de l'existència.

JOSEPH LIOUVILLE
Saint-Omer, 24 de març de 1809
París, 8 de setembre de 1882

3.4.2. *El camí de Cantor: existència sense testimonis.* Hi ha, però, una manera força més curiosa d'establir l'existència en matemàtica que no precisa de cap testimoni. En el cas dels nombres transcendents, la proporcionà Cantor.

[41] Vegeu [Vil85].

Ja hem vist que Cantor va introduir l'equivalència de conjunts i va veure que $\mathbb{N} \not\simeq \mathbb{R}$. Hi ha molts més nombres reals que naturals perquè $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. També hem vist que la reunió de dos conjunts numerables —és a dir, equipotents amb $\mathbb{N}$— és numerable. Això, de retruc, comporta que, si unim un conjunt numerable $\mathbb{M}$ amb un altre conjunt $\mathbb{P}$ de manera que $\mathbb{M} \cup \mathbb{P}$ sigui equipotent a $\mathbb{R}$, aleshores $\mathbb{P}$ és equipotent amb $\mathbb{R}$.

Ara bé, $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, on $\mathbb{A}$ és el conjunt dels nombres algèbrics i $\mathbb{T}$ el conjunt dels nombres transcendents.

Però,

Com n'és de gran el conjunt $\mathbb{A}$ dels nombres algèbrics?

La resposta és senzilla. Els polinomis amb coefiecients enters es poden numerar —és a dir, atribuir a cada un d'ells un nombre natural de forma que, a polinomis diferents, els corresponguin nombres diferents. Ara bé, cada polinomi té un nombre finit d'arrels reals. Per tant, $\mathbb{A} \simeq \mathbb{N}$.[42]

En conseqüència, $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}$.

En qualsevol cas, $\mathbb{T} \neq \emptyset$. Existeixen, doncs, nombres transcendents i, de fet, molts més que no pas d'algèbrics.

Però és una demostració d'existència conjuntista —n'hi ha un conjunt no buit— sense testimonis.

Fixem-nos com n'és de diferent de la de Liouville. Liouville diu: «aquest nombre és transcendent». Cantor, en canvi, diu: «n'hi ha molts de nombres transcendents —molts més que no pas de nombres naturals— però no sé com és cap d'ells».[43]

---

[42]Vegeu, per exemple, [Bur89, pàgines 603–605].

[43]L'existència, en matemàtica, és realment una qüestió digne d'anàlisi i estudi perquè és una mena d'existència en la qual pot esdevenir que no sigui possible —almenys de moment— saber quin és el testimoni. Un exemple realment interessant és el següent:

Teorema. *Existeix un nombre racional que s'obté elevant un irracional a un irracional.*

Demostració. Considerem el nombre $y := \sqrt{\mathbf{2}}^{\sqrt{2}}$. Poden passar dues coses:

(1) y és racional, i aleshores ja hem acabat. O bé,

21.– Dóna d'altres exemples d'existència matemàtica amb testimonis.

22.– Dóna d'altres exemples d'existència matemàtica sense testimonis.

23.– Com és possible enumerar els polinomis amb coeficients enters? I la unió d'una família numerable de conjunts finits és numerable?

24.– Quants nombres transcendents concrets sabem?

3.5. **El concepte de continuïtat i la propietat D.** Una qüestió vinculada a la continuïtat de les funcions reals de variable real és la continuïtat.

De nano, creia que la continuïtat estava lligada al moviment i que, per tant, era un concepte que depenia d'un interval de temps.

Aleshores pensava concretament que una paret —que creix de rajola amb rajola— creix de forma discontínua; un arbre, en canvi —que creix passant per tots els valors intermedis—, creix de forma contínua i per passar d'**1** m a **2** m ha de passar necessàriament per tots els valors del mig. I em samblava natural que aquesta fos la característica definitòria de funció contínua.

3.5.1. *El concepte de continuïtat segons Cauchy-Weierstrass.* En arribar a la Facultat de matemàtiques em varen donar la definició de Cauchy-Weierstrass de funció contínua.

Curiosament, i en contra de les meves intuïcions infantils, era una definició puntual. És a dir, establia quan una funció és contínua en un punt $\mathbf{x_0}$.

Així es perdia el que jo havia entès sempre com a essencial de la continuïtat, que és el que els matemàtics coneixem amb el nom de propietat D de Darboux que diu:

(2) γ és irracional. Aleshores $\gamma^{\sqrt{2}} = 2$ és racional.

Queda, doncs, establerta l'existència d'un irracional que elevat a un irracional dóna un racional. Però, atès que, ara per ara, no sabem si γ és racional o irracional, no podem saber si el testimoni de l'existència que desitgem establir és γ o $\gamma^{\sqrt{2}}$. És, doncs, una existència que depèn del fet que la nostra lògica és binària i que deixaria de tenir sentit si no fos binària.

Propietat D. *Una funció real de variable real* $\mathbf{f}$*, definida en un interval* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *de* $\mathbb{R}$*, satisfà la propietat D quan, cada cop que passa per dos punts* $\alpha, \beta \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *de la recta real, passa per tots els valors* γ *de l'entremig, és a dir, tals que* $\alpha < \gamma < \beta$.

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS
Ostenfelde (Westfàlia, ara Alemanya), 31 d'octubre de 1815
Berlín (Alemanya), 19 de febrer de 1897

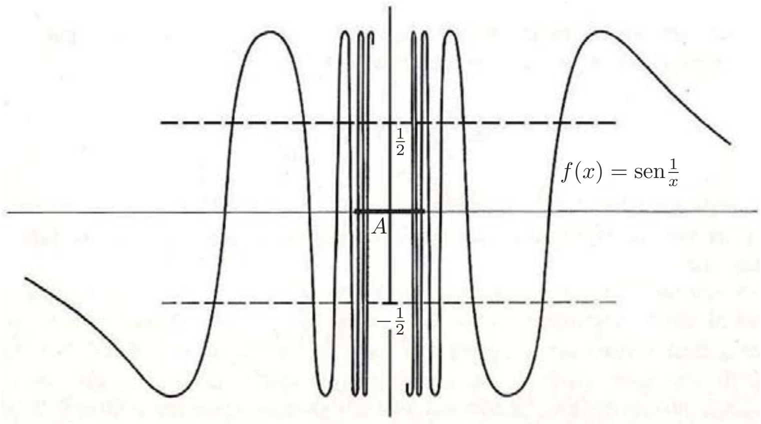
-LOUIS CAUCHY
Nimes (França), 14 d'agost de 1842
París (França), 23 de febrer de 1917

3.5.2. *La propietat D de Darboux: un exemple senzill.* Tanmateix, aquesta propietat, si bé és certa per a tota funció real de variable real contínua en un interval $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ de $\mathbb{R}$, no implica pas la continuïtat de la funció en cada un dels punts de l'interval.

Un exemple prou senzill que posa de manifest una funció que, cada cop que passa per dos punts α, β de l'interval $[-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]$ de manera que $\mathbf{0} \in [\alpha, \beta]$, passa per tots, i cada un, dels punts intermitjos. Això no obstant, la funció no és contínua en el punt $\mathbf{0}$.

És la corba

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sin\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}, & \text{per a } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \alpha, & \text{on } \alpha \in (-\mathbf{1}, +\mathbf{1}), \text{ arbitrari.} \end{cases}$$



3.5.3. *Un resultat matemàtic molt poc intuïtiu.* Veiem ara una darrera qüestió lligada amb la propietat D de Darboux que lliga aquest fet —propietat D versus continuïtat— amb l'expressió decimal dels nombres reals que és el protagonista del nostre conte.

De fet, la propietat D de Darboux està a anys llum de la continuïtat perquè —és un fet que quan el vaig descobrir em va sorprendre moltíssim— una funció pot satisfer la propietat D en un cert interval i no ser contínua en cap dels seus punts.

La demostració entra de ple en el domini de la metodologia matemàtica.

Tot rau a construir una funció adequada.[44]

Per fer-ho, Darboux es va basar en dos fets que ja hem trobat abans, però jugant amb ells amb una gran habilitat.

[44] Vegeu [Dar75].

1. Tot nombre real, en l'expressió decimal, consta d'una quantitat numerable [infinita] de xifres decimals i podem considerar les que ocupen el lloc parell i el lloc senar.[45]
2. Les xifres que ocupen el lloc senar poden generar un nombre decimal periòdic, o no.

JEAN GASTON DARBOUX
París (França), 21 d'agost de 1789
Sceaux (França), 23 de maig de 1857

Veiem, com si fos un exercici, els passos de la demostració del teorema de Darboux:

Teorema de Darboux. *Hi ha funcions reals de variable real* $\mathbf{f}$ *que satisfan la propietat D en un interval de la recta real i són discontínues en tots i cada un dels punts de l'interval.*

Esbós de la demostració. Sigui

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdots \mathbf{a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1}} \cdots \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}],$$

expressat en el sistema decimal i considerem el nombre

$$\mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{a_1 a_3} \cdots \mathbf{a_{2n-1} a_{2n+1}} \cdots,$$

generat per les xifres de lloc senar.

Definim la funció

$$\varphi : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}],$$

per casos:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } \mathbf{z} \text{ no és periòdic,} \\ \mathbf{0}, \mathbf{a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4}} \cdots, & \text{si } \mathbf{z} \text{ és periòdic i el període comença a } \mathbf{a_{2n-1}}. \end{cases}$$

Ara, amb paciència, cal que demostrem:

[45] Recordem que els nombres decimals exactes ho són si acceptem el zero a partir d'un lloc en endavant, però ho hem refusat i ens hem quedat amb els nous. Així, com ja hem indicat a la pàgina 53, $\mathbf{0}, \mathbf{20}\ldots\mathbf{0}\ldots$ s'escriu, de fet, $\mathbf{0}, \mathbf{19}\ldots\mathbf{9}\ldots$.

1. La corba $\varphi(\mathbf{x})$ passa per a tots els punts intermedis de tot interval de $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, per petit que sigui [part delicada].
2. És discontínua en tots els punts de l'interval $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ [part fàcil, per construcció, basant-nos en una propietat que hem vist abans i una altra que no hem esmentat; la densitat de $\mathbb{Q}$ dins $\mathbb{R}$].

3.6. **Són útils les expressions decimals de certs nombres per obtenir nombres a l'atzar?** Ens podem preguntar, finalment, seguint Emile Borel si hi ha nombres normals i/o completament normals en base deu.

La idea, simplificant, és la següent:

> *Els dígits* **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** *es troben distribuïts de forma aleatòria amb la mateixa probabilitat? És a dir, la distrubició dels dígits dels decimals és uniforme?*
>
> *O encara, qualsevol expressió numèrica formada amb els dígits es troba infinites vegades en l'expressió decimal del nombre i totes estan distribuïdes aleatòriament amb la mateixa probabilitat?*

Per simplificar i aclarir la idea subjacent, si juguéssim amb un dau de deu cares, en lloc d'usar el dau corrent de sis, podríem usar, com a resultats aleatoris del dau, les xifres del nombre $\mathbf{e}$? I les del nombre π?

És clar que aquest concepte depén de la base triada, com podem veure si considerem el nombre racional $\frac{3}{4}$ i l'expressem en base $\mathbf{2}$ o en base $\mathbf{10}$.

En base $\mathbf{2}$, tenim:

$$\tfrac{3}{4} := \mathbf{0},\mathbf{1010}\ldots\mathbf{10}\ldots_{(2} = \mathbf{0},\overset{\frown}{\mathbf{10}}_{(2},$$

on, òbviament, el dígits possibles —ara només són dos, el **0** i el **1**— estan igualment distribuïts.

En canvi, en base $\mathbf{10}$, tenim:

$$\tfrac{3}{4} := \mathbf{0},\mathbf{75} = \mathbf{0},\mathbf{74}\overset{\frown}{\mathbf{9}},$$

on clarament les deu xifres possibles no estan pas igualment distribuïdes.

FÉLIX EDOUARD JUSTIN EMILE BOREL
Saint Affrique (Aveyron, França),
7 de gener de1871
París (França), 3 de febrer de 1956

Definició de nombre normal. *Sigui* $\mathbf{b} > \mathbf{1}$ *un nombre enter i* $\mathbf{r}$ *un nombre real. Considerem la sucessió de xifres del nombre* $\mathbf{r}$ *en la base de numeració* $\mathbf{b}$*. Si* $\mathbf{s}$ *és una successió finita de xifres en base* $\mathbf{b}$*, escriurem* $\mathbf{N}(\mathbf{s},\mathbf{n})$ *per expressar el nombre d'aparicions de la successió* $\mathbf{s}$ *entre les* $\mathbf{n}$ *primeres xifres de* $\mathbf{s}$.

El nombre $\mathbf{r}$ *és normal en base* $\mathbf{b}$*, si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s},\mathbf{n})}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}^{\mathbf{k}}},$$

per a cada sucessió $\mathbf{s}$*, on* $\mathbf{k}$ *n'indica la longitud.*

El nombre $\mathbf{r}$ *és un nombre normal,*[46] *si és normal en cualsevol base* $\mathbf{b}$.

Matemàticament, doncs, un nombre normal es un nombre real les xifres del qual en qualevol base estan distribuïdes d'acord amb una distribució uniforme, essent totes les xifres igualment probables. Expressat en paraules, un nombre normal té la propietat —que el caracteritza— següent: la probabilitat de trobar la sucessió $\mathbf{s}$ entre les xifres de $\mathbf{r}$ és la que caldria esperar si la sucessió de xifres s'hagués produït de forma completament aleatòria.

Algunes qüestions senzilles que podem plantejar i resoldre són:

25.– Tot nombre normal necessàriament és irracional.
26.– No tot nombre irracional és normal. N'hem vist un. És a dir, ja hem trobat un testimoni d'aquest fet. Quin?

[46] Hi ha autors que, en aquest cas, l'anomenen absolutament normal i reserven el nom de nombre normal quan la successió de xifres es limita a un dígit.

D'altres qüestions són molt més complexes:[47]

A.– El nombre de Champernowne, **0,12345678910111213141516**..., el desenvolupament decimal del qual està constituït per la concatenació de tots els nombres naturals ordenats, és normal en base **10**, però podria no ser-ho en d'altres bases.

B.– La constant de Copeland-Erdös, **0,23571113171923293137 41**..., el desenvolupament decimal de la qual està constituït per tots els nombres primers, expressats en base de **10** també és normal en base **10**, però podria no ser-ho en d'altres bases.

C.– Com ja he indicat, el concepte l'introduí el matemàtic francès Emile Borel el 1909, però anà més lluny. Va demostrar, usant el lema de Borel-Cantelli, el teorema de Borel dels nombres normals:

> **Teorema de Borel dels nombres normals**. *Gairebé tots els nombres reals són normals, en el sentit que el conjunt de nombres reals no-normales té una mesura de Lebesgue igual a zero.*[48]

Aquest teorema estableix, novament, l'existència d'una col·lecció de nombres reals —els nombres normals— que no és constructiva, com la de Cantor per als transcendents.

D.– El paper de Liouville, en aquest afer, el va jugar Wacław Sierpiński [Varsòvia (Imperi rus, avui Polònia), 14 de març de 1882–Varsòvia (Imperi rus, avui Polònia), 21 d'octubre de 1969]. L'any 1917, construí explícitament un nombre normal i fou el primer nombre normal conegut.

E.– Sense entrar en més detalls, un nombre normal calculable fou construït por Verònica Becher i Santiago Figueira. En canvi, la constant de Chaitin, Ω, és l'exemple d'un nombre normal no-calculable.

---

[47] Vegeu, per exemple, http://en.wikipedia.org/wiki/Normal_number.

[48] Vegeu [Bor09]. Tanmateix, malgrat la petitesa, o migradesa, que suposa el fet que tingui mesura de Lebesgue nul·la, és gran perquè no és pas numerable.

Un text sobre la probabilitat d'una gran qualitat expositiva —un clàssic de divulgació del pensament matemàtic— és [Bor15].

Breument, podem dir que un nombre real és calculable quan hi ha una màquina de Turing que el calcula i no calculable, altrament.

Apareix novament, perquè ja ha aparegut abans, aquest fet tan característic i peculiar de la matemàtica —que anomeno «els corrents subterranis de la matemàtica»— que fa que camps de la matemàtica que sembla que no tenen res a veure entre si —i que curricularment es presenten massa vegades com a independents— estiguin lligats.

La constant de Chaitin, Ω, és la probabilitat que un programa elegit a l'atzar aturi una màquina de Turing $\mathcal{T}$ determinada. Ho podríem fer una mica més entenedor així:

Sigui P el conjunt de tots els programes que aturen la màquina $\mathcal{T}$ i sigui $|\mathbf{p}|$ la mida, en bits, d'un programa a $\mathbf{p}$. Aleshores:

$$\Omega = \sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}} \mathbf{2}^{-|\mathbf{p}|}. \tag{3.1}$$

Com acabem de dir, aquest nombre no és computable i, per tant, no li podem calcular totes les xifres però, en base $\mathbf{10}$, en coneixem les primeres: $\mathbf{0,0078749969978123844}\ldots$.

E.– Una de les caracetrítiques de la idea de nombre normal és l'enorme dificultat per saber —en això s'assemblen als nombres transcendents— si un nombre real concret és o no és normal. Per exemple, desconeixem què passa amb $\sqrt{\mathbf{2}}$, $\ln\mathbf{2}$, $\mathbf{e}$, π. La creença és que tots ells ho són, de normals, però fins ara no s'ha pogut ni provar ni desmentir.

Pel que fa al primer, $\sqrt{\mathbf{2}}$, un nombre aparentment tan simple —dels més simples dins dels nombres irracionals— es disposa d'una conjectura més general que el conté com a cas particular:

Tots els nombres irracionals algèbrics són normals.

3.7. **De l'existència de conjunts que no són mesurables de Lebesgue.** Atès que ha aparegut la mesura de Lebesgue i l'existència de conjunts no-numerables que tenen mesura de Lebesgue nul·la, ho aprofitaré per dir que hi ha certs resultats relatius als nombres reals que no precisen del fet d'haver de recórrer, en la demostració, a la seva expressió decimal —o en qualsevol altra base.

Així, per exemple, l'any 1905 Giuseppe Vitali establí el famós teorema de Vitali [1905] que, a començaments del segle XX, provocà tant d'enrenou entre els analistes francesos i l'acceptació de l'axioma de l'elecció [**A.C.**]:[49]

> **Teorema de Vitali**. *Hi ha subconjunts de la recta real que* ***no*** *són mesurables de Lebesgue.*[50]

Esbós de la demostració. És un teorema que comença per classificar els nombres reals de l'interval $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ en classes, d'acord amb la relació d'equivalència:

> *Dos nombres reals de* $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ *són equivalents si difereixen d'un nombre racional. O sigui, si* $\mathbf{r_1},\mathbf{r_2} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$,
>
> $$\mathbf{r_1} \sim \mathbf{r_2} \textit{ si, i només si, } \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} \in \mathbb{Q}.$$

Aleshores, usant l'**A.C.**, agafem un representant de cada classe i obtenim un conjunt $\mathcal{M}$. El conjunt $\mathcal{M}$ no és mesurable de Lebesgue.

No entraré en més detalls. Només m'hi he referit per veure un teorema metodològic —molt important històricament— que no precisa de l'expressió decimal dels nombres reals per a ser demostrat. Per reflexionar una mica, vegeu:

27.– Les primeres xifres de la constant de Chaitin (3.1) són les consignades a la darrera línia de D.

28.– La relació $\mathbf{r_1} \sim \mathbf{r_2}$ si, i només si, $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} \in \mathbb{Q}$ és d'equivalència. Com queden caracteritzades les classes d'equivalència?

GIUSEPPE VITALI
Ravena (Itàlia), 26 d'agost de 1875
Bolonya (Itàlia), 29 de febrer de 1932

---

[49] Vegeu, per exemple, [Moo82, pàgines 311–320].

[50] Vegeu [Vit05, pàgines 3–5].

29.. Tot recordant les propietats de la mesura de Lebesgue veure que el conjunt $\mathcal{M}$ té alhora una mesura ≥ 1 i una mesura nul·la. Contradicció! Per tant, no és mesurable de Lebesgue.[51]

4. Reflexió final i bibliografia

Amb aquestes paraules, i amb el conte, he pretès posar de manifest el que entenc que ha de ser l'acte formatiu global. Ho he volgut fer com una reflexió que crec que correspon a qui ha estat distingit com a *Magíster honoris causa*, perquè, amb la distinció, se li atribueix una qualitat docent que és garantia del que dirà.

Ben certament, hauria pogut recórrer a d'altres protagonistes —el concepte de funció, què hem d'entendre com a geometria?, les equacions algèbriques i la seva resolubilitat, la computabilitat teòrica: possibilitats i limitacions, la probabilitat: problemes, límits i potencialitats, etc.

Però l'exemple que he triat ho ha estat per la seva versatilitat i simplicitat —tothom el pot entendre i extreure'n alguna a cosa— i alhora perquè la complexitat que contenen les parts més complexes són fàcils d'exposar i fàcils de comprendre en una primera aproximació.

A tots els qui estiguin interessats en aquesta mena de plantejaments de l'evolució conceptual de la matemàtica i el seu lligam amb el procés docent a través de la història i els seus contextos —és a dir, aquells que considerin que les opinions que he exposat i que he sintetitzat en el conte són correctes, suggerents i obren camins per a l'ensenyament— pot recórrer a textos molt acurats com ara [Toe63], [Sti78], [Xam83], [LP00], i [KLP07].

Vull acabar —i així ho fet durant el conte— afirmant que, en l'estudi de la matemàtica, cal sempre pensar, o repensar, pel nostre compte qüestions simples, vinculades a les qüestions que el conte suggereix. Són els problemes que queden a la vora del camí, però que no podem deixar passar sense dedicar-hi tota l'atenció. Perquè, com per a un conductor, són els senyals que el permeten d'avançar d'acord amb les regles i

[51] El lector interessat pot consultar, per exemple, [Pla91, pàgines 367–368].

limitacions del camí i seguir, en cada moment, la direcció adequada per arribar de la forma més segura al destí: la comprensió cabal i completa d'allò que estem estudiant i que, en algun moment, haurem d'ensenyar o que ens servirà de guia per ensenyar d'altres conceptes i moure'ns amb correcció en d'altres situacions.

I per acabar vull fer una reflexió sobre un fet molt important i molt oblidat. Cal recórrer als textos originals que, al cap i a la fi, són els ensenyaments del nostres mestres, dels nostres clàssics, dels nostres prohoms. Qui millor que ells està capacitat per transmetre les idees que han creat amb la seva 'capacitat creadora', una capacitat que ha fet —i fa— que la matemàtica sigui allò que és, i que ho sigui tal com és i no d'una altra manera. Per aquesta raò he introduït alguns textos clàssics i originals en la bibliografia, quelcom que hom pot pensar que va més enllà del to informal de l'exposició. Però jo no ho veig pas així.

Espero no haver abusat de la vostra paciència.

Moltes gràcies a tots per la vostra atenció.

Referències

[All92] André Allard, *Le calcul indien (algorismus)*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1992.

[Bor09] Emile Borel, "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **27** (1909), pàgines 247–271, *Opera Omnia*, II, 393–400. Traducció anglesa parcial a [**?**, pàgines 436–439].

[Bor15] ______, *Le hasard*, Félix Alcan, París, 1915, Hi ha una traducció castellana de Werner Schiller, *El Azar*. Editorial la Pleyade, Buenos Aires, 1986.

[Bur89] David M. Burton, *The History of Mathematics. An Introduction*, The McGraw-Hill Companies, Inc, Nova York, 1989, Reeditat profusament, en 1991, 1995, 1997, 2003, i 2007.

[Can78] Georg Cantor, "Eine Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal für die reine und angew. Math.* **84** (1878), pàgines 242–258.

[Can91] ______, "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **1** (1891), pàgines 75–78.

[Dar75] Gaston Darboux, "Memoire sur les fonctions discontinuea", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **4** (1875), pàgines 161–248.

[Gal38] Galileo Galilei, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Editora Nacional, Madrid, 1638, Edición preparada por C. Solis y J. Sádaba.

[KLP07] Arthur Knoebel, Reinhard Laubenbacher, and David Pengelley, *Mathematical Masterpieces. Further Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, Nova York, 2007.

[LP00] Reinhard Laubenbacher and David Pengelley, *Mathematical Expositions. Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, Nova York, 2000.

[Moo82] Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its origins, Development and Influence*, Springer-Verlag, Nova York, 1982.

[Pla91] Josep Pla, *Lliçons de Lògica matemàtica*, PPU, Barcelona, 1991.

[Ric05] Jules Richard, "Lettre a Monsieur le rédacteur de la Revue générale des Sciences", *Acta Mathematic* **30** (1905), 295–296.

[San82] Francesc SantCliment, *La Suma de la Art de Arismètica*, Pere Posa, Barcelona, 1482.

[Sig02] Laurence Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer-Verlag, Nova York, 2002, Es tracta de la traducció anglesa del *Liber Abaci* feta per Sigler.

[Sti78] John Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, Berlín, 1978.

[Str69] Dirk J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge. Massachusetts, 1969.

[Toe63] Otto Toeplitz, *The calculus. a genetic approach*, The University of Chicago Press, Chicago, 1963.

[Vil85] Núria Vila, "Liouville i els nombres transcendents", *Butlletí de la Societat Catalana de matemàtiques* **18** (1985), 32–43.

[Vit05] Giuseppe Vitali, *Su problema della misure dei gruppi di punti di una retta*, Tipografia Gamberini e Parmeggiani, Bolonya, 1905.

[Xam83] Sebastià Xambó, "Geometria no euclidiana: d'Euclides a Gauss", *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques* **14** (1983), 64–97.

Fotografies de l'acte MHC

Les fotografies del revers de la portada i de la contraportada corresponen, respectivament, al lliurament del Diploma de *Magister Honoris Causa* i del pin de plata de l'FME.

1. Mesa: José Luis Andrés Yebra, Sebastià Xambó, Josep Pla i Eduard Recasens

2. Josep Pla impartint la conferència

3. Coral de l'FME interpretant *Good News*

De davant cap enrera i d'esquerra a dreta:

Sara Martín (directora)

Georgina Mosquera, Ariadna Fossas, Abel Gargallo, Xavier Alameda

Núria Almirall, Teresa Marimón, Imma Tur,
Miquel Camprodon, Xavier Pujol, Àlex Escala, Joan Martín.


Josep Pla
Eduard Recasens


osament i a reflexionar-hi en profunditat.


MÀTIQUES
ADÍSTICA

Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA