Ramanujan i l'infinit: de les particions a la funció tau

Pilar Bayer Isant

catedràtica emèrita d'àlgebra, UB

•

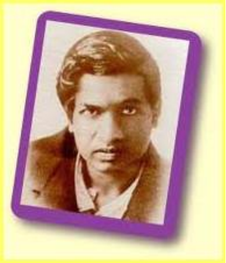
ACTE INICI CURS FME 2024-2025

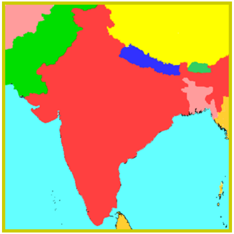
♯CursRamanujanFME

2024-10-16

Contingut

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920)

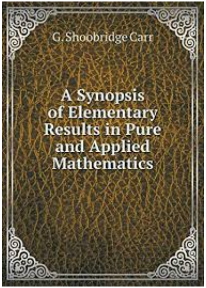




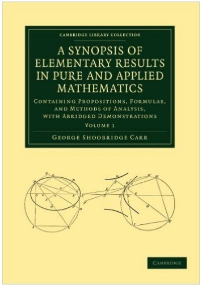
1887 Erode, Índia
1888 Kumbhakonam
1912 Madràs
1914-1919 Cambridge, Anglaterra
1919-1920 Madràs

1910: Fundació de la *Indian Mathematical Society* (IMS)

Els inicis



Carr, 1886



Carr, 2013

Deessa de Namakkal

G. Carr: *A synopsis of elementary results in pure and applied mathematics*. C.F. Hodson, 1880 (1292 apartats, 6165 resultats).

La carta de Ramanujan a Hardy (16.01.1913)

Benvolgut senyor,

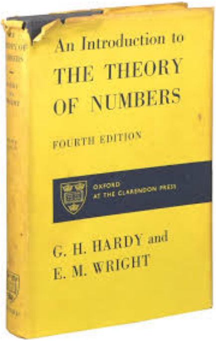
Em permeto presentar-me a vostè com a empleat del Departament de Comptes de l'oficina del Port Comercial de Madràs, amb un sou de només 20 rupies anuals. Ara tinc uns 23 anys. No he tingut educació universitària, però he seguit els estudis escolars ordinaris. Després de deixar l'escola, he utilitzat el temps lliure per treballar en matemàtiques. No he seguit el camí convencional dels estudis universitaris, sinó que estic seguint un camí nou, a càrrec meu [...].

Li demanaria que revisés els documents adjunts. Com que soc pobre, si vostè considera que hi ha alguna cosa de valor, m'agradaria que els meus teoremes fossin publicats. No he inclòs les investigacions concretes ni les expressions que obtinc, però he indicat les línies seguides. Com que soc inexpert, valoraria molt qualsevol consell que em pogués donar. Li demano disculpes per les molèsties que li pugui causar.

Resto a la seva disposició, benvolgut senyor. Atentament,

S. Ramanujan

Godfrey Harold Hardy (1877-1947)



Primera edició: 1938

Els veritables punts de partida de la meva carrera es varen presentar el 1911, en iniciar la meva llarga col·laboració amb Littlewood i, el 1913, quan vaig descobrir Ramanujan.

Ramanujan vist per Hardy

M'he proposat realitzar una tasca realment difícil, fins i tot impossible [...] formar una mena de valoració raonada de la figura més romàntica en la història recent de les matemàtiques [...].

Era un home sociable, amb qui es podia prendre el te i discutir de política o de matemàtiques. Era un ésser humà normal que, per casualitat, era un gran matemàtic.

Què calia fer per ensenyar-li les matemàtiques actuals? Les limitacions del seu coneixement eren tan sorprenents com la seva profunditat.

Ramanujan i els nombres primers

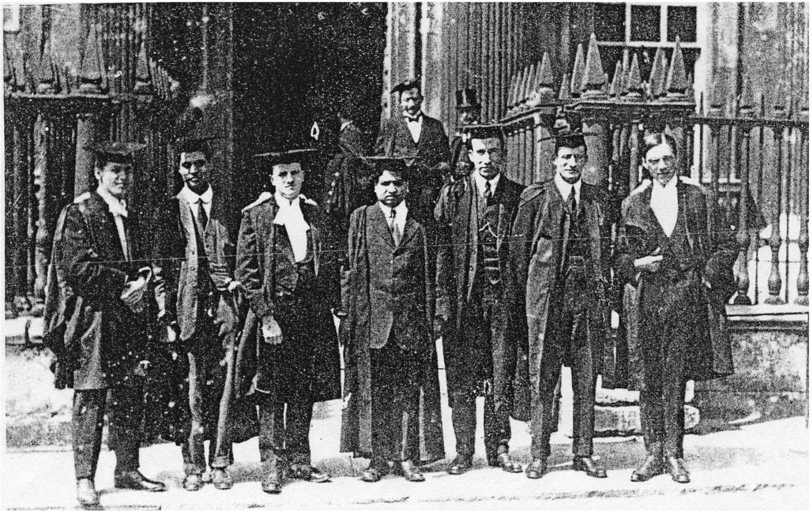
> *La teoria dels nombres primers de Ramanujan es va veure afectada per la seva ignorància de la teoria de funcions de variable complexa. Era (per dir-ho d'alguna manera) el que la teoria podria ser si la funció zeta no tingués zeros complexos [...]. Era d'esperar que les seves demostracions fossin errònies. Però els errors anaven més enllà, i molts dels resultats obtinguts eren falsos.*

G. H. Hardy

G. H. Hardy. *Ramanujan: twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Chelsea, New York, 1959.

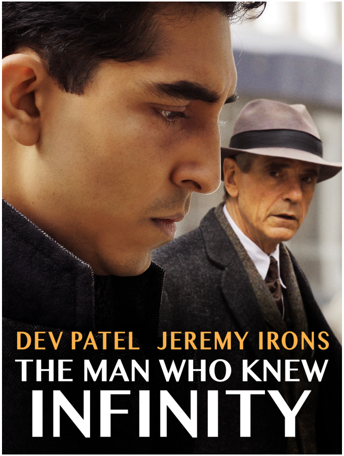
G. H. Hardy. *A mathematician's apology*, reprint of the 1967 edition. Canto, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

Casa del Senat de la Universitat de Cambridge, 1916



Highly Composite Numbers (1915), On Certain Arithmetical Functions (1916), On the Expression of a Number as a Sum of Squares (1916).

The man who knew infinity (2015)



Director i guionista: Matthew Brown

Autor del llibre: Robert Kanigel

Protagonistes:

Dev Patel, Srinivasa Ramanujan

Jeremy Irons, G. H. Hardy

Toby Jones, J. E. Littlewood

Jeremy Northam, Bertrand Russell

Kevin McNally, Major MacMahon

Coproductors:

Ken Ono, Manjul Bhargava

Assessor matemàtic: Ken Ono


MovieStillsDB.com

Integrals el·líptiques

$$f(x) = \int_c^x R\left(t, \sqrt{P(t)}\right)\,dt$$ Fagnano, Euler, Gauss, Legendre, Jacobi

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 k^{2n} = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2\right) \\ &= \tfrac{\pi}{2}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4\cdots+\left[\tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}+\cdots\right\}\end{aligned}$$

Sèrie hipergeomètrica de Gauss: $${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

Símbol de Pochhammer: $$(q)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n=0 \\ q(q+1)\cdots(q+n-1), & \text{si } n>0 \end{cases}$$

Nombres primers

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \dots\}$$

- *Elements* d'Euclides (325-265 aC), $\mathrm{EIX20}$:

Hi ha més nombres primers que qualsevol quantitat [finita] d'ells.

- Garbell d'Eratòstenes (276-194 aC):

Si $n > 1$ no és primer, aleshores existeix un nombre primer p tal que $p \,|\, n$ i $p \leqslant \sqrt{n}$.

- El primer més gran trobat fins ara:

$$M = 2^{82\,589\,933} - 1$$

24 862 048 dígits, GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search)

Infinitud del conjunt dels nombres primers

Demostració d'Euler

Suposem que el conjunt dels nombres primers fos finit:
$P = \{p_1, \cdots, p_N\}$.

Considerem el producte

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\cdots\right).$$

Es tindria que

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Però el terme de l'esquerra representa una quantitat finita i el de la dreta, una infinita; la qual cosa és absurda.

La funció $\pi(x) := \sum_{p \leqslant x} 1$

$$
\begin{aligned}
\pi(10^2) &= 25 \\
\pi(10^3) &= 168 \\
\pi(10^4) &= 1\,229 \\
\pi(10^5) &= 9\,592 \\
\pi(10^6) &= 74\,498 \\
\pi(10^8) &= 5\,761\,455 \\
\pi(10^9) &= 50\,847\,534 \\
\pi(10^{22}) &= 201\,467\,286\,689\,315\,906\,290
\end{aligned}
$$

- En el DNIe las claus són de 2048 bits; nombres primers d'aproximadament 617 xifres decimals, atès que $d = b \log_{10} 2$.

Comportament de $\pi(x)$

Legendre (1752-1833): $\pi(x) \overset{(?)}{\sim} \dfrac{x}{\log x - B}, \quad x \to \infty$

Essai sur la théorie des nombres, 1785

Gauss (1777-1855): $\pi(x) \overset{(?)}{\sim} \mathrm{Li}(x), \quad x \to \infty$

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\log u} = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2); \quad \mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$\boxed{\pi(x) \overset{(?)}{\sim} \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty \quad (\mathrm{TNP})}$$

La funció ζ de Riemann

- $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\, x^{s-1}\, dx,\ s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$
- $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ s'estén a una funció analítica de $\mathbb{C}$.

$$\widehat{\zeta}(s) := \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

- Equació funcional:

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s), \quad \text{per a tot } s \in \mathbb{C}$$

$0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$ franja crítica, $\quad \Re(s) = \frac{1}{2}$ recta crítica

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \pm i\,14.13, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \pm i\,21.02, \quad \rho_3 = \frac{1}{2} \pm i\,25.01, \quad \rho_4 = \frac{1}{2} \pm i\,30.42, \ldots$$

(∗) $\zeta(s)$ posseeix infinits zeros a la franja crítica: $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$.

(∗) $N(T) := \sharp\{\rho : \zeta(\rho) = 0,\ 0 < \Im(\rho) \leqslant T\} \sim \dfrac{T}{2\pi} \log\left(\dfrac{T}{2\pi e}\right)$

(∗) Hipòtesi de Riemann

$$\boxed{\zeta(\rho) = 0, \quad 0 \leqslant \Re(\rho) \leqslant 1 \quad \overset{(?)}{\Rightarrow} \quad \Re(\rho) = \frac{1}{2}}$$

(∗) Fórmula del producte:

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad s \in \mathbb{C},$$

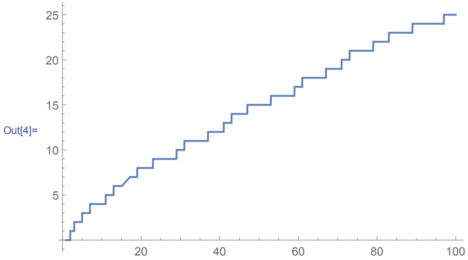
on $\rho \in \mathbb{C}$ recorre els zeros de $\zeta(s)$ en la franja crítica.

$\pi(x)$ i els zeros de la funció zeta

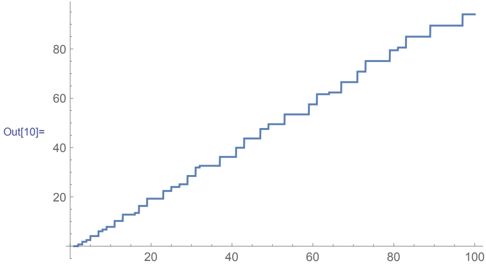
$$\boxed{\pi(x) - \sum_{n\geqslant 1}^{N} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{Li}(x^{1/n}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{\rho} \operatorname{Li}(x^{\rho/n}) + O(1)}$$

- Termes que no creixen quan x creix.
- Termes que creixen quan x creix.
- Termes que creixen en valor absolut quan x creix, però que oscil·len en signe.

La funció ψ de Čebišev



$\pi(x) := \sum_{p \leqslant x} 1$



$$\psi(x) := \sum_{p^m \leqslant x} \log p$$

Primers avenços

Riemann-Hadamard, 1892:

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \quad \zeta(\rho) = 0, \Im(\rho) > 0$$

Riemann-von Mangoldt, 1894:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + O(\log T)$$

$$\boxed{\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \log(2\pi), \quad x > 1}$$

on ρ descriu els zeros de $\zeta(s)$ a la franja crítica i el sumatori és en l'ordre creixent de $|\Im(\rho)|$.

1896: El teorema dels nombres primers

Jacques Hadamard
(1865-1963)

Charles de la Vallée-Poussin
(1866-1962)

TNP

Hadamard, de la Vallée-Poussin, 1896:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty, \text{ equivalentment: } \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Mètode: Estimació dels termes oscil·latoris i prova del fet que

$$\boxed{\zeta(1+it) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}}$$

$$|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| = O(xe^{-\sqrt{c\log(x)}})$$

•

$$(\mathrm{HR}) \quad \Leftrightarrow \quad |\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| = O(x^{1/2}\log x)$$

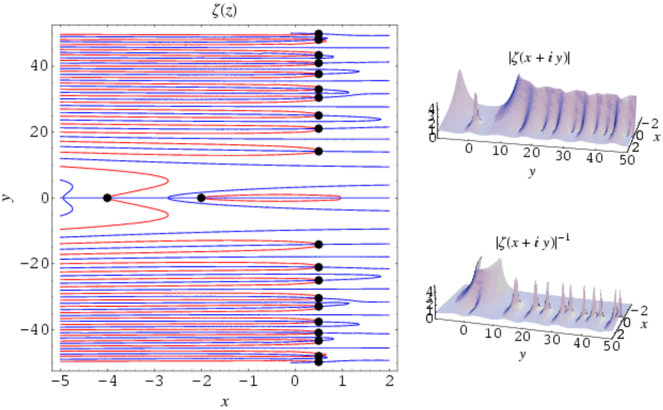
100 anys del TNP

$$
\begin{array}{ccc}
\phi(s) := \displaystyle\sum_{p} \frac{\log p}{p^s},\ \Re(s) > 1; & \zeta(s) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ \Re(s) > 1; & \vartheta(x) := \displaystyle\sum_{p \leqslant x} \log p \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\phi(s),\ \text{hol.}\, \Re(s) > 1; & \zeta(s) - \dfrac{1}{s-1},\ \text{hol.}\, \Re(s) > 1; & \vartheta(x) = O(x) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
\phi(s),\ \text{mer.}\, \Re(s) > \frac{1}{2} & \longleftarrow \longleftarrow & \\
\downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow \longrightarrow & \zeta(1+it) \neq 0,\ t \in \mathbb{R} & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
g = \dfrac{\phi(z+1)}{z+1} - \dfrac{1}{z},\ \text{hol.}\, \Re(z) \geqslant 0 & \longleftarrow \longleftarrow & f = \dfrac{\vartheta(e^t)}{e^t} - 1 = O(1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\longrightarrow \longrightarrow & g(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt & \longleftarrow \longleftarrow \\
 & \downarrow & \\
 & \displaystyle\int_1^\infty \frac{\vartheta(x) - x}{x^2}\, dx < \infty & \\
 & \downarrow & \\
 & \vartheta(x) \sim x & \\
 & \downarrow & \\
 & \pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x} &
\end{array}
$$

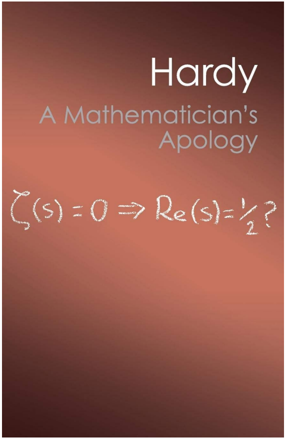
Contribucions de Hardy i de Hardy-Littlewood

Hardy, 1914: $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ té infinits zeros reals.

Hardy & Littlewood, 1942: $N(T) \geqslant KT\log(T), \quad K>0,\ T \gg 0$

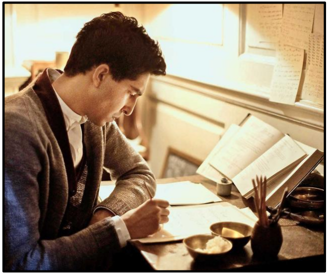


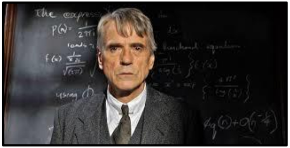
La hipòtesi de Riemann, un problema obert



Ara per ara, s'han trobat més de 12 bilions de zeros a la recta crítica.

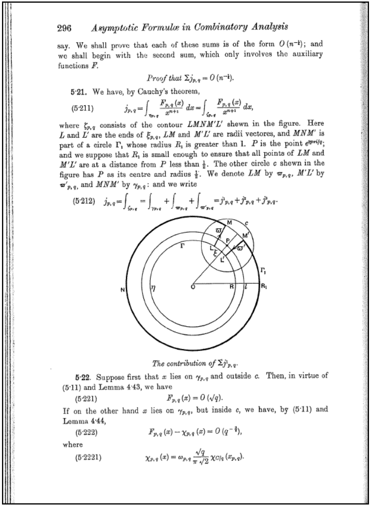
Altres escenes de la pel·lícula: les particions





El professor Ken Ono i els seus “deixebles”

Asymptotic Formulæ in Combinatory Analysis, p. 296



296 *Asymptotic Formulæ in Combinatory Analysis*

say. We shall prove that each of these sums is of the form $O(n^{-\frac{1}{4}})$; and we shall begin with the second sum, which only involves the auxiliary functions F.

Proof that $\Sigma j_{p,q} = O(n^{-\frac{1}{4}})$.

5·21. We have, by Cauchy's theorem,

$$j_{p,q} = \int_{\eta_{p,q}} \frac{F_{p,q}(x)}{x^{n+1}}\,dx = \int_{\zeta_{p,q}} \frac{F_{p,q}(x)}{x^{n+1}}\,dx, \tag{5·211}$$

where $\zeta_{p,q}$ consists of the contour $LMNM'L'$ shewn in the figure. Here L and L' are the ends of $\xi_{p,q}$, LM and $M'L'$ are radii vectores, and MNM' is part of a circle Γ_1 whose radius R_1 is greater than 1. P is the point $e^{2p\pi i/q}$; and we suppose that R_1 is small enough to ensure that all points of LM and $M'L'$ are at a distance from P less than $\frac{1}{2}$. The other circle c shewn in the figure has P as its centre and radius $\frac{1}{2}$. We denote LM by $\varpi_{p,q}$, $M'L'$ by $\varpi'_{p,q}$, and MNM' by $\gamma_{p,q}$: and we write

$$j_{p,q} = \int_{\zeta_{p,q}} = \int_{\gamma_{p,q}} + \int_{\varpi_{p,q}} + \int_{\varpi'_{p,q}} = j^1_{p,q} + j^2_{p,q} + j^3_{p,q}. \tag{5·212}$$

The contribution of $\Sigma j^1_{p,q}$.

5·22. Suppose first that x lies on $\gamma_{p,q}$ and outside c. Then, in virtue of (5·11) and Lemma 4·43, we have

$$F_{p,q}(x) = O(\sqrt{q}). \tag{5·221}$$

If on the other hand x lies on $\gamma_{p,q}$, but inside c, we have, by (5·11) and Lemma 4·44,

$$F_{p,q}(x) - \chi_{p,q}(x) = O(q^{-\frac{3}{2}}), \tag{5·222}$$

where

$$\chi_{p,q}(x) = \omega_{p,q} \frac{\sqrt{q}}{\pi\sqrt{2}} \chi_{C/q}(x_{p,q}). \tag{5·2221}$$

Una pàgina de l'article original de Hardy i Ramanujan, del 1918, sobre les particions: mètode del cercle.

G. H. Hardy i S. A. Ramanujan, Asymptotic formulæ in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.* (2) **17** (1918), 75-115.

Particions: els seus orígens

1669: carta de Leibniz a Bernoulli sobre *motets religiosos*

$p(n); \quad p(4) = 5, \quad p(5) = 7$

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 4{+}1 = 3{+}2 = 3{+}1{+}1 = 2{+}2{+}1 = 2{+}1{+}1{+}1 = 1{+}1{+}1{+}1{+}1.$$

1750: Euler, *De partitione numerorum*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m}, \qquad \text{per a } |x| < 1$$

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \ldots = 0.$$

- Avui s'empren des de temes de seguretat digital fins a temes de física teòrica.

Relació amb la funció η de Dedekind

$$\eta(z) := q^{1/12} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{2m}\right), \qquad q(z) = e^{\pi i z}, \quad \Im(z) > 0,$$

funció analítica en el semiplà superior complex que satisfà la equació funcional

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \omega\sqrt{cz+d}\,\eta(z),$$

per a $\Im(z) > 0$, sent ω una determinada arrel 24 de la unitat.

- $p(n)$ pot definir-se mitjançant coeficients de *formes modulars*:

$$\frac{1}{\eta(z)} = q^{-1/12} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^{2n}.$$

Hardy i Ramanujan, 1918

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=R<1} \frac{f(x)}{x^{n+1}}\, dx,$$ fórmula integral de Cauchy

Por mètodes relativament elementals demostren que

$$\exp(A\sqrt{n}) < p(n) < \exp(B\sqrt{n}).$$

D'on, existeix una constant C tal que

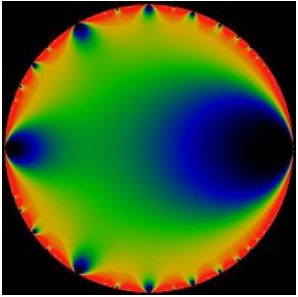
$$\log p(n) \sim C\sqrt{n}.$$

A més, per mitjà d'un teorema Tauberià, $C = 2\pi/\sqrt{6}$, amb la qual cosa

$$p(n) \sim \exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right\}, \quad n \to \infty.$$

Singularitats de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$

$$\phi(q) := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$$
$$\phi(q) = q^{-1/24}\eta(z) = \frac{1}{f(x)}, \quad x = q^2 = e^{2\pi iz}$$



Cada arrel de la unitat del cercle és una singularitat essencial de la funció. Però no totes tenen el mateix pes.

La millora de la fórmula asimptòtica

- L'eina principal és el mètode del cercle: $x = Re^{2\pi i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$
- Construcció de les successions de Farey d'ordre m: p/q, $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$
- Fórmula integral de Cauchy
- Consideració dels anomenats arcs majors i arcs menors.
- Dels càlculs resultarà que

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right\}, \quad n \to \infty$$

Successions de Farey

Successions d'ordre m: $p/q, \quad 0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m, \quad \mathrm{mcd}(p,q) = 1$

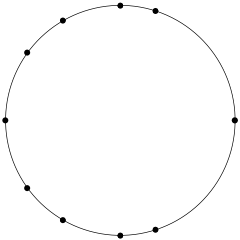
- Successió de Farey d'ordre 5:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

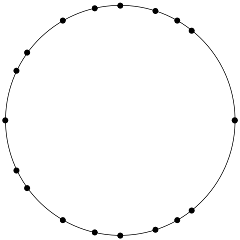
- Successió de Farey d'ordre 7:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$$

Permeten obtenir disseccions del cercle en considerar $e^{\frac{2\pi i p}{q}}$.



Ξ_5



Ξ_7

Fórmula analítica per a $p(n)$

$$F_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_a(n)x^n, \; a > 0, \qquad \psi_a(n) := \frac{d}{dn}\frac{\cosh a\lambda_n - 1}{\lambda_n}$$

$$\lambda_n := \sqrt{n - \frac{1}{24}}, \quad F_{p,q}(x) := \omega_{p,q}\frac{\sqrt{q}}{\pi\sqrt{2}}F_{C/q}(x_{p,q}), \quad C = \pi\sqrt{2/3}$$

$$x_{p,q} = xe^{-2\pi ip/q}, \quad F_{p,q}(x) = \Sigma c_{p,q,n}x^n$$

$$\Phi(x) := f(x) - \sum_p \sum_q F_{p,q}(x)$$

$$p(n) - \sum_p \sum_q c_{p,q,n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R} \frac{\Phi(x)}{x^{n+1}}\,dx, \quad R = 1 - \frac{\beta}{n}, \quad \beta > 0$$

$$\omega_{p,q} = \left(\frac{-q}{p}\right)\exp\left[-\left\{\tfrac{1}{4}(2 - pq - p) + \tfrac{1}{12}\left(q - \tfrac{1}{q}\right)(2p - p' + p^2p')\right\}\pi i\right],$$

p senar.

$$\omega_{p,q} = \left(\frac{-p}{q}\right)\exp\left[-\left\{\tfrac{1}{4}(q - 1) + \tfrac{1}{12}\left(q - \tfrac{1}{q}\right)(2p - p' + p^2p')\right\}\pi i\right],$$

q senar i $pp' \equiv -1 \pmod{q}$.

El teorema principal de Hardy-Ramanujan

Teorema. *Sigui*

$$\phi_q(n) = \frac{\sqrt{q}}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{C\lambda_n/q}}{\lambda_n} \right)$$

i siguin $\omega_{p,q}$ *les arrels* $24q$ *de la unitat definides anteriorment. Siguin*

$$A_q(n) = \sum_p \omega_{p,q} e^{-2np\pi i/q};$$

$\alpha > 0$ *una constant arbitrària i sigui* ν *la part entera de* $\alpha\sqrt{\nu}$*. Aleshores,*

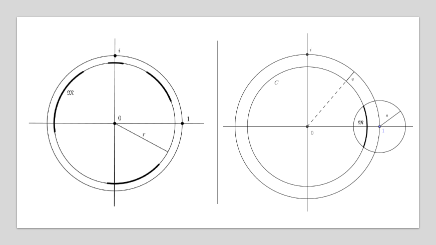
$$p(n) = \sum_{q=1}^{\nu} A_q(n)\phi_q(n) + O(n^{-\frac{1}{4}}),$$

de manera que $p(n)$*, per a* n *suficientment gran, és igual a la part entera del número* $\sum_1^{\nu} A_q(n)\phi_q(n)$.

$$\int_{|x|=R} \frac{\Phi(x)}{x^{n+1}}\, dx, = \sum J_{p,q} - \sum j_{p,q} = O(n^{-1/4})$$

Exemple. $n = 200$

$$\begin{array}{r}
3\,972\,998\,993\,185.986 \\
+36\,282.978 \\
-87.555 \\
+5.147 \\
+1.424 \\
+0.071 \\
+0.000 \\
+0.043 \\
\hline
3\,972\,999\,029\,388.004
\end{array}$$



quasi 4 bilions

MacMahon

Congruències per a $p(n)$

Observant les taules calculades per MacMahon, Ramanujan conjecturà que

$$p(5m+4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$p(7m+5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

• Les congruències foren demostrades per Mordell, Rademacher i Zuckermann, *et al*.

• Les congruències motivaren l'estudi de les representacions galoisianes associades a formes modulars, per part de Serre, Deligne, *et al*.

Sumes de quadrats

$5 = 1^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; $17 = 1^2 + 4^2$; $29 = 2^2 + 5^2$, ...

$p \neq 2$ primer; $p = 4k + 1 \iff p = x^2 + y^2$ Fermat, Euler, Gauss

Tot nombre natural és suma de quatre quadrats. Lagrange

$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \iff n \neq 4^a(8m + 7)$ Gauss

$$
\begin{aligned}
5 &= 1^2 + 2^2 \\
&= (-1)^2 + 2^2 \\
&= 1^2 + (-2)^2 \\
&= (-1)^2 + (-2)^2 \\
&= 2^2 + 1^2 \\
&= (-2)^2 + 1^2 \\
&= 2^2 + (-1)^2 \\
&= (-2)^2 + (-1)^2
\end{aligned}
$$

Sumes de k-quadrats

$$r_2(5) = 8, \quad r_2(7) = 0, \quad r_2(4) = 4, \quad r_2(100) = 12$$

$$r_k(n) = \#\left\{(x_i) \in \mathbb{Z}^k : \; n = {x_1}^2 + \cdots + {x_k}^2\right\}$$

Funcions generadores de $r_k(n)$:

$$q(z) := e^{2\pi iz}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Im(z) > 0$$

$$\Theta(z) := \sum_{a=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_1(n) q^n$$

$$\Theta^k(z) = \sum_{(a_i)\in\mathbb{Z}^k} e^{2\pi i(a_1^2+\cdots+a_k^2)z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_k(n) q^n$$

Consideració de tècniques analítiques

Fourier
1768-1830

Jacobi
1804-1851

Ramanujan
1887-1920

Hecke
1887-1947

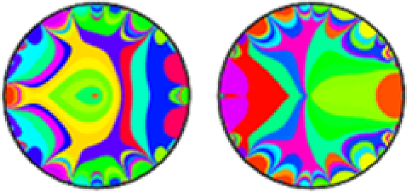
Funcions theta de Jacobi

El grup modular i subgrups de congruència

$$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$\Theta^{4k}(\gamma z) = (cz+d)^{2k}\Theta^{4k}(z)$, for all $\gamma \in \Gamma_0(4)$



Sumes de $2k$ quadrats

$$
\begin{aligned}
r_2(n) &= 4[d_1(n) - d_3(n)], && \text{Fermat, Euler, Gauss} \\
r_4(n) &= 8 \sum_{\substack{d \,|\, n \\ d \not\equiv 0 \pmod 4}} d, && \text{Jacobi,} \quad (\dots) \\
r_8(n) &= 16 \sum_{d|n} (-1)^{n+d} d^3, && \text{Jacobi}
\end{aligned}
$$

Ramanujan, 1916:

$$
r_{24}(n) = \frac{16}{621}\sigma_{11}^*(n) + \frac{128}{691}\left[(-1)^{n-1}259\tau(n) - 512\tau\left(\frac{n}{2}\right)\right]
$$

on

$$
\sigma_k^*(n) := (-1)^n[2\sigma_k(n/2) - \sigma_k(m)], \quad n = 2^a m,\ a \geqslant 0,\ 2 \nmid m,
$$

$$
(2\pi)^{-12}\Delta(z) = q\prod(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geqslant 1}\tau(n)q^n.
$$

Els valors $\tau(n)$, per a $n \leqslant 30$

$$
\begin{aligned}
\tau(1) &= 1 & \tau(16) &= 987136\\
\tau(2) &= -24 & \tau(17) &= -6905934\\
\tau(3) &= 252 & \tau(18) &= 2727432\\
\tau(4) &= -1472 & \tau(19) &= 10661420\\
\tau(5) &= 4830 & \tau(20) &= -7109760\\
\tau(6) &= -6048 & \tau(21) &= -4219488\\
\tau(7) &= -16744 & \tau(22) &= -12830688\\
\tau(8) &= 84480 & \tau(23) &= 18643272\\
\tau(9) &= -113643 & \tau(24) &= 21288960\\
\tau(10) &= -115920 & \tau(25) &= -25499225\\
\tau(11) &= 534612 & \tau(26) &= 13865712\\
\tau(12) &= -370944 & \tau(27) &= -73279080\\
\tau(13) &= -577738 & \tau(28) &= 24647168\\
\tau(14) &= 401856 & \tau(29) &= 128406630\\
\tau(15) &= 1217160 & \tau(30) &= -29211840
\end{aligned}
$$

Les conjectures de Ramanujan per a la funció τ

$$(2\pi)^{-12}\Delta(z) = q\prod(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geqslant 1}\tau(n)q^n$$

$$= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 + O(q^7)$$

•

R1. $\tau(mn) \overset{(?)}{=} \tau(m)\tau(n),$ si $\gcd(m,n) = 1.$

R2. $\tau(p^{n+1}) \overset{(?)}{=} \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1}),$ si p és primer i $n \geqslant 1.$

R3. $|\tau(p)| \overset{(?)}{\leqslant} 2p^{11/2},$ per a tot primer $p.$

•

La fórmula dels 24 quadrats

$\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma_0(1) \supseteq \Gamma_0(N)$ subgrups de congruència

$M(\Gamma_0(N),k) = E(\Gamma_0(N),k) \oplus S(\Gamma_0(N),k)$ formes modulars

$\Theta^{4k} \in M(\Gamma_0(4),2k), \quad G_{2k} \in E(\Gamma_0(1),2k)$ sèries d'Eisenstein

$\Delta \in S(\Gamma_0(1),12)$ funció delta, forma cuspidal de pes 12

$S(\Gamma_0(1),2k) = 0$, per a $k < 6$; $\quad \dim S(\Gamma_0(1),12) = 1$

$$\Theta^{24} \in M(\Gamma_0(4),12)$$

$$r_{24}(n) = \frac{16}{621}\sigma_{11}^{*}(n) + \frac{128}{691}\left[(-1)^{n-1}259\tau(n) - 512\tau\left(\frac{n}{2}\right)\right]$$

A. Arenas, On the summation of the singular series. *Manuscripta Math.* **57** (1987), no. 4, 469-475.

Prova de les conjectures 1 i 2 de Ramanujan

Mordell, 1917; Hecke, 1927, 1937

$\mathcal{R}(\mathbb{C})$ xarxes, $\quad T(n)\Lambda := \sum_{(\Lambda:\Lambda')=n} \Lambda'$

$\mathbb{T} = \{T(n) : \ n \in \mathbb{Z}, \ n \geqslant 1\}$ Operadors de Hecke en $S(\Gamma_0(N), k)$

R1. $T(mn) = T(m)T(n)$, si $\mathrm{mcd}(m,n) = 1$

R2. $T(p^{n+1}) = T(p)T(p^n) - pT(p,p)T(p^{n-1})$, p primer

$S(\Gamma(1), 12) = \mathbb{C}\Delta$

$$\boxed{\text{R3.} \quad |\tau(n)| \overset{(?)}{=} O(n^{11/2+\varepsilon})}$$

Apropament a R3: $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$

$$
\begin{aligned}
|\tau(n)| &= O(n^7) && \text{Ramanujan, 1916}\\
&= O(n^6) && \text{Hardy, Littelwood, 1918}\\
&= O(n^{5.875}) && \text{Kloosterman, 1927}\\
&= O(n^{5.833+\varepsilon}) && \text{Davenport, 1933}\\
&= O(n^{5.8}) && \text{Rankin, 1939}
\end{aligned}
$$

- Va ser necessari un canvi de paradigma:

$$
|\tau(n)| \leqslant n^{11/2} d(n) = O(n^{5.5+\varepsilon}) \qquad \text{Deligne, 1974}
$$

Equacions de congruència

Gauss, Jacobi, Lebesgue, Hardy, Littlewood

$$f(X,Y) \equiv 0 \pmod{p}, \quad f(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$$

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; \quad \mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^n} \subset \overline{\mathbb{F}}_p$$

$X|\mathbb{F}_q$ varietat algebraica, projectiva, no singular:

$$\left\{(x_0,\ldots,x_m) \in \overline{\mathbb{F}}_p^{m+1} : f_j(x_0,\ldots,x_m) = 0,\ f_j \in \mathbb{F}_q[X_0,\ldots,X_m]\right\}$$

$$N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$$

Idea bàsica: Interpretar $X(\mathbb{F}_{q^n})$ com $X(\overline{\mathbb{F}}_q)^{F_{q^n}}$, amb $F_{q^n} : x \to x^{q^n}$, l'automorfisme de Frobenius.

Funció zeta de Hasse-Weil

Herglotz, Mordell, Artin, F. K. Schmidt

Hasse, Davenport

Weil

$X|\mathbb{F}_q$ varietat algebraica, projectiva i llisa

$$Z(X|\mathbb{F}_q, t) := \prod_{\mathfrak{p}} (1 - t^{\mathrm{gr}(\mathfrak{p})})^{-1} = \exp\left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{N_n}{n} t^n\right)$$

$N_n = \#X(\mathbb{F}_{q^n})$

$$\zeta(X|\mathbb{F}_q, s) := Z(X|\mathbb{F}_q, q^{-s}), \ s \in \mathbb{C}$$

Conjectures de Weil, 1949

A. Weil (1906-1998)

> *En unes altres circumstàncies, una publicació m'hauria semblat massa prematura. Però, a l'abril de 1940, qui es podia creure tenir assegurat l'endemà? Em va semblar que les meves idees contenien prou substància com per merèixer no exposar-les al perill de perdre's.*

A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), 497-508.

Les conjectures de Weil, 1949

$X|\mathbb{F}_q$ varietat algebraica, projectiva, no singular, de dimension d

W1. Racionalitat: $Z(X|\mathbb{F}_q, t) \overset{(?)}{=} \dfrac{P_1(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2d}(t)}$, $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

W2. Equació funcional: $\zeta(X|\mathbb{F}_q, s) \overset{(?)}{=} \kappa\zeta(X|\mathbb{F}_q, d-s)$.

W3. "Hipòtesi de Riemann":
$P_i(t) \overset{(?)}{=} \prod_j^{b_i}(1-\alpha_{ij}t), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \quad |\alpha_{ij}| = q^{i/2}$.

W4. Números de Betti: (?) Si X s'obté per bona "reducció mod p" d'una varietat projectiva i no singular $\widetilde{X}$ definida sobre un cos de nombres, aleshores el grau de P_i es el i-èsim número de Betti de l'espai $\widetilde{X}(\mathbb{C})$ dels punts complexos de $\tilde{X}$.

Cohomologia étale i ℓ-àdica: 1960-68

A. Grothendieck, M. Artin *et al.*: SGA 4, SGA 7 = XLVII+2544 p.

- X esquema noetherià, X_{et} *situs étale*, ℓ enter primer

- Feixos ℓ-àdics $F = (F_n)_{n \geqslant 0}$; $F_n \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} F_{n-1}$;
les fibres $F_{\overline{x}} = \varprojlim F_{n,\overline{x}}$ son $\mathbb{Z}_\ell$-mòduls finitament generats.

- Cohomologia ℓ-àdica $H^i(X, F \otimes \mathbb{Q}_\ell) := \varprojlim H^i(X, F_n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

- Si X és un esquema propi sobre un cos k algebraicament tancat, aleshores són $\mathbb{Q}_\ell$-espais vectorials de dimensió finita.

- $H^i = 0$, per a $i > 2\dim(X)$.

P. Deligne, 1977: SGA 4 $\frac{1}{2}$= 312p.

$X_0|\mathbb{F}_q$ esquema de tipus finit, $\quad X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \quad x \in X_0(\overline{\mathbb{F}}_q)$

- La funció L definida por un feix ℓ-adic $\mathcal{F}_0$ en $X_{0,et}$:

$$L(X_0, \mathcal{F}_0, t) := \prod_{x \in |X_0|} \det(1 - F_{\overline{x}}^* t^{\mathrm{gr}(x)}; \mathcal{F}_{\overline{x}} \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{-1}$$

Observació: $L(X_0|\mathbb{F}_q, \mathbb{Z}_\ell, t) = Z(X_0|\mathbb{F}_q, t)$

W1. Racionalitat de la funció L

$$L(X_0, \mathcal{F}_0) = \prod \det(1 - F^* t; H_c^i(X, \mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$$

Se segueix de la fórmula de Lefschetz

$$\sum_{x \in X^{F^n}} \mathrm{Tr}(F_x^{*n}, \mathcal{F}_x) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(F^{*n}, {H_c}^i(X, \mathcal{F})).$$

W2. Equació funcional

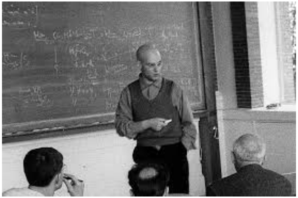
Resulta de la dualitat de Poincaré per a la cohomologia ℓ-àdica.

W4. Números de Betti

La relació amb els números complexos de Betti de un aixecament s'obté del teorema de comparació entre la cohomologia ordinària de varietats complexes i la cohomologia ℓ-àdica:

$$H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell,$$

per a tot $i \geqslant 0$.



A. Grothendieck (1928-2014)

Weil 1, 2, 3, 4 $\Rightarrow$ Ramanujan 3

Deligne, 1968:

- Prova que $W(1,2,3,4) \Rightarrow R3$

$\tau(p) = \lambda_p + \overline{\lambda}_p, \quad \lambda_p = \mathrm{vap}(F_p, H^{11})$

$|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$

Per la tercera conjectura de Weil (la hipòtesis de Riemann):

$$\lambda_p = \mathrm{vap}(F_p, H^i(X(\overline{\mathbb{F}}_p)), \mathbb{Q}_\ell) \overset{(?)}{=} |\lambda|_p \leqslant p^{i/2}$$

•

Bayer, P.; Neukirch, J.: On automorphic forms and Hodge theory. *Math. Ann.* 257 (1981) 137-155.

Deligne, 1974: prova la conjectura 3 de Weil

$X_0|\mathbb{F}_q$ varietat algebraica, projectiva i no singular; $X = X_0 \times \overline{\mathbb{F}}_q$

$$Z(X_0|\mathbb{F}_q, t) = \prod_i \det(1 - F^* t; H^i(X, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}}, \quad \overline{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$$

W3. Hipòtesi de Riemann per a varietats sobre $\mathbb{F}_q$:

$$P_i(t) = \det(1 - F^* t; H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \prod_j^{b_i} (1 - \alpha_{ij} t), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C},$$

$$|\alpha_{ij}| = q^{i/2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant b_i.$$

Els valors propis $|\alpha_{ij}|$ de F^* en actuar en $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ són nombres algebraics. Ells i tots els seus conjugats complexos satisfan $|\alpha_{ij}| = q^{i/2}$, per a tot $0 \leqslant i \leqslant 2\,\mathrm{dim} X$.

P. Deligne, La conjecture de Weil. I, *IHES Publ. Math.* No. 43 (1974), 273-307.

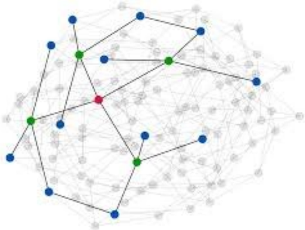
- Deligne rebé la Medalla Fields, l'any 1978, i el Premi Abel, l'any 2013.

1916-1974: la funció τ de Ramanujan

Ramanujan, Weil, Grothendieck, Deligne: $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$

What now we see is a shadow of what must come.

Sri Aurobindo (1872-1950), *Savitri* 1.4



FI