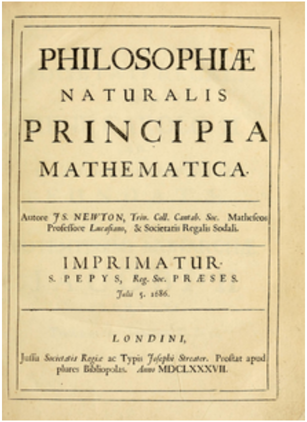
Principis Matemàtics de la Mecànica de Fluids

Joan Solà-Morales

Lectio Brevis, FME, 11 d'octubre de 2023

Philosophiæ naturalis principia mathematica, Matemàtiques, Física, Enginyeria...



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

(A.L.)

$$\frac{d}{d\varepsilon}\det(\mathrm{I}+\varepsilon A)\Big|_{\varepsilon=0} = \mathrm{Tr}(A)$$

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851)

Carl Gustav Jacob Jacobi was not only a great German mathematician but also considered by many as the most inspiring teacher of his time.

(E.D.)

Teorema de Liouville per a solucions matricials de EDOs lineals:

$$X'(t) = M(t) \circ X(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\det(X(t)) = [\mathrm{Tr} M(t)] \cdot \det(X(t))$$

$$X(t + \Delta t) \backsimeq X(t) + \Delta t\, M(t) \circ X(t) = (\mathrm{I} + \Delta t\, M(t)) \circ X(t)$$

Joseph Liouville (1809 – 1882)

(E.D.)

Equacions de primera variació

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{v}(\Phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0), t) \\ \Phi_{t_0,t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Per tant, derivant respecte a $\mathbf{x}_0$,

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\mathrm{D}\Phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0)}_{X(t)} = \underbrace{\mathrm{D}\mathbf{v}(\Phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0), t)}_{M(t)} \circ \underbrace{\mathrm{D}\Phi_{t,t_0}(x_0)}_{X(t)}$$

i, pel Teorema de Louville,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{J}\Phi = (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathrm{J}\Phi$$

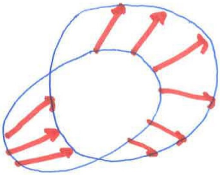
(C.I.)

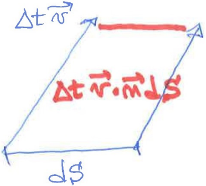
Teorema de la Divergència

$$\color{red}{\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} d\mathcal{V}} = \int_{\Omega(t)} \nabla\cdot\mathbf{v}\, d\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\mathcal{S}$$

A la primera igualtat s'usa que $\int_{\Omega(t)} d\mathcal{V} = \int_{\Omega(s)} \mathrm{J}\Phi_{t,s}\, d\mathcal{V}$

(Teorema del Canvi de Variables, C. D.)





Teorema del Transport de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x},t)\, d\mathcal{V} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right] d\mathcal{V}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\, d\mathcal{V} = \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right] d\mathcal{V},$$

i per tant

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Si $\rho \equiv \rho_0$ (incompressible i homogeni) queda

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0.$$

Balanç del Moment Lineal

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v}\, d\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{S}\, d\mathcal{S} + \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{F}\, d\mathcal{V}.$$

En fluids no viscosos $\mathbf{S} = -p\mathbf{n}$ (pressió), aleshores tenim $\int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{S}\, d\mathcal{S} = \int_{\Omega(t)} -\nabla p\, d\mathcal{V}$ i

$$\rho_t \mathbf{v}^i + \rho \mathbf{v}^i_t + \mathbf{v}^i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^i = -p_{x_i} + \rho \mathbf{F}^i,$$

i, usant l'equació de continuïtat queda

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{-1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}.$$

Sistema d'equacions d'Euler (incompressible i no viscós).
L. Euler, 1757

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p + \mathrm{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Burger's equation (E.D.P.)

$$u_t + uu_x = 0$$

Leonhard Euler (1707 – 1783)

(E.D.P.)

Què tenen a veure les equacions d'Euler amb l'equació de Laplace,

$$\Delta\Phi = 0?$$

Molt senzill: si suposem $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{v}(x) = \nabla\Phi$, la condició $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ dona l'equació de Laplace, i les equacions d'Euler es compleixen amb $p = -\frac{1}{2}\rho\|\mathbf{v}\|^2 + C$ (Bernoulli) (igual pels irrotacionals).

S'anomenen *fluxos potencials* i son significatius perquè
• tenen circulació zero al llarg de qualsevol corba tancada
• minimitzen l'energia cinètica entre tots els fluxos que compleixin les mateixes condicions de contorn (de Neumann). (E.D.P.)

En el cas compressible, $p = p(\rho)$, també interessen els fluxos potencials, i

$$\Phi_t = c^2\Delta\Phi.$$

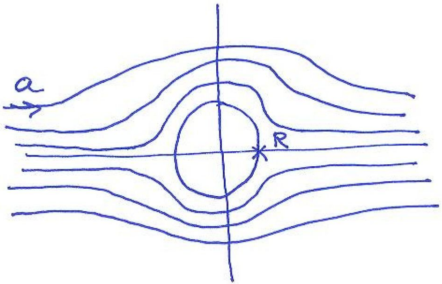
Equació d'ones, (E.D.P.).

(A.C.)

Paper de les funcions analítiques de variable complexa.
Potencial complex $\Omega(x + iy)$.

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

Les corbes $\Psi =$constant son les trajectòries de les partícules.

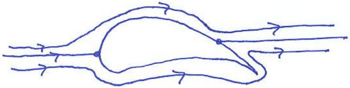


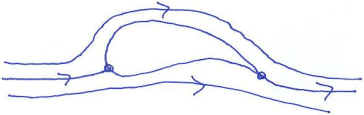
$$\Omega(z) = a\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

(A.C.)

Paradoxa de D'Alembert (dimensions 2 i 3). Els fluxos potencials al voltant d'un obstacle i amb velocitat donada a l'infinit no exerceixen cap força sobre l'obstacle.

Teoria de Joukowsky de sustentació de l'ala d'avió: addició a $\Omega(z)$ d'un terme $\frac{\Gamma}{2\pi i}\log z$ irrotacional però no potencial. Integral per residus.





Soviet stamp of 16 kopecks (1963). Nikolai Zhukovsky, a Russian scientist, founding father of modern aero- and hydrodynamics (1847-1921)

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\mathbf{v}\, d\mathcal{V} = \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{S}\, d\mathcal{S} + \int_{\Omega(t)} \rho\mathbf{F}\, d\mathcal{V}.$$

- **S** depèn linealment de **n** (Cauchy, tetraedre)

$$\mathbf{S} = \sigma \cdot \mathbf{n}.$$

El balanç del moment angular implica $\sigma^T = \sigma$.

En el cas no viscos, $\sigma = -p\mathrm{I}$.

- Viscositat: $\sigma = -p\mathrm{I} + \sigma_v$, on σ_v depèn (linealment) de les diferències de velocitat entre partícules properes (Navier, Stokes).

$$\sigma = -p\mathrm{I} + \sigma_v(D\mathbf{v}).$$

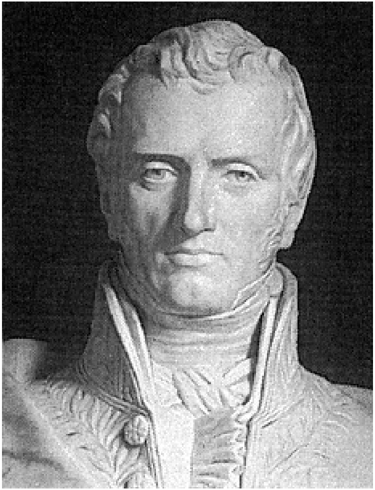
Balanç del Moment Lineal

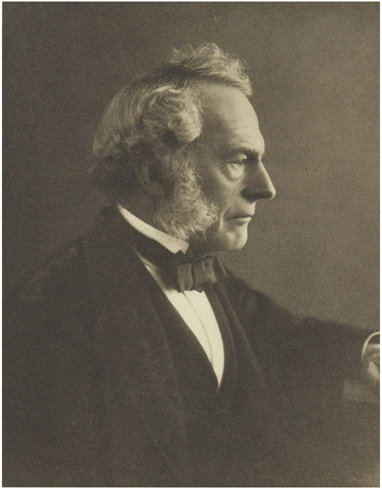
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} d\mathcal{V}}_{\text{Transport i cont.}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega(t)} \mu(D\mathbf{v} + D\mathbf{v}^T)\mathbf{n}\, d\mathcal{S}}_{\text{T. divergència}} + \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{F}\, d\mathcal{V}$$

Equacions de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Claude-Louis Navier, (1785 – 1836)
Sir George Stokes, Bt FRS, (1819 –1903)





• Navier (1821), Cauchy (1823), Poisson (1829), Saint-Venant (1837), Stokes (1845)

• Navier. Experiments de Girard. Condicions de contorn. Hagen i Poiseuille.

• Stokes. Experiments amb amortiment del moviment d'una esfera. Fórmula de Stokes: $F = 6\pi\mu Rv$. Límit singular: esfera petita en movient molt lent dins d'un fluid molt viscós. Paradoxa de Stokes.

• Esfondrament de ponts...

• Revolució de juliol (1830). Orleanistes (sobirania popular) contra legitimistes. Quadre de Delacroix. Exili de Cauchy.

E. Delacroix, La Liberté guidant le peuple (1830)

Puc proposar una nova menera de deduir el terme viscós?

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{r^{n-1}|S_{n-1}|}\int_{||\mathbf{h}||=r} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})\, d\mathcal{S}_{\mathbf{h}}\right) - f(\mathbf{x}_0)}{r^2} = \frac{1}{2n}\Delta f(\mathbf{x}_0)$$

(fórmula apresa de X. Cabré)

Aplicació als esforços viscosos: Diferències de velocitat entre partícules properes. Cal dir alguna cosa més per a justificar el terme $\mu\Delta\mathbf{v}$?

Justificació de l'ús del Laplacià fraccionari?

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{||\mathbf{h}||=r} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)}{||\mathbf{h}||^{n+1}} d\mathcal{S}_{\mathbf{h}} = \frac{|S_{n-1}|}{2n} \Delta f(\mathbf{x}_0)$$

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{||\mathbf{h}||\le r\}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)}{||h||^{n+2s}} \, d\mathcal{V}_{\mathbf{h}} = \frac{-1}{c(n,s)} (-\Delta)^s f(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu'(-\Delta)^s\mathbf{v} + \mathbf{F}$$

Pregunta (potser oberta): per a alguns valors de s en el Laplacià fraccionari no es produeix la paradoxa de Stokes (dimensió 2)?

Bibliografia utilitzada

S.C. Hunter, *Mechanics of Continuous Media*. Ellis Horwood, Chichester, 1976.

A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1979

O. Darrigol, *Worlds of Flow: A Hystory of Hydrodynamics From the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University Press, Oxford, 2005

S.R. Bistafa, On the developementof the Navier-Stokes equations by Navier. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, n. 2, e2603 (2018)

Chen, Zhi-Min, Analytic Semigroup Approach to Generalized Navier-Stokes Flows in Besov Spaces. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 19, 4, 709-724, 2017.

Dlotko, T., Navier–Stokes Equation and its Fractional Approximations. *Appl Math Optim* 77, 99–128 (2018).