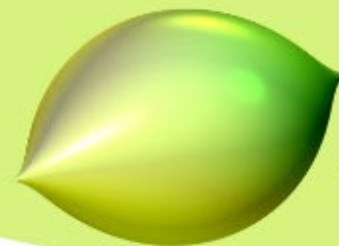


MÚSICA ALGORÍTMICA: EXPERIMENTS I PERSPECTIVES

Pilar Bayer Isant

FME, UPC, 2021-12-01

IMAGINARY
una simfonia matemàtica



Citrus:

$$x^2 + z^2 = y^3(1 - y)^3$$

Contingut

1. Música algorítmica
2. Nombres, notes i acords
3. Instruments i anàlisi harmònica
4. Música d'ordinador

«La composició algorítmica no és un gòlem musical que usurpa la creativitat del regne humà. Els algoritmes són una eina i un mitjà per a l'examen creatiu dels aspectes complexos de la producció musical.»

Gerhard Nierhaus, 2009

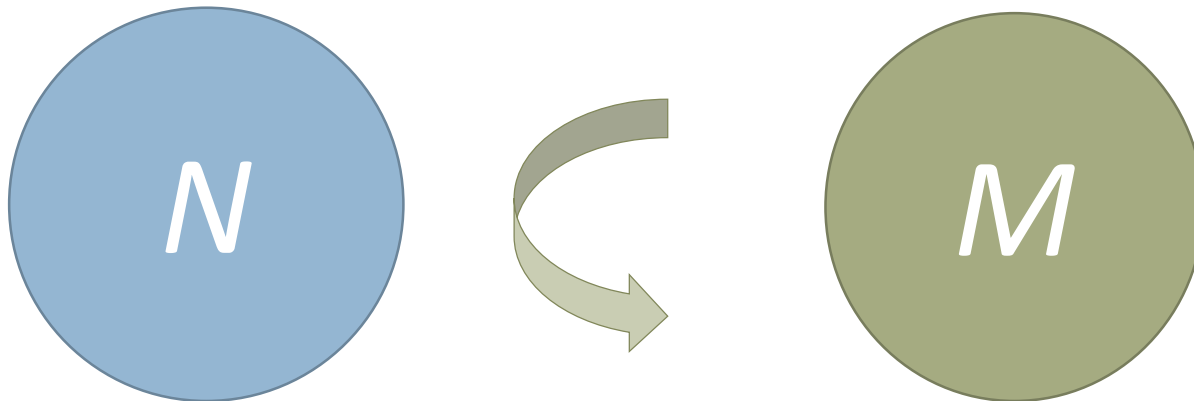
1. Música algorítmica

Composició algorítmica

1. Un **algoritme** produeix, a partir de certes dades, una successió ordenada de símbols matemàtics que constitueixen un **conjunt** N .
2. Alhora, certs esdeveniments musicals defineixen un **conjunt** M .
3. Una **transcripció numèrica musical** és una aplicació

$$t : N \longrightarrow M$$

que a cada element de N assigna un element de M .



Els elements de M poden ser notes, valors de temps, de timbre, dinàmics, etc.

Eines matemàtiques

Combinatòria

Grafs

Aritmètica

Geometria

Àlgebra

Sistemes dinàmics

Probabilitats

Ciències de la computació

Permutacions

Combinacions

Successions numèriques

Afinitats

Geodèsiques

Teoria de grups

Fractals

Caos

Atractors

Processos estocàstics

Cadenes de Markov

Autòmats cel·lulars

Intel·ligència artificial (IA)

Alguns antecedents

Música atonal

Arnold Schönberg (1874–1951)

Igor Stravinsky (1882–1971)

Música experimental

Anton Webern (1883–1945)

Alban Berg (1885–1935)

Música serial

Aaron Copland (1900–1990)

Dodecafonisme

Arnold Schönberg (1874–1951)

Luigi Dallapiccola (1904–1975)

Música aleatòria

Johann Kirnberger (1721-1783)

John Cage (1912–1992)

Iannis Xenakis (1922–2001)

Pierre Boulez (1925–2016)

Música electrònica

Karlheinz Stockhausen (1928–2007)

Brian Eno (1948-)

Musikalisches Würfelspiel

1792

Table des Chiffres pour le Walzer.
Zahlentafel für den Walzer.

Première Partie.
Erster Theil.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Seconde Partie.
Zweiter Theil.

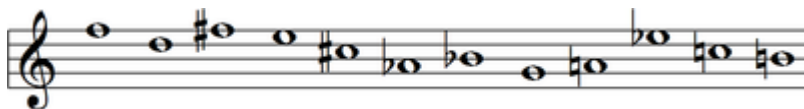
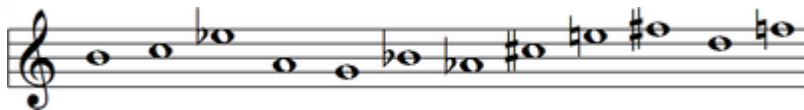
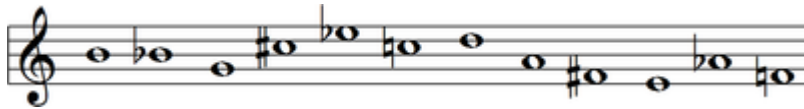
	A	B	C	D	E	F	G	H
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131



Nikolaus Simrock
1792

La numeració correspon a la dels compassos d'un vals de Mozart del 1787.

El dodecafonisme



- una sèrie dodecafònica

la seva sèrie retrògrada

la seva sèrie invertida

la sèrie invertida–retrògrada

A. Schönberg
1874–1951

$$12! = 479\,001\,600$$

Música aleatòria

Nota	Probabilitat	(mod 12)
C	.17	0
<i>C#</i>	.02	1
<i>D</i>	.07	2
<i>D#</i>	.03	3
E	.15	4
<i>F</i>	.12	5
<i>F#</i>	.01	6
G	.16	7
<i>G#</i>	.08	8
<i>A</i>	.10	9
<i>A#</i>	.02	10
<i>B</i>	.07	11

Probabilitats assignades segons una **distribució gaussiana**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Mètodes de Montecarlo

- i) Fixa un nombre natural L .
- ii) $r_1 \in [0, 1)$, nombre aleatori.
- iii) $n_1 = \lfloor 12r_1 \rfloor$.
- iv) Considera la probabilitat $P(n_1)$.
- v) $r_2 \in [0, 1)$, nombre aleatori.
- vi) Si $r_2 \leq P(n_1)$ accepta r_2 i fes $n_2 = \lfloor 12r_2 \rfloor$; altrament, torna a ii).
- vii) Repeteix fins a assolir un nombre L d'elements.



I. Xenakis
1922–2001

Formalized Music, 1992

Metàstasi, 1953

Analogiques A & B, 1959

Achorripsis, 1971

Cadenes de Markov

	f_1	f_2	f_3	f_4	$\dots$
g_1	0.5	0	0.2	0	$\dots$
g_2	0	0.3	0.3	1	$\dots$
g_3	0.5	0.7	0.5	0	$\dots$

f_i freqüència

g_i intensitat

λ densitat d'esdeveniments

Llei de Poisson

Probabilitat que un esdeveniment apareixi n vegades en la unitat de temps, volum,...

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$A=f_0 g_0 b_0$	$B=f_0 g_0 b_0$	$C=f_0 g_1 b_0$	$D=f_0 g_1 b_1$
$E=f_1 g_0 b_0$	$F=f_1 g_0 b_0$	$G=f_1 g_1 b_0$	$H=f_1 g_1 b_1$

Freqüències
Dinàmiques
Densitats

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0,021	0,357	0,084	0,189	0,165	0,204	0,408	0,096
B	0,084	0,089	0,076	0,126	0,150	0,136	0,072	0,144
C	0,084	0,323	0,021	0,126	0,150	0,036	0,272	0,144
D	0,336	0,081	0,019	0,084	0,135	0,024	0,048	0,216
E	0,019	0,063	0,336	0,171	0,110	0,306	0,102	0,064
F	0,076	0,016	0,304	0,114	0,100	0,204	0,018	0,096
G	0,076	0,057	0,084	0,114	0,100	0,054	0,068	0,096
H	0,304	0,014	0,076	0,076	0,090	0,036	0,012	0,144

Analogiques A&B
1959



2. Nombres, notes i acords



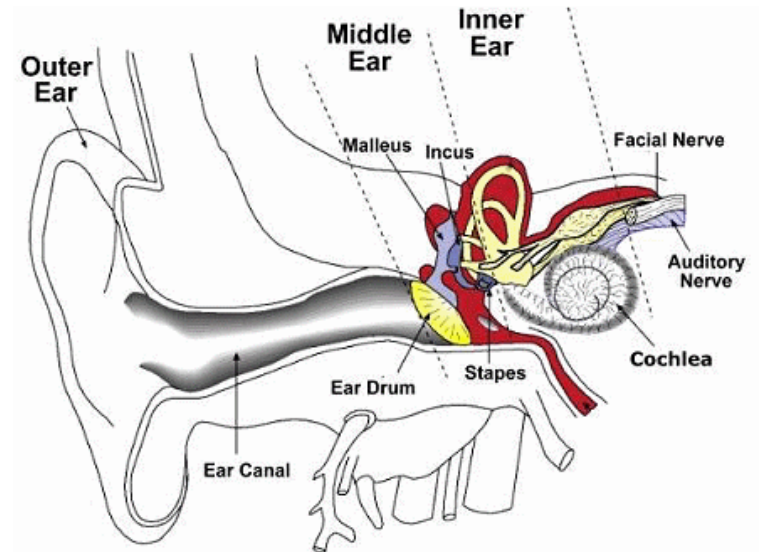
G. W. Leibniz
1646-1716

«La música és un
exercici ocult
d'aritmètica,
realitzat per
l'esperit que
ignora que sap
comptar. »

Carta de Leibniz a Christian Goldbach
27 d'abril de 1712

Sons

- El **so** és la impressió produïda en l'oïda per una vibració (moviment periòdic) que es propaga en forma d'ona a través d'un mitjà, com ara un gas, un líquid o un sòlid.
- Un **hertz** (Hz) correspon a una vibració que es repeteix una vegada per segon.
- La **frequència** d'una vibració es mesura en Hz.
- El **llindar d'audició** de les persones es troba entre 20 i 20 000 Hz.

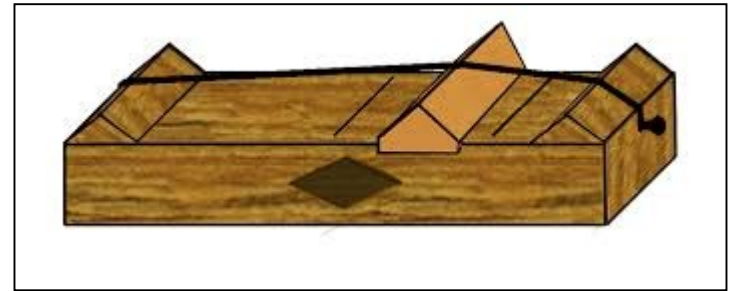


$$f = 1/T$$

El sistema pitagòric

s. VI aC

$1/2$ interval d'octava
 $2/3$ interval de quinta justa
 $3/4$ interval de quarta justa



monocord

Escales diatònica i cromàtica

do → *sol* → *re* → *la* → *mi* → *si* → *fa*♯

do♯ → *sol*♯ → *re*♯ → *la*♯ → *mi*♯ → *si*♯

Relació de freqüències entre una nota i la següent

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \frac{729}{64}, \frac{2187}{128}, \frac{6561}{256}, \frac{19683}{512}, \frac{59049}{1024}, \frac{177147}{2048}, \frac{53441}{4096}$$

Coma pitagòrica: 12 quintes perfectes no són 7 octaves: $(3/2)^{12}/2^7 = 1.01364...$

El sistema temperat

1581

$$\sqrt[12]{2} = 1.059463 \dots$$

raó d'un semitò

En l'afinació pròpia del sistema temperat, la raó de freqüències d'una nota de l'escala cromàtica a la següent es manté constant.

$$\sqrt[12]{2} \sim \sqrt[4]{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}$$

1.0594630943592952646

1.0597326722021398087

escala cromàtica $\leftrightarrow$ progressió geomètrica de raó $\sqrt[12]{2}$

1.05946,
1.12246,
1.18921,
1.25992,
1.33484,
1.41421,
1.49831,
1.58740,
1.68179,
1.78179,
1.88775,
2

Nombres i sons

Nota	Semitò	Interval	Af. Pitagòrica	Af. temperada	Aprox.
do	0	Uníson	1	1	1
do $\sharp$	1	Semitò	$\frac{2187}{2048} = 1.06787$	$\sqrt[12]{2} = 1.05946$	$\frac{16}{15} = 1.066$
re	2	2a major	$\frac{9}{8} = 1.125$	$\sqrt[12]{2^2} = 1.12246$	$\frac{9}{8} = 1.125$
mi $\flat$	3	3a menor	$\frac{32}{27} = 1.185$	$\sqrt[12]{2^3} = 1.18921$	$\frac{6}{5} = 1.2$
mi	4	3a major	$\frac{81}{64} = 1.26562$	$\sqrt[12]{2^4} = 1.25992$	$\frac{5}{4} = 1.25$
fa	5	4a justa	$\frac{4}{3} = 1.3$	$\sqrt[12]{2^5} = 1.33484$	$\frac{4}{3} = 1.3$
fa $\sharp$	6	4a augm.	$\frac{729}{512} = 1.51923$	$\sqrt[12]{2^6} = 1.41421$	$\frac{7}{5} = 1.4$
sol	7	5a justa	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\sqrt[12]{2^7} = 1.49831$	$\frac{3}{2} = 1.5$
sol $\sharp$	8	5a augm.	$\frac{6561}{4096} = 1.60181$	$\sqrt[12]{2^8} = 1.58740$	$\frac{8}{5} = 1.6$
la	9	6a major	$\frac{27}{16} = 1.6875$	$\sqrt[12]{2^9} = 1.68179$	$\frac{5}{3} = 1.6$
si $\flat$	10	7a menor	$\frac{16}{9} = 1.9$	$\sqrt[12]{2^{10}} = 1.78179$	$\frac{7}{4} = 1.75$
si	11	7a major	$\frac{243}{128} = 1.89844$	$\sqrt[12]{2^{11}} = 1.88775$	$\frac{15}{8} = 1.875$
do	12	8a justa	2	2	2

Normalització del sistema temperat

Nota freqüència Nota freqüència Nota freqüència Nota freqüència

C	130.82	C	261.63	C	523.25	C	1046.5
C#	138.59	C#	277.18	C#	554.37	C#	1108.73
D	146.83	D	293.66	D	587.33	D	1174.66
D#	155.56	D#	311.13	D#	622.25	D#	1244.51
E	164.81	E	329.63	E	659.26	E	1318.51
F	174.61	F	349.23	F	698.46	F	1396.91
F#	185	F#	369.99	F#	739.99	F#	1479.98
G	196	G	392	G	783.99	G	1567.98
G#	207.65	G#	415.3	G#	830.61	G#	1661.22
A	220	A	440	A	880	A	1760
A#	233.08	A#	466.16	A#	932.33	A#	1864.66
B	246.94	B	493.88	B	987.77	B	1975.53

1859 Acadèmia de Ciències de París: A3 = 435Hz

avui: A3 = 440 Hz; avui, en música antiga: A3 = 415 Hz

Congruències



Carl Friedrich Gauss
1777–1855

Disquisitiones arithmeticae (1801)

$$a \equiv r \pmod{n} \Leftrightarrow a = bn + r$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$a \mapsto r$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$\varphi(n) := \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

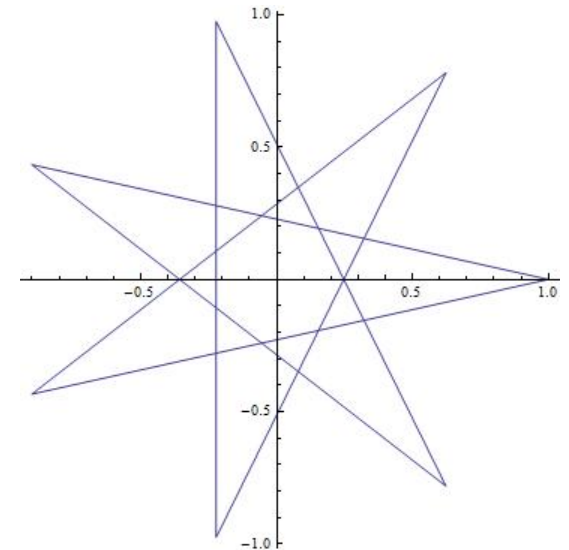
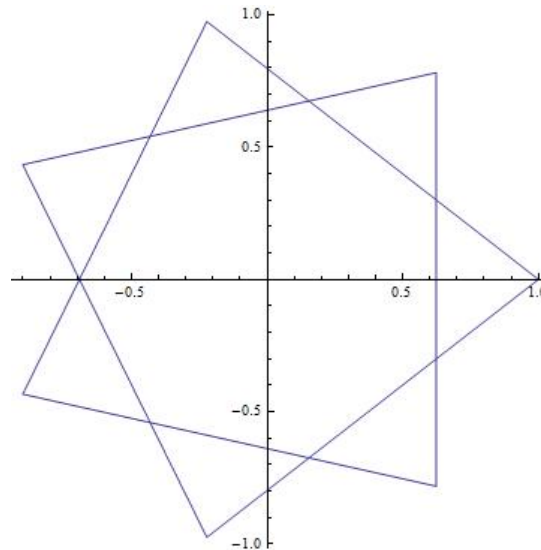
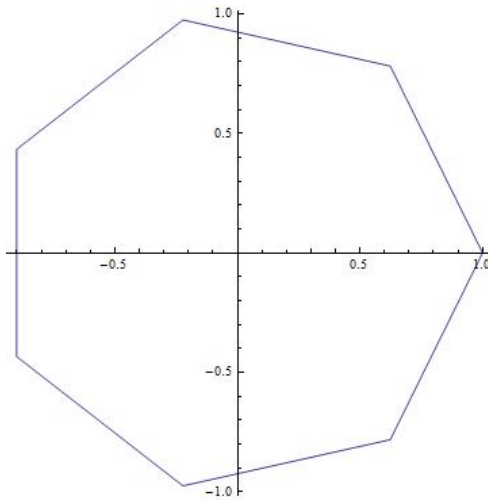
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si
si#	reÑ		miÑ	faÑ	mi#	solÑ		laÑ		siÑ	doÑ

Polígons regulars

$$\frac{1}{2} \varphi(n)$$

$$\frac{1}{2} \varphi(7) = 3$$

Existeixen exactament 3 heptàgons regulars



$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = (\pm 1) = (\pm 2) = (\pm 3)$$

do, re, mi, fa, sol, la, si

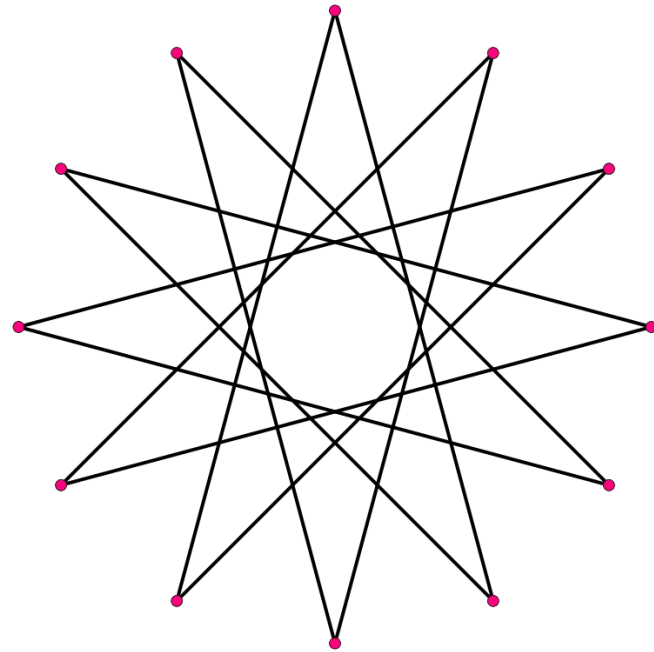
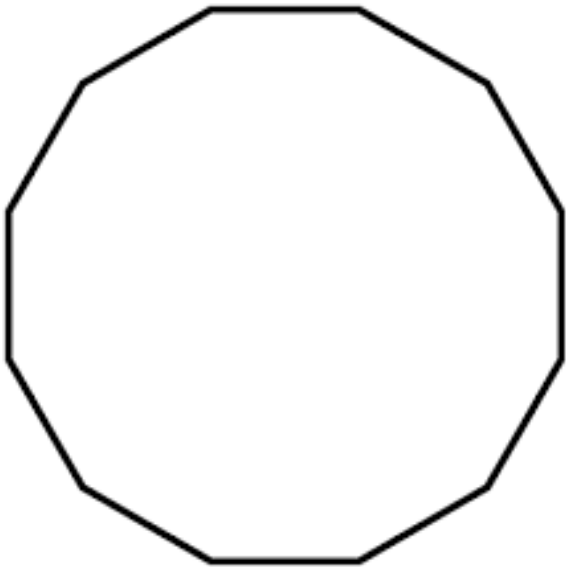
do, mi, sol, si, re, fa, la

do, fa, si, mi, la, re, sol

Dodecàgons regulars

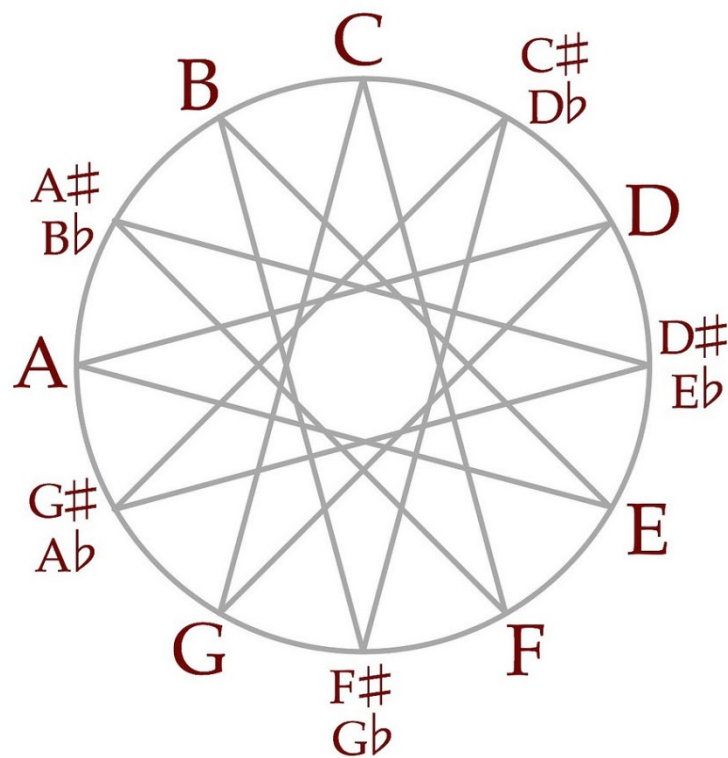
$$\frac{1}{2}\varphi(12) = 2$$

Existeixen exactament 2 dodecàgons regulars



$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{1, 3, 5, 7\} = (\pm 1) = (\pm 5)$$

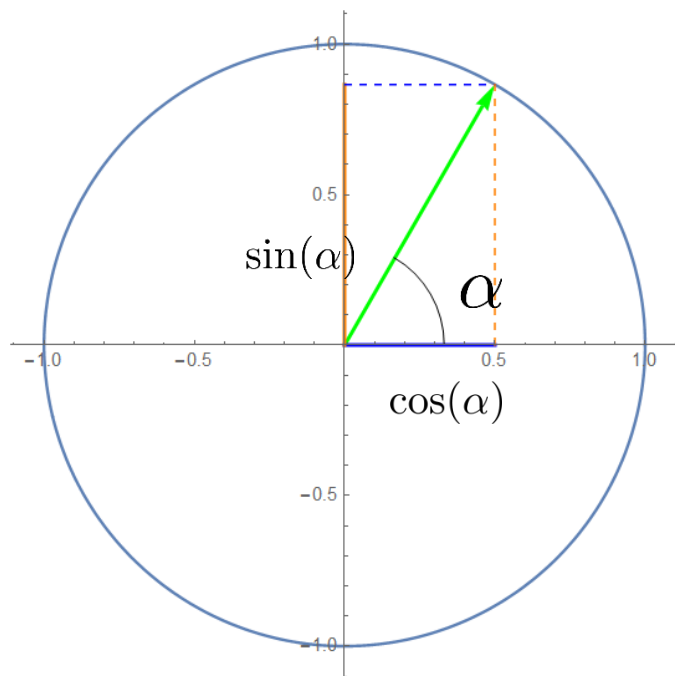
Cercles de semitons i de quintes



Només el cercle de semitons i el de quintes proporcionen un polígon regular amb les 12 notes de l'escala cromàtica del sistema temperat.

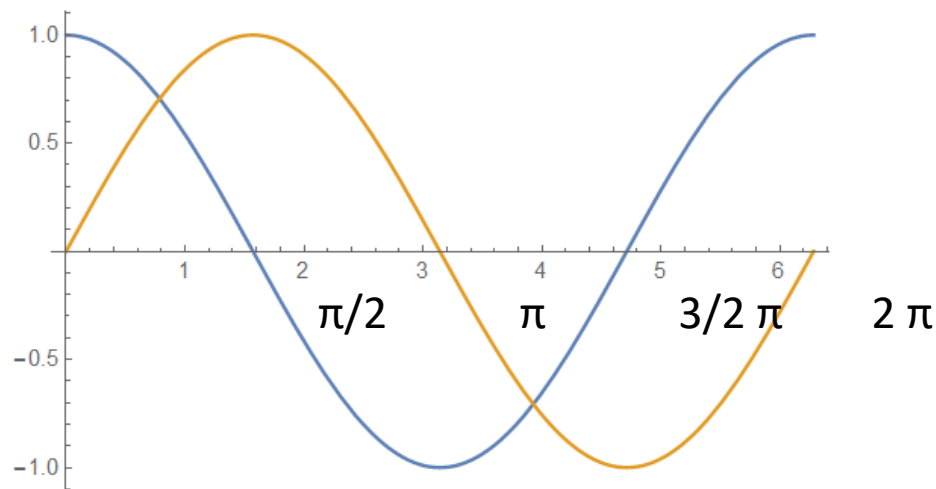
Funcions trigonomètriques

$\sin(\alpha), \cos(\alpha)$



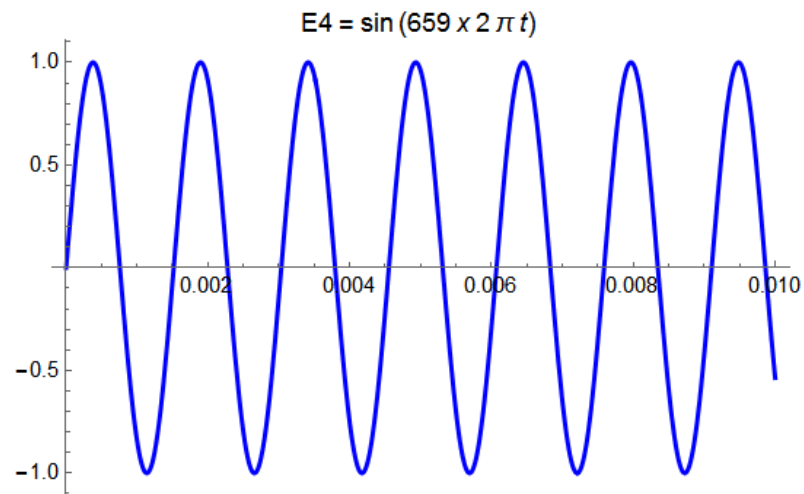
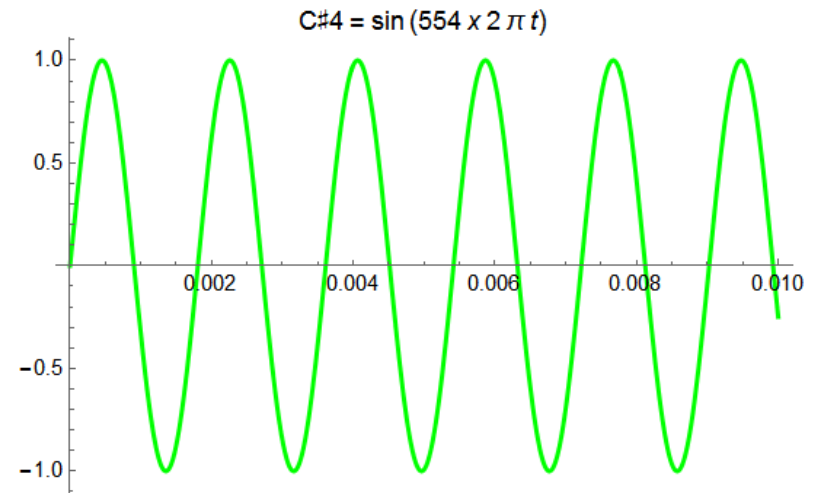
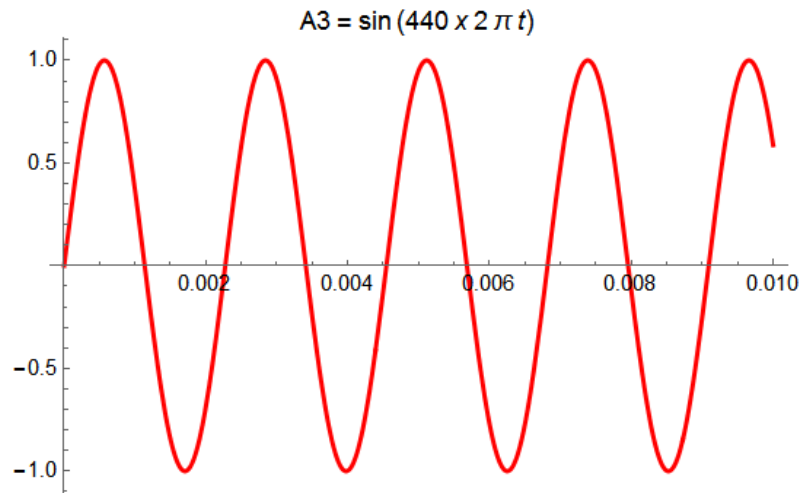
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

són periòdiques de període 2π



$\sin(x + iy), \cos(x + iy)$ són funcions harmòniques

Representació matemàtica dels sons

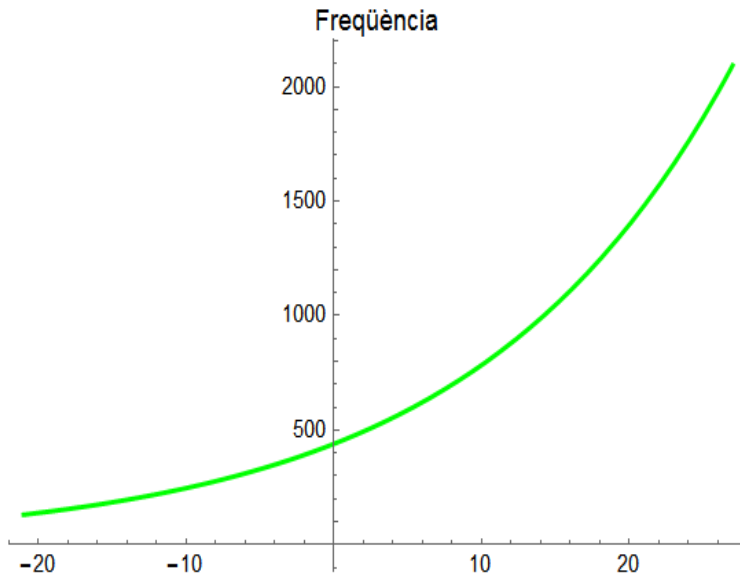


diapasó



Dels sons més greus als més aguts

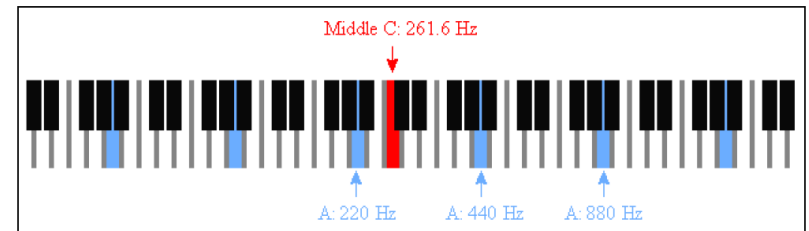
- Creixement exponencial de f



$$f(n) = 440 \times 2^{n/12} \text{ Hz}$$

$$-21 \leq n \leq 27$$

- Representació logarítmica de f



$$n = 12(\log_2 f(n) - \log_2 440)$$

$$n = 0 \rightarrow A3$$

Una fórmula de Mersenne

1636

Paràmetres d'una corda que vibra

Cordes pinçades (llaüt), percutides (clavicordi),
polsades (clavicèmbal), fregades (violí)

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

f_0 = freqüència fonamental

L = longitud de la corda

F = força

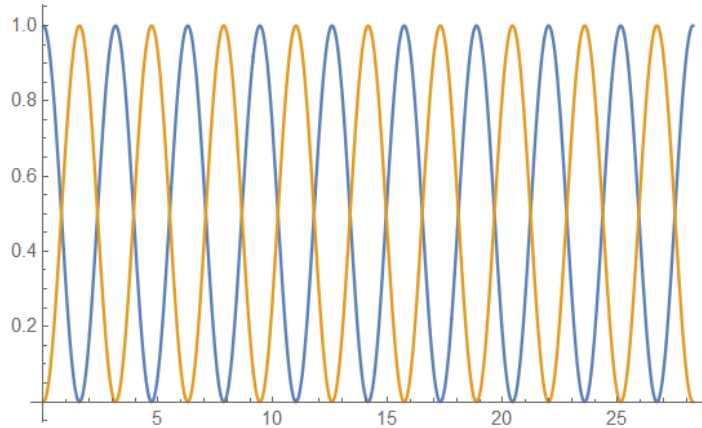
μ = massa per unitat de longitud

M. Mersenne (1588–1648)

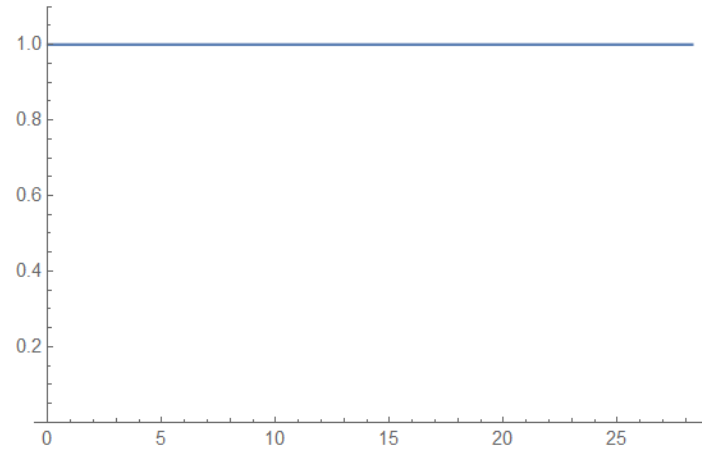
Harmonie universelle (1636)



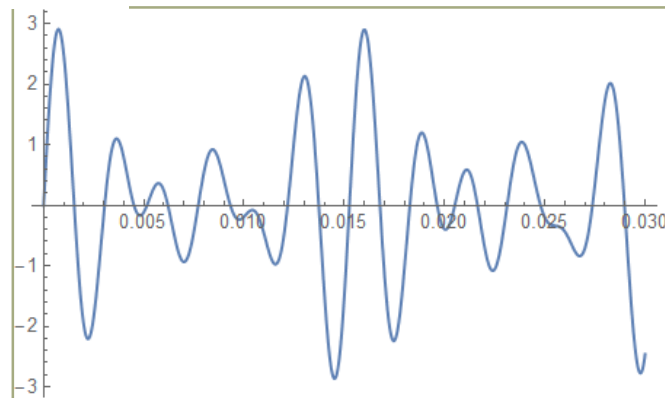
Operacions amb funcions



$$\sin^2(\alpha), \cos^2(\alpha)$$



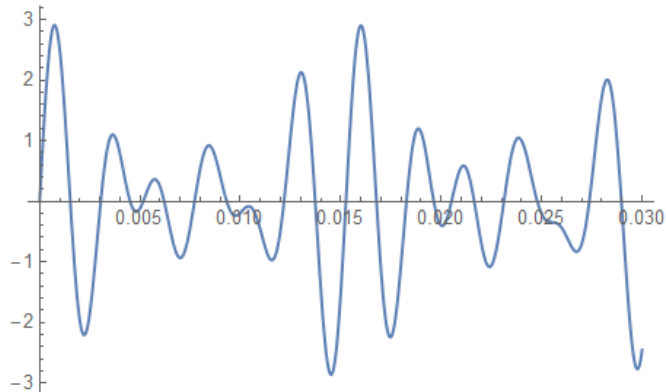
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$



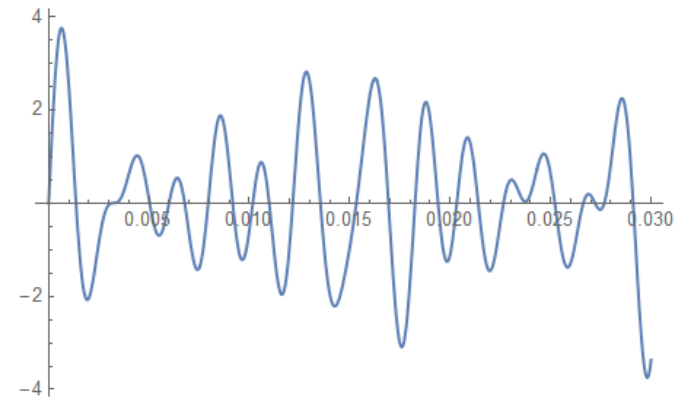
$$\sin(261.6 \times 2\pi t) + \sin(329.6 \times 2\pi t) + \sin(392 \times 2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 0.03$$

Representació gràfica dels acords

C



C^{Maj7}



Plot[Sin[C4 2 Pi t] + Sin[E4 2 Pi t] + Sin[G4 2 Pi t], {t, 0, 0.03}]

Plot[Sin[C4 2 Pi t] + Sin[E4 2 Pi t] + Sin[G4 2 Pi t] + Sin[B4 2 Pi t], {t, 0, 0.03}]



3. Instruments i anàlisi harmònica

Els harmònics d'un so

- Les diferents freqüències de vibració d'un so constitueixen el seu **espectre** i permeten diferenciar els sons produïts pels instruments acústics (espectre discret) dels sorolls (espectre continu).
- Les freqüències dels harmònics d'un so produït per les vibracions d'un instrument acústic són de la forma f , $2f$, $3f$, $4f$, etc. És a dir, són totes múltiples de la primera freqüència, f , anomenada freqüència fonamental.
- La relació dels períodes dels harmònics d'un so produït per un instrument acústic és donada pels termes d'una sèrie dita **sèrie harmònica**:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

La successió dels harmònics



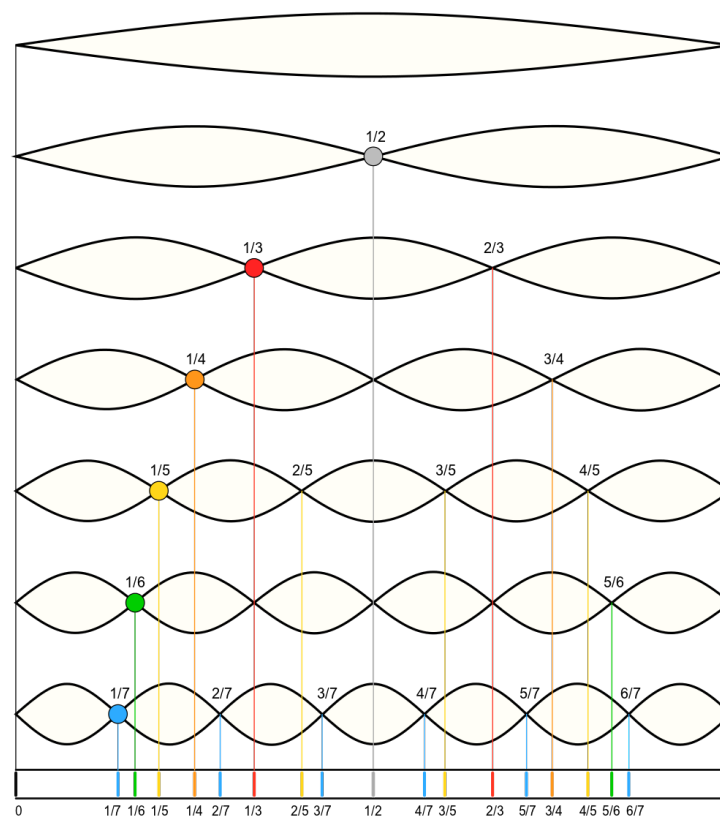
Pitàgores (s. VI aC)

Nicòmac (s. I)

Guido d'Arezzo (991–1050)

Galileo Galilei (1564–1642)

Leonhard Euler (1708–1783)



La sèrie harmònica

Tres mitjanes de dos nombres:

$$m_a(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad m_g(a, b) = \sqrt{ab}$$

$$m_h(a, b) = \frac{2}{1/a + 1/b}; \quad \text{exemple: } m_h\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}, \quad n > 1$$

$$\text{Exemple: } \{m_h(4, 6), m_g(4, 6), m_a(4, 6)\} = \{4.8, 4.9, 5\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 0.5 + 0.\overline{3} + 0.25 + \dots$$

La sèrie harmònica i els nombres primers

Divergència de la sèrie harmònica:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \infty \quad \implies \text{Existeixen infinits nombres primers.}$$

La sèrie harmònica és convergent en el semiplà complex $\Re(s) > 1$ i defineix la funció zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

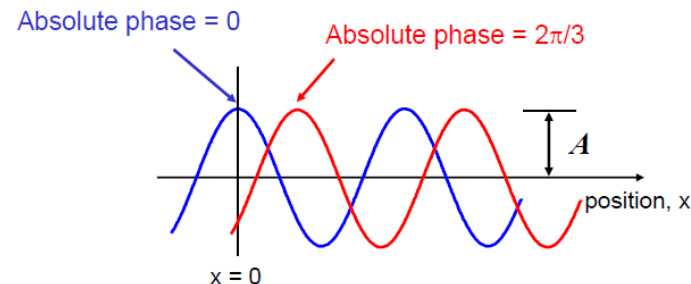
Cordes vibrants

1747



Jean le Rond d'Alembert
1717–1783

$$F = ma \qquad u_{tt} = v^2 u_{xx}$$
$$u(x, t) = A \cos[(kx - \omega t) - \theta]$$
$$\omega/k = v$$



A = amplitud, θ = fase, $k = 2\pi/\lambda$, λ = longitud d'ona

$\omega = 2\pi/T$ = velocitat angular, $f = 1/T$ = freqüència, T = període

Sèries de Fourier

Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funció periòdica de període $T = t_2 - t_1$ i contínua a trossos. La seva sèrie de Fourier és donada per

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)],$$

on

$$\omega_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(\omega_n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(\omega_n t) dt.$$

En aplicar la fórmula d'Euler, podem escriure

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi t}{T}},$$

on

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad x = \frac{2\pi}{T} t.$$

Transformada de Fourier



Lejeune Dirichlet
1805–1859

L'any 1829, **Dirichlet** caracteritzà un conjunt ampli de funcions desenvolupables en sèrie de Fourier. La seva transformada de Fourier es defineix com

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt.$$

La transformada de Fourier d'una funció desenvolupable en sèrie de Fourier en proporciona els coeficients:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi t}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f) \left(\frac{n}{T} \right) e^{in \frac{2\pi t}{T}}.$$

El timbre dels instruments musicals

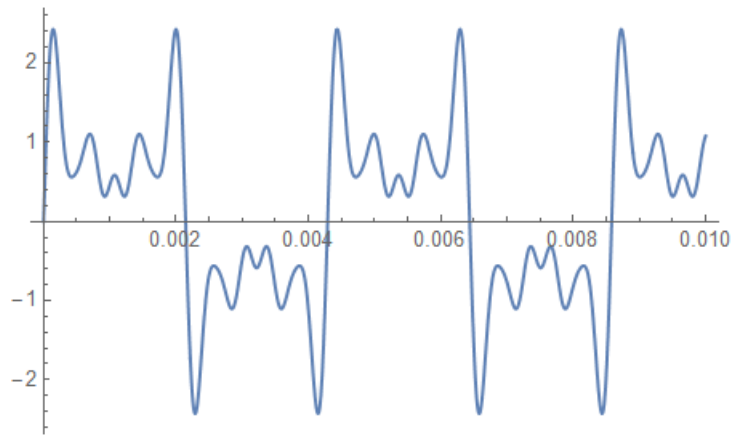
Podem representar els instruments musicals com a funcions de dues variables desenvolupables en sèrie de Fourier.

Els seus coeficients de Fourier determinaran el **timbre** de l'instrument.

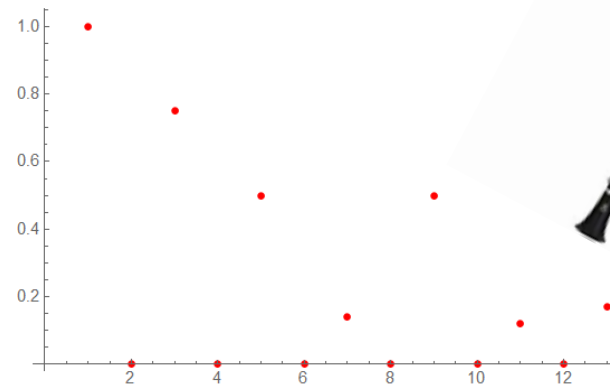
$\text{instrument}(f, t)$

El clarinet

$$\text{clarinet}(f, t) := \sin(f 2\pi t) + 0.75 \sin(3 f 2\pi t) + 0.5 \sin(5 f 2\pi t) + \\ + 0.14 \sin(7 f 2\pi t) + 0.5 \sin(9 f 2\pi t) + \\ + 0.12 \sin(11 f 2\pi t) + 0.17 \sin(13 f 2\pi t).$$



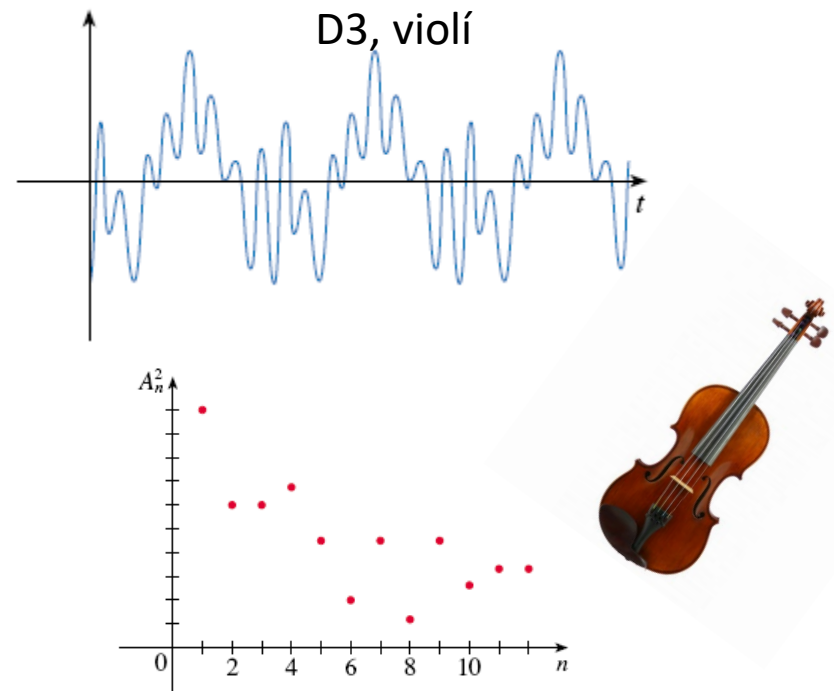
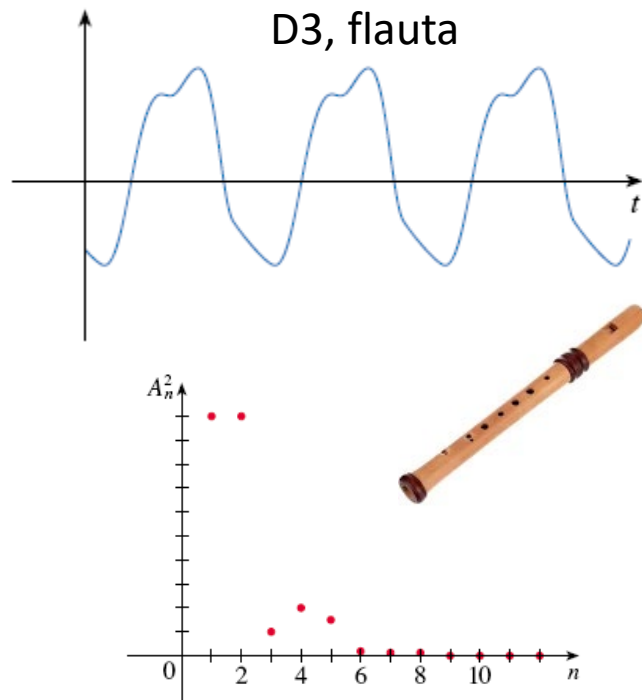
B $\flat$ 2 = 233.082 Hz, clarinet



Espectre d'un clarinet



La flauta i el violí



CFT *continuous Fourier transform*
DFT *discrete Fourier transform*
FFT *fast Fourier transform*
STFT *short time Fourier transform*

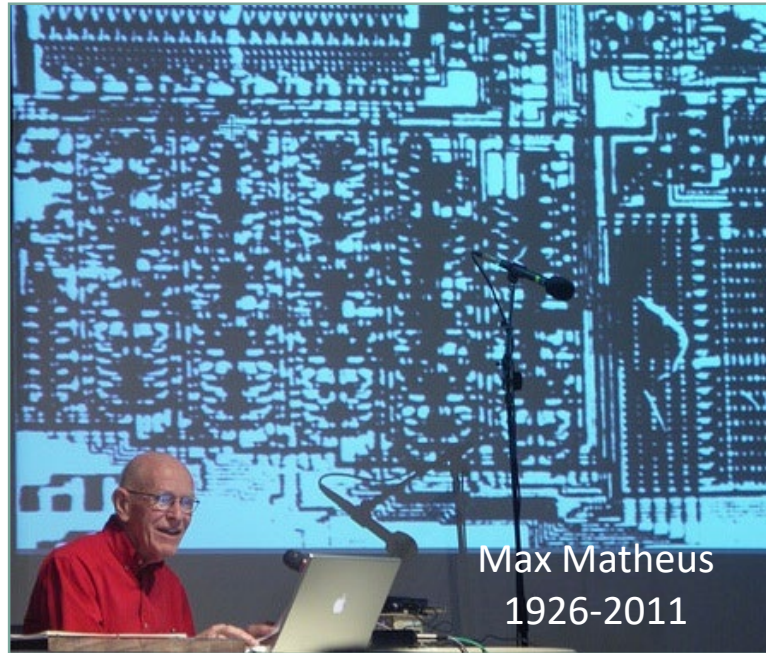
Permeten la descomposició d'un so en ones elementals, proporcionant-ne l'espectre.

Anàlisi harmònica

- L'anàlisi harmònica és la branca de les matemàtiques que estudia la representació de funcions com a superposició d'altres funcions dites elementals. Comprèn l'anàlisi de Fourier com a cas particular.
- Un marc d'estudi per a l'anàlisi harmònica són els espais de Hilbert. L'estudi espectral s'obté a partir de l'acció dels operadors de Laplace i de Dirac.
- Els sons propis (afinats) emesos per un objecte que vibra són produïts pels vectors propis d'aquests operadors.



D. Hilbert
1862–1943



4. Música d'ordinador

Nocions d'informàtica musical

És la branca de la informàtica dedicada a la composició, execució, edició, anàlisi, enregistrament o reproducció de música per mitjà de tècniques computacionals.

Programari que emprarem tot seguit:

- Programari de notació musical:
 - Finale
 - LilyPond
 - Frescobaldi
- Programari basat en IA:
 - Ludwig
 - (...)
- Programari d'edició matemàtica:
 - LaTeX
- Programari matemàtic:
 - Mathematica
- Programari per a edició d'àudio:
 - Finale
 - Wolfram Language
- Arxius d'àudio:
 - MP3, WAV, MIDI

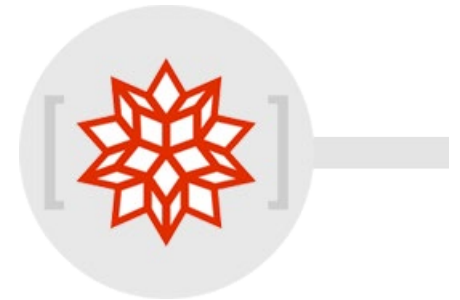
Primer experiment matemàtic musical

programari matemàtic & editor de partitures
—Mathematica & Finale—

```
clarinet[f_, t_] :=  
Sin[2 Pi f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 3*f*t] +  
0.5*Sin[2 Pi 5*f*t] +  
0.14*Sin[2 Pi 7*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 9*f*t] +  
0.12*Sin[2 Pi 11*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 13*f*t]
```

```
silenci[t_] := Sin[2 Pi t *0]
```

```
k=3
```




```
brindis = Sound[{Play[clarinet[C3,t], {t,0,1/k}},
Play[clarinet[A4,t], {t,0,4/k}],
Play[clarinet[C3,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[C3,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[Gsharp3,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[C4,t], {t,0,4/k}],
Play[clarinet[Bflat4,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,0.90/k}], Play[silenci[t], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,1/2/k}],
Play[clarinet[Fsharp3,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,0.90/k}],
Play[clarinet[silenci[t]], {t,0,0.10/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[Fsharp3,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[A4,t], {t,0,(1/2)/k}],
Play[clarinet[G3,t], {t,0,2/k}],
Play[clarinet[F3,t], {t,0,1/k}],
Play[clarinet[C3,t], {t,0,3/k}}}]
```

Libiamo ne'lieti calici

Allegretto

G. Verdi (1813-1901)



Experiments aritmètics musicals

Nombres primers

$$N = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

$$M = \{\text{Escala cromàtica}\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$t : N \longrightarrow M, \quad p \mapsto p \pmod{12}$$



Existeixen infinits nombres primers:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \infty$$

NOMBRES PRIMERS

P. Bayer & Ludwig

Alto Sax

Flute

String Ensemble

String Ensemble

Piano

Piano

Acoustic Bass

MM

MM

MM

MM

MM

MM

MM

2

G6

G7/B

Cmaj7

Fmaj7

G/B

C#m

G/B

Gmaj7

Em7

A9

Bm

A

D9



Preguntes matemàtiques

Tota n -pla qualsevol de les quatre notes $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{F, G, B, C\sharp\}$, prové d'un motiu de n nombres primers consecutius coprimers amb 12?

Tota n -pla qualsevol de les 4 notes anteriors, prové d'infinit motius de n nombres primers consecutius?

Els motius de n nombres primers consecutius que s'apliquen en una n -pla de notes donada, s'equilibren en el conjunt de tots els motius de n primers consecutius?

La resposta és sí quan $n = 1$, pel teorema de la progressió aritmètica de Dirichlet.

Experiments musicals associats a sistemes dinàmics

L'aplicació logística

És un model matemàtic (Verhulst, 1845) que regula la dinàmica de poblacions.

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad \mu \in [0, 4], x_1 \in [0, 1]$$

$\mu = 3.569946$ valor crític

$$\#M = m$$

$$t(x_n) = \lfloor mx_n \rfloor$$

$$(\mu, x_1, m) = (2.9, 0.5, 100)$$

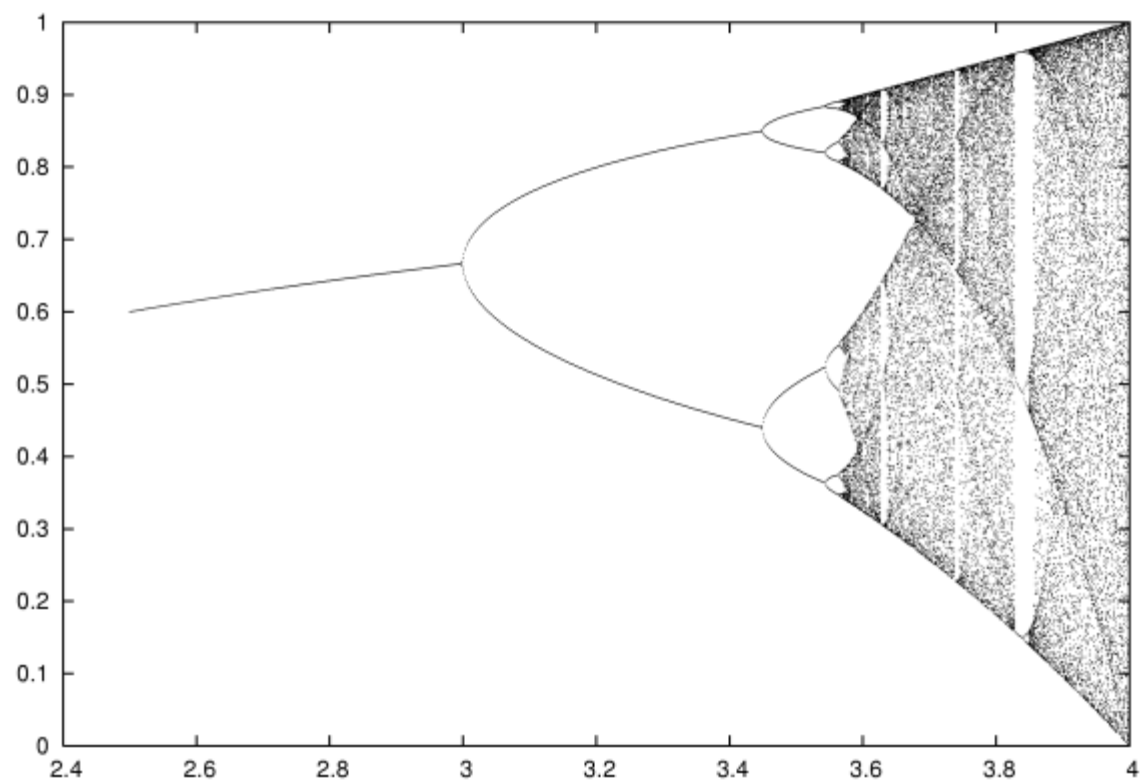
MM

Voice

D G m A7 A D E7 A

9

G A^b m G A^b m G A^b m G Dm Dm Dm Dm G



Verhulst

P. Bayer & Ludwig

String Ensemble

String Ensemble

Flute

Oboe

String Ensemble

String Ensemble

String Ensemble

String Ensemble

Timpani

Piano

Piano

String Ensemble Hard

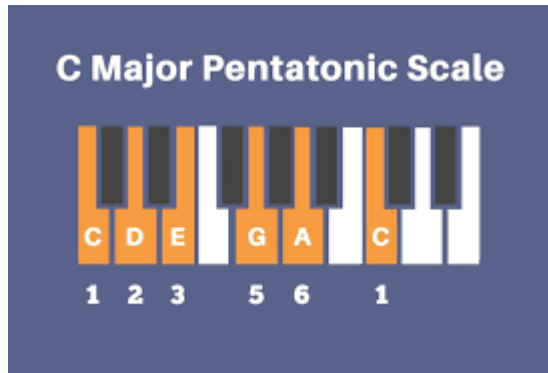
2

D G dim A7 A D E7 A G NC

G A>dim G A>dim G A>dim G Dm Dm Dm Dm G



Experiments combinatoris musicals



S_5 grup de les permutacions de 5 elements

És d'ordre 120.

És el primer grup de permutacions que no és resoluble.

Exercicis Pentatònics (S5, C)

L'objectiu d'aquests programa és calcular totes les permutacions de les notes de l'escala pentatònica per compondre una melodia formada per tres grups ascendents i tres grups descendents de notes diferents d'aquesta escala.

El resultat dels càlculs, programats en llenguatge Mathematica, ha de ser codificable fàcilment en el sistema d'edició de text Lilypond, a fi de facilitar la seva escritura posterior en l'editor de partitures Finale.

Les permutacions es miraran com elements del grup simètric S5, operant sobre les notes de l'escala pentatònica. Per representar-ne els elements utilitzarem, indistintament, la notació habitual de les permutacions o la seva representació per matrius 5x5.

Les entrades de cada permutació ens proporcionaran les notes de la melodia; l'estructura de la matriu de permutació ens proporcionarà el valor de les notes i, per tant, l'estructura rítmica de cada grup de cinc notes.

Aplicarem les notes fixes de qualsevol permutació (respecte de la posició inicial de l'escala) en negres.

Cada permutació serà etiquetada amb un nombre que permetrà calcular el valor de cadascuna de les notes mòbils. Aquestes podran ser corxeres, semicorxeres així com grups de tresets o cinquets.

Inicialització

Aquestes instruccions permeten representar els elements de qualsevol grup simètric en forma de matrius.

```
In[ ]:= PermutationMatrix[p_List] := IdentityMatrix[Length[p]] [[p]]
PermutationMatrices[n_] := PermutationMatrix /@ Permutations[Range[n]]
```

Exemples

```
In[ ]:= PermutationMatrices[5][[4]] // MatrixForm
```

Out[]:=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observem com es generen una permutació i la seva inversa:

```
In[ ]:= {PermutationMatrices[5][[4]].{a, b, c, d, e},
Inverse[PermutationMatrices[5][[4]].{a, b, c, d, e}}}
```

```
Out[ ]:= {{a, b, d, e, c}, {a, b, e, c, d}}
```

Notació

Com que sempre treballarem en el grup simètric S5, fixarem un nom per a la llista de les seves

2 | exercicis_pentatonics20200525.nb

permutacions, expressades en forma de matrius.

```
In[ ]:= L := PermutationMatrices[5]
```

Recordem que les matrius de permutació són unitàries:

```
In[ ]:= Table[L[[n]].Transpose[L[[n]]], {n, 1, 120}] // Union
```

```
Out[ ]:= {{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}}
```

```
In[ ]:= {{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}}
```

```
Out[ ]:= {{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}}
```

```
In[ ]:= Fixos[n_] := Tr[L[[n]]]
```

```
Table[Fixos[n], {n, 1, 120}] // Union
```

```
Out[ ]:= {0, 1, 2, 3, 5}
```

Estudi del grup simètric S5

Les descomposicions en cicles de les permutacions de S5 determinen la seva classe de conjugació.

```
In[ ]:= LS5 = GroupElements[SymmetricGroup[5]];
```

```
In[ ]:= Length[%]
```

```
Out[ ]:= 120
```

```
In[ ]:= C1 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C2 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C3 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2, 3}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C4 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2, 3, 4}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C5 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2, 3, 4, 5}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C22 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2}, {3, 4}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= C23 = GroupOrbits[SymmetricGroup[5], {Cycles[{{1, 2}, {3, 4, 5}}]}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= ClassesConguacioS5 = {"C1", "C2", "C3", "C4", "C5", "C22", "C23"}
```

```
Out[ ]:= {C1, C2, C3, C4, C5, C22, C23}
```

```
In[ ]:= {Length[C1], Length[C2], Length[C3],
Length[C4], Length[C5], Length[C22], Length[C23]}
```

```
Out[ ]:= {1, 10, 20, 30, 24, 15, 20}
```

Taula de caràcters de S5

	CL1	CL2	CL3	CL4	CL5	CL22	CL23
	1	10	20	30	24	15	20
X1	1	1	1	1	1	1	1
X2	1	-1	1	-1	1	1	-1
X3	4	2	1	0	-1	0	-1
X4	4	-2	1	0	-1	0	1
X5	5	1	-1	-1	0	1	1
X6	5	-1	-1	1	0	1	-1
X6	6	0	0	0	1	-2	0

```
Out[1]= {{ {}, CL1, CL2, CL3, CL4, CL5, CL22, CL23 }, { {}, 1, 10, 20, 30, 24, 15, 20 },
  { X1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 }, { X2, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1 }, { X3, 4, 2, 1, 0, -1, 0, -1 },
  { X4, 4, -2, 1, 0, -1, 0, 1 }, { X5, 5, 1, -1, -1, 0, 1, 1 },
  { X6, 5, -1, -1, 1, 0, 1, -1 }, { X6, 6, 0, 0, 0, 1, -2, 0 }}
```

El càlcul de la taula de caràcters de S5 permet individualitzar les classes de conjugació del grup per mitjà de dos dels caràcters irreductibles: el signe (X2) i una de les dues representacions irreductibles de grau 4 (X3).

```
Out[2]= CC1 = {X2[C1], X3[C1]} = {1, 4};
Out[3]= CC2 = {X2[C2], X3[C2]} = {-1, 2};
Out[4]= CC3 = {X2[C3], X3[C3]} = {1, 1};
Out[5]= CC4 = {X2[C4], X3[C4]} = {-1, 0};
Out[6]= CC5 = {X2[C5], X3[C5]} = {1, -1};
Out[7]= CC22 = {X2[C22], X3[C22]} = {1, 0};
Out[8]= CC23 = {X2[C23], X3[C23]} = {-1, -1};
```

Observem que la representació per permutacions de S5 és una permutació reduïble. El seu caràcter, X , és $X1+X3$ i ens determina el nombre d'elements fixos per qualsevol permutació de la classe de conjugació.

```
Out[9]= {X[C1], X[C2], X[C3], X[C4], X[C5], X[C22], X[C23]} = {5, 3, 2, 1, 0, 1, 0}
Out[10]= {5, 3, 2, 1, 0, 1, 0}
```

La funció diagonal

Aquesta funció associarà a cada matriu el nombre que resulta d'interpretar les entrades de la seva diagonal com a xifres binàries.

```
Out[11]= DD[n_] := Diagonal[L[[n]]].{2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0}; SetAttributes[DD, Listable]
```

Etiquetatge de les classes de conjugació

Donada una classe de conjugació, cerquem la posició en la taula L dels seus elements, el valor comú dels caràcters (X2, X3) que la caracteritzen, el seu nombre diagonal, i un nombre que ens fixarà posteriorment el valor dels seus elements mòbils. Aquest darrer nombre serà el mateix per a

tots els elements d'una classe de conjugació donada, llevat del cas de la classe C23.

La classe C1

```
Out[12]= TC1 = Table[Position[LS5, C1[[n]]], {n, 1, Length[C1]}] // Flatten
Out[13]= {1}

Out[14]= DC1 = Table[DD[n], {n, TC1}]
Out[15]= {31}

Out[16]= MC1 = {8}
Out[17]= {8}

Out[18]= EtiquetesC1 = Table[{TC1[[n]], CC1, DC1[[n]], MC1[[n]]}, {n, 1, Length[C1]}]
Out[19]= {{1, {1, 4}, 31, 8}}
```

La classe C2

```
Out[20]= TC2 = Table[Position[LS5, C2[[n]]], {n, 1, Length[C2]}] // Flatten // Sort
Out[21]= {2, 3, 6, 7, 15, 22, 25, 55, 81, 106}

Out[22]= DC2 = Table[DD[n], {n, TC2}]
Out[23]= {28, 25, 26, 19, 21, 22, 7, 11, 13, 14}

Out[24]= MC2 = Table[8, {n, TC2}]
Out[25]= {8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8}

Out[26]= EtiquetesC2 = Table[{TC2[[n]], CC2, DC2[[n]], MC2[[n]]}, {n, 1, Length[C2]}]
Out[27]= {{2, {-1, 2}, 28, 8}, {3, {-1, 2}, 25, 8}, {6, {-1, 2}, 26, 8},
  {7, {-1, 2}, 19, 8}, {15, {-1, 2}, 21, 8}, {22, {-1, 2}, 22, 8}, {25, {-1, 2}, 7, 8},
  {55, {-1, 2}, 11, 8}, {81, {-1, 2}, 13, 8}, {106, {-1, 2}, 14, 8}}
```

La classe C3

```
Out[28]= TC3 = Table[Position[LS5, C3[[n]]], {n, 1, Length[C3]}] // Flatten // Sort
Out[29]= {4, 5, 9, 12, 13, 16, 20, 21, 31, 39, 46, 49, 57, 60, 75, 79, 82, 100, 104, 105}

Out[30]= DC3 = Table[DD[n], {n, TC3}]
Out[31]= {24, 24, 17, 18, 17, 20, 18, 20, 3, 5, 6, 3, 9, 10, 5, 9, 12, 6, 10, 12}

Out[32]= Length[TC3] = Length[DC3]
Out[33]= True

Out[34]= Table[BaseForm[DC3[[n]], 2], {n, 1, Length[DC3]}] // Union
Out[35]= {112, 1012, 1102, 10012, 10102, 11002, 100012, 100102, 101002, 110002}
```

Tindrem dos tipus de cicles d'ordre 3, que corresponen als valors diagonals {3, 17, 24} i a la resta.

Les permutacions de la primera classe aniran a tresets, atès que presenten tres elements mòbils

correlatiu.

Les de la resta aniran a corxeres.

$In[] :=$ DC33 = {3, 17, 24}

$Out[] :=$ {3, 17, 24}

$In[] :=$ DC38 = Complement[DC3, DC33]

$Out[] :=$ {5, 6, 9, 10, 12, 18, 20}

$In[] :=$ CaracteristicaDC33[n_] := Boole[MemberQ[DC33, DC3[[n]]]

$In[] :=$ CaracteristicaDC38[n_] := Boole[MemberQ[DC38, DC3[[n]]]

$In[] :=$ VC3[n_] := 3 / 2 CaracteristicaDC33[n] + 8 CaracteristicaDC38[n]

$In[] :=$ EtiquetesC3 = Table[{TC3[[n]], CC3, DC3[[n]], VC3[n]}, {n, 1, Length[C3]}]

$Out[] :=$ $\left\{ \left\{ 4, \{1, 1\}, 24, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ 5, \{1, 1\}, 24, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ 9, \{1, 1\}, 17, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ 12, \{1, 1\}, 18, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 13, \{1, 1\}, 17, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ 16, \{1, 1\}, 20, 8 \right\}, \left\{ 20, \{1, 1\}, 18, 8 \right\}, \left\{ 21, \{1, 1\}, 20, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 31, \{1, 1\}, 3, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ 39, \{1, 1\}, 5, 8 \right\}, \left\{ 46, \{1, 1\}, 6, 8 \right\}, \left\{ 49, \{1, 1\}, 3, \frac{3}{2} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 57, \{1, 1\}, 9, 8 \right\}, \left\{ 60, \{1, 1\}, 10, 8 \right\}, \left\{ 75, \{1, 1\}, 5, 8 \right\}, \left\{ 79, \{1, 1\}, 9, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 82, \{1, 1\}, 12, 8 \right\}, \left\{ 100, \{1, 1\}, 6, 8 \right\}, \left\{ 104, \{1, 1\}, 10, 8 \right\}, \left\{ 105, \{1, 1\}, 12, 8 \right\} \right\}$

La classe C4

$In[] :=$ TC4 = Table[Position[LS5, C4[[n]]], {n, 1, Length[C4]}] // Flatten // Sort

$Out[] :=$ {10, 11, 14, 18, 19, 23, 33, 36, 37, 40, 44, 45, 51, 54,
58, 59, 63, 70, 73, 76, 80, 84, 85, 96, 98, 99, 103, 107, 110, 119}

$In[] :=$ DC4 = Table[DD[n], {n, TC4}]

$Out[] :=$ {16, 16, 16, 16, 16, 16, 1, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 2, 8, 8, 1, 2, 1, 4, 8, 8, 1, 4, 2, 4, 8, 8, 2, 4}

$In[] :=$ Length[TC4] = Length[DC4]

$Out[] :=$ True

$In[] :=$ Table[BaseForm[DC4[[n]], 2], {n, 1, Length[DC4]}] // Union

$Out[] :=$ {1₂, 10₂, 100₂, 1000₂, 10000₂}

Tindrem dos tipus de permutacions que mouen 4 elements, que corresponen als valors diagonals {1, 16} i a la resta.

Les permutacions del primer tipus aniran a semicorxeres, atès que presenten quatre elements mòbils correlatiu.

Les de la resta aniran a corxeres.

$In[] :=$ DC46 = {1, 16}

$Out[] :=$ {1, 16}

$In[] :=$ DC48 = Complement[DC4, DC46]

$Out[] :=$ {2, 4, 8}

$In[] :=$ CaracteristicaDC46[n_] := Boole[MemberQ[DC46, DC4[[n]]]

$In[] :=$ CaracteristicaDC48[n_] := Boole[MemberQ[DC48, DC4[[n]]]

$In[] :=$ VC4[n_] := 16 CaracteristicaDC46[n] + 8 CaracteristicaDC48[n]

$In[] :=$ EtiquetesC4 = Table[{TC4[[n]], CC4, DC4[[n]], VC4[n]}, {n, 1, Length[C4]}]

$Out[] :=$ $\left\{ \left\{ 10, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \left\{ 11, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \left\{ 14, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 18, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \left\{ 19, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \left\{ 23, \{-1, 0\}, 16, 16 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 33, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 36, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \left\{ 37, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 40, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 44, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \left\{ 45, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\}, \left\{ 51, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 54, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 58, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \left\{ 59, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \left\{ 63, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 70, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 73, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 76, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\}, \left\{ 80, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \left\{ 84, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 85, \{-1, 0\}, 1, 16 \right\}, \left\{ 96, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\}, \left\{ 98, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \left\{ 99, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 103, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \left\{ 107, \{-1, 0\}, 8, 8 \right\}, \left\{ 110, \{-1, 0\}, 2, 8 \right\}, \left\{ 119, \{-1, 0\}, 4, 8 \right\} \right\}$

La classe C5

$In[] :=$ TC5 = Table[Position[LS5, C5[[n]]], {n, 1, Length[C5]}] // Flatten // Sort

$Out[] :=$ {34, 35, 38, 42, 43, 47, 52, 53, 64, 65, 69,
72, 74, 78, 86, 90, 91, 94, 97, 101, 109, 113, 116, 117}

$In[] :=$ DC5 = Table[DD[n], {n, TC5}];

$In[] :=$ Length[TC5] = Length[DC5]

$Out[] :=$ True

$In[] :=$ VC5[n_] := 5 / 4

$In[] :=$ EtiquetesC5 = Table[{TC5[[n]], CC5, DC5[[n]], VC5[n]}, {n, 1, Length[C5]}]

$Out[] :=$ $\left\{ \left\{ 34, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 35, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 38, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 42, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 43, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 47, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 52, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 53, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 64, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 65, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 69, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 72, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 74, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 78, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 86, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 90, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 91, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 94, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 97, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 101, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ 109, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 113, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 116, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\}, \left\{ 117, \{1, -1\}, 0, \frac{5}{4} \right\} \right\}$

$In[] :=$ Length[EtiquetesC5] = Length[C5]

$Out[] :=$ True


```

{61, {1, 0}, 1, 8}, {62, {-1, -1}, 0, 8}, {63, {-1, 0}, 1, 16}, {64, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ },
{65, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {66, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {67, {-1, -1}, 0, 8}, {68, {1, 0}, 2, 8},
{69, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {70, {-1, 0}, 2, 8}, {71, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {72, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ },
{73, {-1, 0}, 1, 16}, {74, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {75, {1, 1}, 5, 8}, {76, {-1, 0}, 4, 8},
{77, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {78, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {79, {1, 1}, 9, 8}, {80, {-1, 0}, 8, 8},
{81, {-1, 2}, 13, 8}, {82, {1, 1}, 12, 8}, {83, {1, 0}, 8, 8}, {84, {-1, 0}, 8, 8},
{85, {-1, 0}, 1, 16}, {86, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {87, {1, 0}, 1, 8}, {88, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ },
{89, {-1, -1}, 0, 8}, {90, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {91, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {92, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ },
{93, {-1, -1}, 0, 8}, {94, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {95, {1, 0}, 4, 8}, {96, {-1, 0}, 4, 8},
{97, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {98, {-1, 0}, 2, 8}, {99, {-1, 0}, 4, 8}, {100, {1, 1}, 6, 8},
{101, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {102, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {103, {-1, 0}, 8, 8},
{104, {1, 1}, 10, 8}, {105, {1, 1}, 12, 8}, {106, {-1, 2}, 14, 8},
{107, {-1, 0}, 8, 8}, {108, {1, 0}, 8, 8}, {109, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {110, {-1, 0}, 2, 8},
{111, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {112, {1, 0}, 2, 8}, {113, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ },
{114, {-1, -1}, 0, 8}, {115, {-1, -1}, 0,  $\frac{3}{2}$ }, {116, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ },
{117, {1, -1}, 0,  $\frac{5}{4}$ }, {118, {-1, -1}, 0, 8}, {119, {-1, 0}, 4, 8}, {120, {1, 0}, 4, 8}
In[ ]:= Length[EtiquetesL]
Out[ ]:= 120

```

Exemple d'aplicació

La permutació 17 de la taula és producte de dues transposicions. Els elements mòbils s'aplicaran en corxeres:

```

In[ ]:= EtiquetesL[[17]]
Out[ ]:= {17, {1, 0}, 16, 8}

```

La permutació 67 de la taula és producte d'un cicle d'ordre 2 per un cicle d'ordre 3. El treset estarà format per les tres segones.

```

In[ ]:= EtiquetesL[[67]]
Out[ ]:= {67, {-1, -1}, 0, 8}

```

```

In[ ]:= L[[67]] // MatrixForm

```

```

Out[ ]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


```

Càlcul de la funció valor

Ara cal interpretar en forma de valors musicals les entrades 4 de les etiquetes.

```

In[ ]:= EtiquetesL1 = Flatten[EtiquetesL, 1];

```

```

In[ ]:= TE = Table[EtiquetesL1[[n]], {n, 2, Length[EtiquetesL1], 2}];

```

```

In[ ]:= Partition[TE, 2] // Union

```

```

Out[ ]:= {{{-1, -1},  $\frac{3}{2}$ }, {{-1, -1}, 8}, {{-1, 0}, 8}, {{-1, 0}, 16}, {{-1, 2}, 8},
{{1, -1},  $\frac{5}{4}$ }, {{1, 0}, 8}, {{1, 1},  $\frac{3}{2}$ }, {{1, 1}, 8}, {{1, 4}, 8}}
```

```

In[ ]:= p[n_] := EtiquetesL[[n]][[4]]

```

```

In[ ]:= EE = Table[p[n], {n, 1, Length[EtiquetesL]}]

```

```

Out[ ]:= {8, 8, 8,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8, 8, 8,  $\frac{3}{2}$ , 16, 16, 8,  $\frac{3}{2}$ , 16, 8, 8, 8, 16, 16, 8, 8, 8, 16,
8, 8, 8, 8, 8, 8,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 16,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{5}{4}$ , 8, 16,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8, 8,  $\frac{5}{4}$ ,
 $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 16,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 16,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8, 8,  $\frac{5}{4}$ , 8,  $\frac{3}{2}$ ,
 $\frac{5}{4}$ , 16,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8, 8, 8, 8, 16,  $\frac{5}{4}$ , 8,  $\frac{3}{2}$ , 8,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8,  $\frac{5}{4}$ , 8,
8,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8, 8,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8, 8, 8, 8, 8, 8,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 8, 8, 8}
```

```

In[ ]:= Length[EE]

```

```

Out[ ]:= 120

```

Exemple d'aplicació

```

In[ ]:= {p[1], p[2], p[4], p[10], p[34], p[8], p[28]}

```

```

Out[ ]:= {8, 8,  $\frac{3}{2}$ , 16,  $\frac{5}{4}$ , 8, 8}

```

```

In[ ]:= (4 - EE[[7]]) Diagonal[L[[7]]] + EE[[7]]

```

```

Out[ ]:= {4, 8, 8, 4, 4}

```



```

In[1]:= L[[7]] {4, 8, 8, 4, 4} // MatrixForm
Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$


In[2]:= %.{c, d, e, g, a}
Out[2]= {4 c, 8 e, 8 d, 4 g, 4 a}

In[3]:= (4 - EE[[10]]) Diagonal[L[[10]]] + EE[[10]]
Out[3]= {4, 16, 16, 16, 16}

In[4]:= L[[10]] {4, 16, 16, 16, 16} // MatrixForm
Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


In[5]:= %.{c, d, e, g, a}
Out[5]= {4 c, 16 e, 16 g, 16 a, 16 d}

In[6]:= L[[7]] {4, 8, 8, 4, 4} // MatrixForm
Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$


In[7]:= %.{c, d, e, g, a}
Out[7]= {4 c, 8 e, 8 d, 4 g, 4 a}

In[8]:= Valors[n_] := (4 - EE[[n]]) Diagonal[L[[n]]] + EE[[n]]
In[9]:= V = Table[Valors[n], {n, 1, 120}];
In[10]:= TV = Table[L[[n]] * Valors[n], {n, 1, 120}];

```

Exemples

```

In[1]:= {TV[[1]], TV[[47]], TV[[105]], TV[[106]], TV[[115]], TV[[119]], TV[[120]]}
Out[1]= {{ {4, 0, 0, 0, 0}, {0, 4, 0, 0, 0}, {0, 0, 4, 0, 0}, {0, 0, 0, 4, 0}, {0, 0, 0, 0, 4}},
{{ {0, 5, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 5}, {0, 0, 0, 5, 0}, {5, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 5, 0, 0}},
{{ {0, 0, 0, 0, 8}, {0, 4, 0, 0, 0}, {0, 0, 4, 0, 0}, {8, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 8, 0}},
{{ {0, 0, 0, 0, 8}, {0, 4, 0, 0, 0}, {0, 0, 4, 0, 0}, {0, 0, 0, 4, 0}, {8, 0, 0, 0, 0}},
{{ {0, 0, 0, 0, 3}, {0, 0, 0, 3, 0}, {3, 0, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0, 0}, {0, 0, 3, 0, 0}},
{{ {0, 0, 0, 0, 8}, {0, 0, 0, 8, 0}, {0, 0, 4, 0, 0}, {8, 0, 0, 0, 0}, {0, 8, 0, 0, 0}},
{{ {0, 0, 0, 0, 8}, {0, 0, 0, 8, 0}, {0, 0, 4, 0, 0}, {0, 8, 0, 0, 0}, {8, 0, 0, 0, 0}}}

```

Necessitarem modificar aquests valors per als elements de la classe C23, atès que aquesta classe dóna lloc a dos tipus diferents: C232, C233, segons que el número 1 formi part del cicle d'ordre 2 o del d'ordre 3, respectivament.

```

In[2]:= TC232 = Table[TC23[[n]], {n, 1, 8}]
Out[2]= {28, 29, 62, 67, 89, 93, 114, 118}

In[3]:= TC233 = Table[TC23[[n]], {n, 9, Length[TC23]}]
Out[3]= {32, 41, 48, 50, 71, 66, 77, 92, 88, 102, 115, 111}

In[4]:= CaracteristicaTC232[n_] := Boole[MemberQ[TC232, n]]
In[5]:= CaracteristicaTC233[n_] := Boole[MemberQ[TC233, n]]

In[6]:= ValorsModificats[n_] :=
(Valors[n] + {0, 0, 3/2 - 8, 3/2 - 8, 3/2 - 8}) * CaracteristicaTC232[n] +
(Valors[n] + {0, 0, 0, 8 - 3/2, 8 - 3/2}) * CaracteristicaTC233[n] +
Valors[n] (1 - CaracteristicaTC232[n]) * (1 - CaracteristicaTC233[n])

In[7]:= Table[ValorsModificats[n], {n, TC232}];
In[8]:= Table[ValorsModificats[n], {n, TC233}];
In[9]:= {ValorsModificats[1], ValorsModificats[28], ValorsModificats[115]}
Out[9]= {{4, 4, 4, 4, 4}, {8, 8, 3/2, 3/2, 3/2}, {3/2, 3/2, 3/2, 8, 8}}

In[10]:= TVM = Table[L[[n]] * ValorsModificats[n], {n, 1, 120}];

```

Primer compàs

```

In[1]:= PrimerCompas = Table[{n, TVM[[n]].{c, d, e, g, a}}, {n, 1, 120}] // MatrixForm
Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & \{4 c, 4 d, 4 e, 4 g, 4 a\} \\ 2 & \{4 c, 4 d, 4 e, 8 a, 8 g\} \\ 3 & \{4 c, 4 d, 8 g, 8 e, 4 a\} \\ 4 & \{4 c, 4 d, \frac{3 g}{2}, \frac{3 a}{2}, \frac{3 e}{2}\} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$


```

5	$\{4c, 4d, \frac{5e}{2}, \frac{5g}{2}, \frac{5a}{2}\}$
6	$\{4c, 4d, 8a, 4g, 8e\}$
7	$\{4c, 8e, 8d, 4g, 4a\}$
8	$\{4c, 8e, 8d, 8a, 8g\}$
9	$\{4c, \frac{3e}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{3d}{2}, 4a\}$
10	$\{4c, 16e, 16g, 16a, 16d\}$
11	$\{4c, 16e, 16a, 16d, 16g\}$
12	$\{4c, 8e, 8a, 4g, 8d\}$
13	$\{4c, \frac{3g}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{3e}{2}, 4a\}$
14	$\{4c, 16g, 16d, 16a, 16e\}$
15	$\{4c, 8g, 4e, 8d, 4a\}$
16	$\{4c, 8g, 4e, 8a, 8d\}$
17	$\{4c, 8g, 8a, 8d, 8e\}$
18	$\{4c, 16g, 16a, 16e, 16d\}$
19	$\{4c, 16a, 16d, 16e, 16g\}$
20	$\{4c, 8a, 8d, 4g, 8e\}$
21	$\{4c, 8a, 4e, 8d, 8g\}$
22	$\{4c, 8a, 4e, 4g, 8d\}$
23	$\{4c, 16a, 16g, 16d, 16e\}$
24	$\{4c, 8a, 8g, 8e, 8d\}$
25	$\{8d, 8c, 4e, 4g, 4a\}$
26	$\{8d, 8c, 4e, 8a, 8g\}$
27	$\{8d, 8c, 8g, 8e, 4a\}$
28	$\{8d, 8c, \frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3e}{2}\}$
29	$\{8d, 8c, \frac{3a}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3g}{2}\}$
30	$\{8d, 8c, 8a, 4g, 8e\}$
31	$\{\frac{3d}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3c}{2}, 4g, 4a\}$
32	$\{\frac{3d}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3c}{2}, 8a, 8g\}$
33	$\{16d, 16e, 16g, 16c, 4a\}$
34	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}\}$
35	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5g}{4}\}$
36	$\{8d, 8e, 8a, 4g, 8c\}$
37	$\{16d, 16g, 16c, 16e, 4a\}$
38	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}\}$
39	$\{8d, 8g, 4e, 8c, 4a\}$
40	$\{8d, 8g, 4e, 8a, 8c\}$
41	$\{\frac{3d}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, 8c, 8e\}$
42	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5c}{4}\}$
43	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5g}{4}\}$
44	$\{8d, 8a, 8c, 4g, 8e\}$
45	$\{8d, 8a, 4e, 8c, 8g\}$
46	$\{8d, 8a, 4e, 4g, 8c\}$
47	$\{\frac{5d}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5e}{4}\}$
48	$\{\frac{3d}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3g}{2}, 8e, 8c\}$
49	$\{\frac{3e}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3d}{2}, 4g, 4a\}$
50	$\{3e, 3c, 3d, 8a, 8g\}$

50	$\{\frac{5e}{2}, \frac{5c}{2}, \frac{5d}{2}, 8a, 8g\}$
51	$\{16e, 16c, 16g, 16d, 4a\}$
52	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}\}$
53	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5g}{4}\}$
54	$\{8e, 8c, 8a, 4g, 8d\}$
55	$\{8e, 4d, 8c, 4g, 4a\}$
56	$\{8e, 4d, 8c, 8a, 8g\}$
57	$\{8e, 4d, 8g, 8c, 4a\}$
58	$\{8e, 4d, 8g, 8a, 8c\}$
59	$\{8e, 4d, 8a, 8c, 8g\}$
60	$\{8e, 4d, 8a, 4g, 8c\}$
61	$\{8e, 8g, 8c, 8d, 4a\}$
62	$\{8e, 8g, \frac{3c}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3d}{2}\}$
63	$\{16e, 16g, 16d, 16c, 4a\}$
64	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}\}$
65	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4}\}$
66	$\{\frac{3e}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, 8d, 8c\}$
67	$\{8e, 8a, \frac{3c}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{3g}{2}\}$
68	$\{8e, 8a, 8c, 4g, 8d\}$
69	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5g}{4}\}$
70	$\{8e, 8a, 8d, 4g, 8c\}$
71	$\{\frac{3e}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3g}{2}, 8c, 8d\}$
72	$\{\frac{5e}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5c}{4}\}$
73	$\{16g, 16c, 16d, 16e, 4a\}$
74	$\{\frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}\}$
75	$\{8g, 8c, 4e, 8d, 4a\}$
76	$\{8g, 8c, 4e, 8a, 8d\}$
77	$\{\frac{3g}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3a}{2}, 8d, 8e\}$
78	$\{\frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5d}{4}\}$
79	$\{8g, 4d, 8c, 8e, 4a\}$
80	$\{8g, 4d, 8c, 8a, 8e\}$
81	$\{8g, 4d, 4e, 8c, 4a\}$
82	$\{8g, 4d, 4e, 8a, 8c\}$
83	$\{8g, 4d, 8a, 8c, 8e\}$
84	$\{8g, 4d, 8a, 8e, 8c\}$
85	$\{16g, 16e, 16c, 16d, 4a\}$
86	$\{\frac{5g}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}\}$
87	$\{8g, 8e, 8d, 8c, 4a\}$
88	$\{\frac{3g}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3d}{2}, 8a, 8c\}$
89	$\{8g, 8e, \frac{3a}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3d}{2}\}$
90	$\{\frac{5g}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5c}{4}\}$
91	$\{\frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5e}{4}\}$
92	$\{\frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3c}{2}, 8e, 8d\}$

93	$\left\{ 8g, 8a, \frac{3d}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3e}{2} \right\}$
94	$\left\{ \frac{5g}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5c}{4} \right\}$
95	$\{8g, 8a, 4e, 8c, 8d\}$
96	$\{8g, 8a, 4e, 8d, 8c\}$
97	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5g}{4} \right\}$
98	$\{8a, 8c, 8d, 4g, 8e\}$
99	$\{8a, 8c, 4e, 8d, 8g\}$
100	$\{8a, 8c, 4e, 4g, 8d\}$
101	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5e}{4} \right\}$
102	$\left\{ \frac{3a}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3g}{2}, 8e, 8d \right\}$
103	$\{8a, 4d, 8c, 8e, 8g\}$
104	$\{8a, 4d, 8c, 4g, 8e\}$
105	$\{8a, 4d, 4e, 8c, 8g\}$
106	$\{8a, 4d, 4e, 4g, 8c\}$
107	$\{8a, 4d, 8g, 8c, 8e\}$
108	$\{8a, 4d, 8g, 8e, 8c\}$
109	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5g}{4} \right\}$
110	$\{8a, 8e, 8c, 4g, 8d\}$
111	$\left\{ \frac{3a}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3d}{2}, 8c, 8g \right\}$
112	$\{8a, 8e, 8d, 4g, 8c\}$
113	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5d}{4} \right\}$
114	$\left\{ 8a, 8e, \frac{3g}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{3c}{2} \right\}$
115	$\left\{ \frac{3a}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{3c}{2}, 8d, 8e \right\}$
116	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5e}{4}, \frac{5d}{4} \right\}$
117	$\left\{ \frac{5a}{4}, \frac{5g}{4}, \frac{5d}{4}, \frac{5c}{4}, \frac{5e}{4} \right\}$
118	$\{8a, 8g, \frac{3d}{2}, \frac{3e}{2}, \frac{3c}{2}\}$
119	$\{8a, 8g, 4e, 8c, 8d\}$
120	$\{8a, 8g, 4e, 8d, 8c\}$

```
In[ ]:= PrimerCompas[1][17][2]
```

```
Out[ ]:= {4c, 8g, 8a, 8d, 8e}
```

Els motius

```
In[ ]:= MotiuAscendent := Transpose[{{c, d, e, g, a}, {d, e, g, a, c}, {e, g, a, c, d}}]
```

```
In[ ]:= TaulaMotius1 = Table[Transpose[L[[n]].MtiuAscendent], {n, 1, 120}];
```

```
In[ ]:= TaulaMotius1[2]
```

```
Out[ ]:= {{c, d, e, a, g}, {d, e, g, c, a}, {e, g, a, d, c}}
```

```
In[ ]:= TaulaMotius2Aux = Table[Reverse[Flatten[TaulaMotius1[[n]]], {n, 1, 120}] // Flatten;
```

```
In[ ]:= TaulaMotius2Aux;
```

```
In[ ]:= TaulaMotius2 = Partition[Partition[TaulaMotius2Aux, 5], 3];
```

```
In[ ]:= TaulaMotius2[[2]]
```

```
Out[ ]:= {{c, d, a, g, e}, {a, c, g, e, d}, {g, a, e, d, c}}
```

La partitura

Començarem per crear el motiu que serà posteriorment permutat de totes les maneres possibles.

Notem que el mateix programa es pot aplicar a qualsevol motiu format per un total de 15 notes.

Nosaltres hem partit de la base de les cinc notes de l'escala pentatònica de C.

```
In[ ]:= Taula1 = Table[{n, Transpose[TVM[[n]].MotiuAscendent]}, {n, 1, 120}] // MatrixForm;
```

```
In[ ]:= Taula1[[1]][1]
```

```
Out[ ]:= {1, {{4c, 4d, 4e, 4g, 4a}, {4d, 4e, 4g, 4a, 4c}, {4e, 4g, 4a, 4c, 4d}}}
```

```
In[ ]:= Taula1[[1]][28]
```

```
Out[ ]:= {28, {{8d, 8c, \frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3e}{2}}, {8e, 8d, \frac{3a}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3g}{2}}, {8g, 8e, \frac{3c}{2}, \frac{3d}{2}, \frac{3a}{2}}}}
```

```
In[ ]:= Taula1[[1]][41]
```

```
Out[ ]:= {41, {{\frac{3d}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{3a}{2}, 8c, 8e}, {\frac{3e}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{3c}{2}, 8d, 8g}, {\frac{3g}{2}, \frac{3c}{2}, \frac{3d}{2}, 8e, 8a}}}}
```

```
In[ ]:= Style[Taula1[[1]][3], Small]
```

```
Out[ ]:= {3, {{4c, 4d, 8g, 8e, 4a}, {4d, 4e, 8a, 8g, 4c}, {4e, 4g, 8c, 8a, 4d}}}
```

```
In[ ]:= {TaulaMotius2[[2]], ValorsModificats[2]}
```

```
Out[ ]:= {{{c, d, a, g, e}, {a, c, g, e, d}, {g, a, e, d, c}}, {4, 4, 4, 8, 8}}
```

```
In[ ]:= {c, d, a, g, e} {4, 4, 4, 8, 8}
```

```
Out[ ]:= {4c, 4d, 4a, 8g, 8e}
```

```
In[ ]:= TaulaMotius2[[2]]
```

```
Out[ ]:= {{c, d, a, g, e}, {a, c, g, e, d}, {g, a, e, d, c}}
```

```
In[ ]:= Taula2 = Table[{TaulaMotius2[[n]][m] × ValorsModificats[n]},
```

```
{n, 1, 120}, {m, 1, 3}] // MatrixForm;
```

```
Taula2[[
```

```
1]][
```

```
2]]
```

```
Out[ ]:= {{{4c, 4d, 4a, 8g, 8e}}, {{4a, 4c, 4g, 8e, 8d}}, {{4g, 4a, 4e, 8d, 8c}}}
```

```
In[ ]:= Barra[n_] := Text["Final"]
```

```
In[ ]:= TaulaFinal = Table[Barra[n], {n, 1, 120}];
```

```
In[ ]:= {Taula1[[1]][2], Taula2[[1]][2], TaulaFinal[2]}
```

```
Out[ ]:= {2, {{4c, 4d, 4e, 8a, 8g}, {4d, 4e, 4g, 8c, 8a}, {4e, 4g, 4a, 8d, 8c}}},  
{{{4c, 4d, 4a, 8g, 8e}}, {{4a, 4c, 4g, 8e, 8d}}, {{4g, 4a, 4e, 8d, 8c}}}, Final]
```

```
In[ ]:= R = Riffle[Taula1[[1]], Taula2[[1]]];
```



```
log[*] = P = Style[MatrixForm[Partitura], Small];
```

Preparació de la partitura en codi Lilypond

```

in(*)= P4 = P / . {4 c → c4, 4 d → d4, 4 e → e4, 4 g → g4, 4 a → a4};

in(*)= P48 = P4 / . {8 c → c8, 8 d → d8, 8 e → e8, 8 g → g8, 8 a → a8};

in(*)= P483 = P48 / . {3 c → c3, 3 d → d3, 3 e → e3, 3 g → g3, 3 a → a3};

in(*)= P48316 = P483 / . {16 c → c16, 16 d → d16, 16 e → e16, 16 g → g16, 16 a → a16};

in(*)= P4831632 =
      P48316 / . {3 / 2 c → c3 / 2, 3 / 2 d → d3 / 2, 3 / 2 e → e3 / 2, 3 / 2 g → g3 / 2, 3 / 2 a → a3 / 2};

in(*)= P483163254 = P4831632 / .
      {5 / 4 c → c5 / 4, 5 / 4 d → d5 / 4, 5 / 4 e → e5 / 4, 5 / 4 g → g5 / 4, 5 / 4 a → a5 / 4};

in(*)= Partituralilypond = P483163254

```

[illegible]

	24	C4	A8	g8	e8	d8	d4	C8	a8	g8	e8	e4	C8	a8	g8	g4	A8	C8	d8	e8	e4	g8	a8	C8	d8	d4	e8	g8				
	25	d8	C8	e4	g4	a4	e8	d8	d4	a4	C8	g8	e8	a4	C4	d4	d8	C8	a4	e4	g4	C8	a8	g4	d4	e4	a8	g8	e4			
	26	d8	C8	e4	a8	g8	e8	d8	d4	C8	a8	g8	a4	C8	d8	C8	d8	C8	a8	e8	g8	a8	C8	g4	d8	e8	g8	a8	e4			
	27	d8	C8	g8	e8	a4	e8	d8	a8	C8	g4	C8	g8	e8	C8	a8	a8	C8	e8	g4	C8	a8	C8	d8	e4	a8	e8	g8	e4			
	28	d8	C8	<u>g7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>		
	29	d8	C8	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>		
	30	d8	C8	a8	e4	g8	e8	d8	C8	a4	g8	g8	e8	d8	C4	a8	a8	C8	e8	e4	g8	g8	a8	C8	d4	e8	e8	g8	a8	e4		
	31	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	
	32	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	<u>a7</u>	<u>e7</u>	<u>d7</u>	
	33	d16	e16	g16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	g16	a16	e16	g16	
	34	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>
	35	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>	<u>e5</u>	<u>a5</u>
	36	d8	e8	a8	g4	C8	e8	g8	C8	a4	e8	g8	a8	d8	C4	a8	e8	C8	d8	a4	g8	d8	C8	g4	e8	C8	g8	a8	e8	g8	a8	e8
	37	d16	g16	e16	a16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	a16	e16	g16	a16	e16	g16	
	38	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>	<u>e4</u>	<u>a4</u>
	39	d8	g8	e4	C8	a4	e8	a8	a4	C8	d8	C8	a8	a4	e8	d8	e8	a4	C8	g4	C8	d8	C8	g4	a8	e4	a8	e4	a8	C8	e4	a8
	40	d8	g8	e4	a8	C8	e8	a8	a4	C8	d8	C8	a4</																			

62

Exercicis Pentatònics (S5, C)

P. Bayer

P1(Id) $\text{♩} = 180$

Ac. Gtr. 

P2(4,5)

Gtr. 

P3(3,4)

Gtr. 

P4(3,4,5)

Gtr. 

P5(3,5,4)

Gtr. 

P6(3,5)

Gtr. 

P7(2,3)

Gtr. 

P8(2,3)(4,5)

Gtr. 



Mathematica → Lilypond → Frescobaldy → Acrobat → Finale → MIDI

2

Exercicis Pentatònics (S5, C)

P9(2,3,4)



4

Exercicis Pentatònics (S5, C)

P25(1,2)



P26(1,2)(4,5)



P27(1,2)(3,4)



P28(1,2)(3,5,4)



P29(1,2)(3,5,4)



P30(1,2)(3,5)



P31(1,2,3)



P32(1,2,3)(45)



Exercicis Pentatònics (S5, C)

5

P33(1,2,3,4)



P34(1,2,3,4,5)



P35(1,2,3,5,4)



P36(1,2,3,5)



P37(1,2,4,3)



P38(1,2,4,5,3)



P39(1,2,4)



P40(1,2,4,5)



6 Exercicis Pentatònics (S5, C)

P41(1,2,4)(3,5)
210

P42(1,2,4,3,5)
213

P43(1,2,5,4,3)
219

P44(1,2,5,3)
225

P45(1,2,5,4)
231

P46(1,2,5)
237

P47(1,2,5,3,4)
243

P48(1,2,5)(3,4)
249

Exercicis Pentatònics (S5, C) 7

P49(1,3,2)
252

P50(1,3,2)(4,5)
255

P51(1,3,4,2)
261

P52(1,3,4,5,2)
264

P53(1,3,5,4,2)
270

P54(1,3,5,2)
276

P55(1,3)
282

P56(1,3)(4,5)
285

8

Exercicis Pentatònics (S5, C)

P57(1,3,4)



P58(1,3,4,5)



P59(1,3,5,4)



P60(1,3,5)



P61(1,3)(2,4)



P62(1,3)(2,4,5)



P63(1,3,2,4)



P64(1,3,2,4,5)



Exercicis Pentatònics (S5, C)

9

P65(1,3,5,2,4,)



P66(1,3,5)(2,4)



P67(1,3)(2,5,4)



P68(1,3)(2,5)



P69(1,3,2,5,4)



P70(1,3,2,5)



P71(1,3,4)(2,5)



P72(1,3,4,2,5)





12

Exercicis Pentatònics (S5, C)

P89(1,4)(2,5,3)

462

P90(1,4,2,3,5)

465

P91(1,4,2,5,3)

471

P92(1,4,3)(2,5)

477

P93(1,4)(2,5,3)

490

P94(1,4,3,2,5)

493

P95(1,4)(2,5)

496

P96(1,4,2,5)

495

Exercicis Pentatònics (S5, C)

13

P97(1,5,4,3,2)

501

P98(1,5,3,2)

507

P99(1,5,4,2)

513

P100(1,5,2)

519

P101(1,5, 3, 4, 2)

525

P102(1,5,2)(3,4)

531

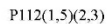
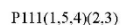
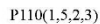
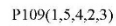
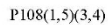
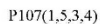
P103(1,5,4,3)

534

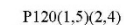
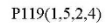
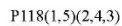
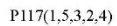
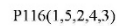
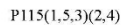
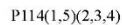
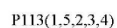
P104(1,5,3)

540

14
P105(1,5,4)



15



Experiments musicals en teoria de grafs

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ conjunt de totes les classes de notes musicals del sistema temperat, format per 12 semitons.

$\mathcal{N} = \{0, \dots, 11\}$ conjunt de les 12 notes de l'escala cromàtica

Sigui $A \subseteq \mathcal{N}$ un acord. La **funció característica de A** , $\chi_A : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, es defineix com

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \in A \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

La **transformada finita de Fourier d'un acord A** de funció característica χ_A és

$$a_n = \widehat{\chi}_A(n) = \sum_{m \in A} \chi_A(m) \omega^{-nm}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{12}}, \quad \text{per a } 0 \leq n \leq 11.$$

El valor de a_n és el n -èsim coeficient de Fourier de χ_A .

Exemple numèric

Considerem l'acord triada $\mathbf{C} = \{do, mi, sol\} = \{0, 4, 7\} \subseteq \mathcal{N}$.

La seva funció característica és

$$\chi_{\mathbf{C}} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

i la seva transformada finita de Fourier és

$$\hat{\chi}_{\mathbf{C}} = \left(3, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, 1, 2 + i, -\sqrt{3}i, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i, \right. \\ \left. 1, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i, \sqrt{3}i, 2 - i, 1, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i \right).$$

Observem que existeix una simetria entre els coeficients de Fourier: per a tot $n \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, es té que $a_n = \overline{a_{12-n}}$.

Coordenades tòriques de les tríades

$ a_0 $	$ a_1 $	$ a_2 $	$ a_3 $	$ a_4 $	$ a_5 $	$ a_6 $	$ a_7 $	$ a_8 $	$ a_9 $	$ a_{10} $	$ a_{11} $
3	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

	$\arg(a_3)$	$\arg(a_5)$		$\arg(a_3)$	$\arg(a_5)$
<i>Do M</i>	0.464	0.785	<i>do m</i>	1.107	-0.262
<i>Reb M</i>	-1.107	-1.833	<i>reb m</i>	-0.464	-2.88
<i>Re M</i>	-2.678	1.833	<i>re m</i>	-2.034	0.785
<i>Mib M</i>	2.034	-0.785	<i>mib m</i>	2.678	-1.833
<i>Mi M</i>	0.464	2.88	<i>mi m</i>	1.107	1.833
<i>Fa M</i>	-1.107	0.262	<i>fa m</i>	-0.464	-0.785
<i>Fa# M</i>	-2.678	-2.356	<i>fa# m</i>	-2.034	2.88
<i>Sol M</i>	2.034	1.309	<i>sol m</i>	2.678	0.262
<i>Lab M</i>	0.464	-1.309	<i>lab m</i>	1.107	-2.356
<i>La M</i>	-1.107	2.356	<i>la m</i>	-0.464	1.309
<i>Sib M</i>	-2.678	-0.262	<i>sib m</i>	-2.034	-1.309
<i>Si M</i>	2.034	-2.88	<i>si m</i>	2.678	2.356

Càlculs...

```
triadaCEG = Fourier[{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, FourierParameters → {1, -1}]
```

```
{3. + 0.i, -0.366025 - 0.366025i, 1. + 0.i, 2. + 1.i, 0. - 1.73205i, 1.36603 + 1.36603i, 1. +  
0.i, 1.36603 - 1.36603i, 0. + 1.73205i, 2. - 1.i, 1. + 0.i, -0.366025 + 0.366025i}
```

```
Arg[triadaCEG]
```

```
{0., -2.35619, 0., 0.463648, -1.5708, 0.785398, 0., -0.785398, 1.5708, -0.463648, 0., 2.35619}
```

```
triadaDFsA = Fourier[{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, FourierParameters → {1, -1}]
```

```
{3. + 0.i, -0.5 - 0.133975i, 0.5 - 0.866025i, 1. - 2.i, -1.5 + 0.866025i, -0.5 -  
1.86603i, -1. + 0.i, -0.5 + 1.86603i, -1.5 - 0.866025i, 1. + 2.i, 0.5 + 0.866025i, -0.5 +  
0.133975i}
```

```
Arg[triadaDFsA]
```

```
{0., -2.87979, -1.0472, -1.10715, 2.61799, -1.8326, 3.14159, 1.8326, -2.61799, 1.10715, 1.0472, 2.87979}
```

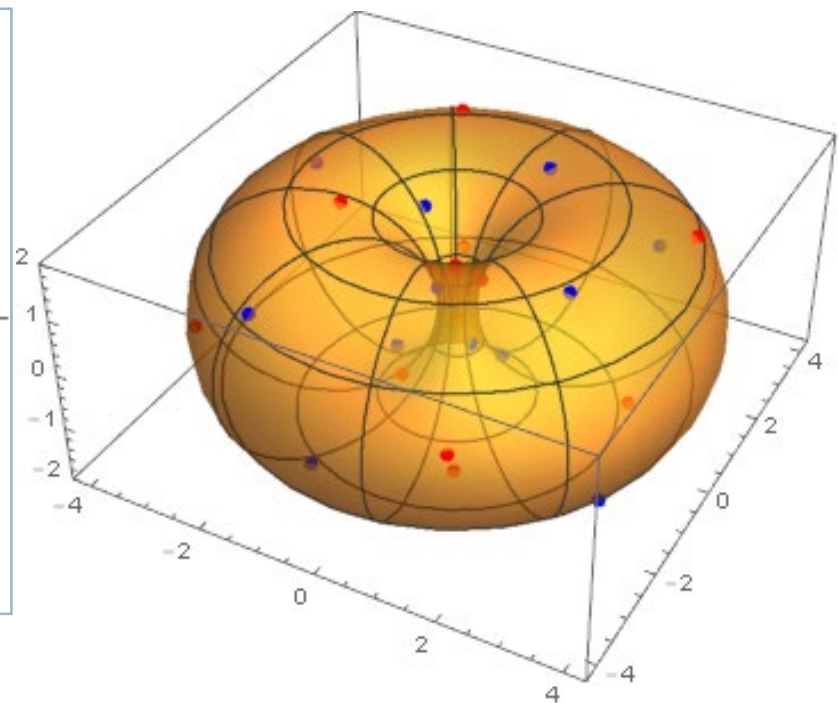
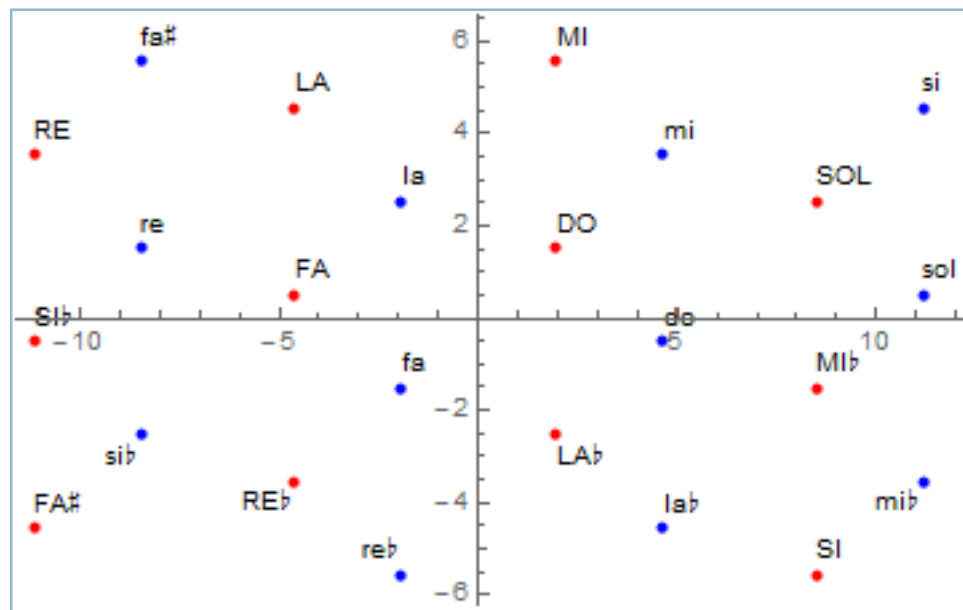
```
Coordenades[CEG] = {Arg[triadaCEG][[3]], Arg[triadaCEG][[5]]}
```

```
{0., -1.5708}
```

```
Coordenades[DFsA] = {Arg[triadaDFsA][[3]], Arg[triadaDFsA][[5]]}
```

```
{-1.0472, 2.61799}
```

El tor de les tríades



És el tor definit per les identitats

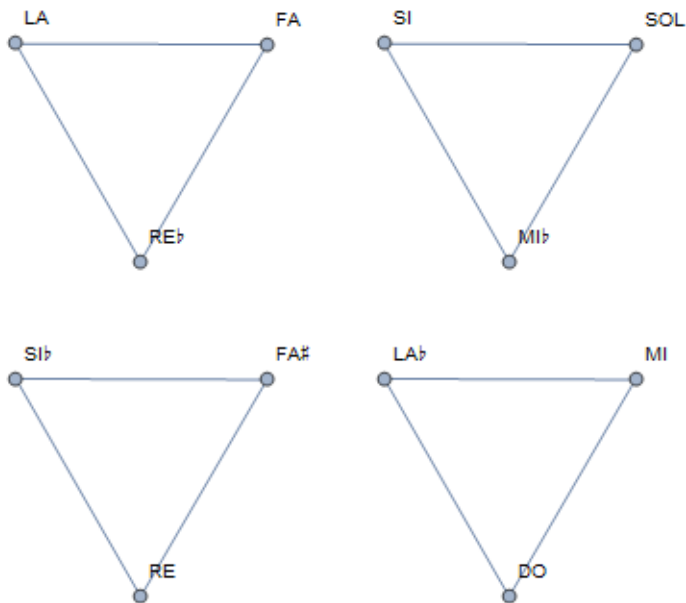
$$|a_3| = \sqrt{5} \sim 2.236, \quad |a_5| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sim 1.932,$$

i parametritzat pel parell de fases $\arg(a_3)$ y $\arg(a_5)$.

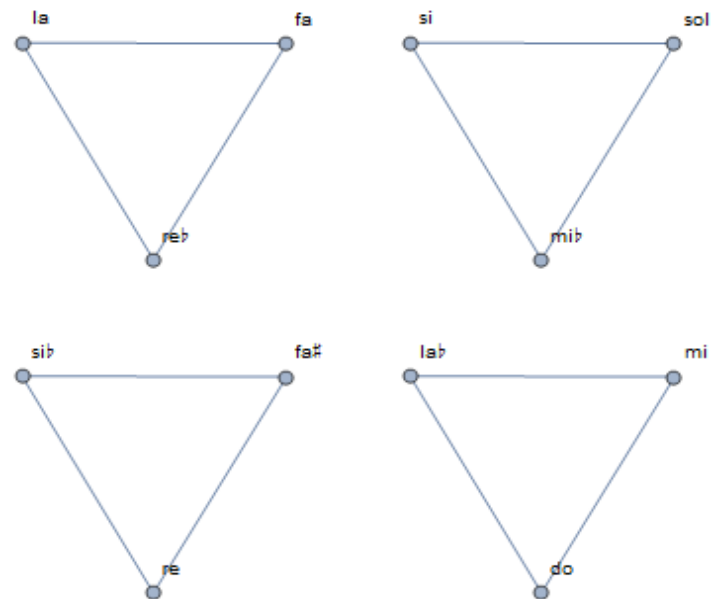
És a dir, és el tor de radis $R = |a_3| \sim 2.236$ i $r = |a_5| \sim 1.932$.

Cicles harmònics d'ordre 3

Cicles harmònics de tríades majors



Cicles harmònics de tríades menors





1959

The "Giant Steps" cycle is the culmination of Coltrane's theories applied to a completely new chord progression.

Coltrane uses the cycle in descending major third tonal transpositions in the opening bars and then ascending ii–v–i progressions separated by a major third in the second section of "Giant Steps".

B G E[□]

Fast Swing

♩ = 286

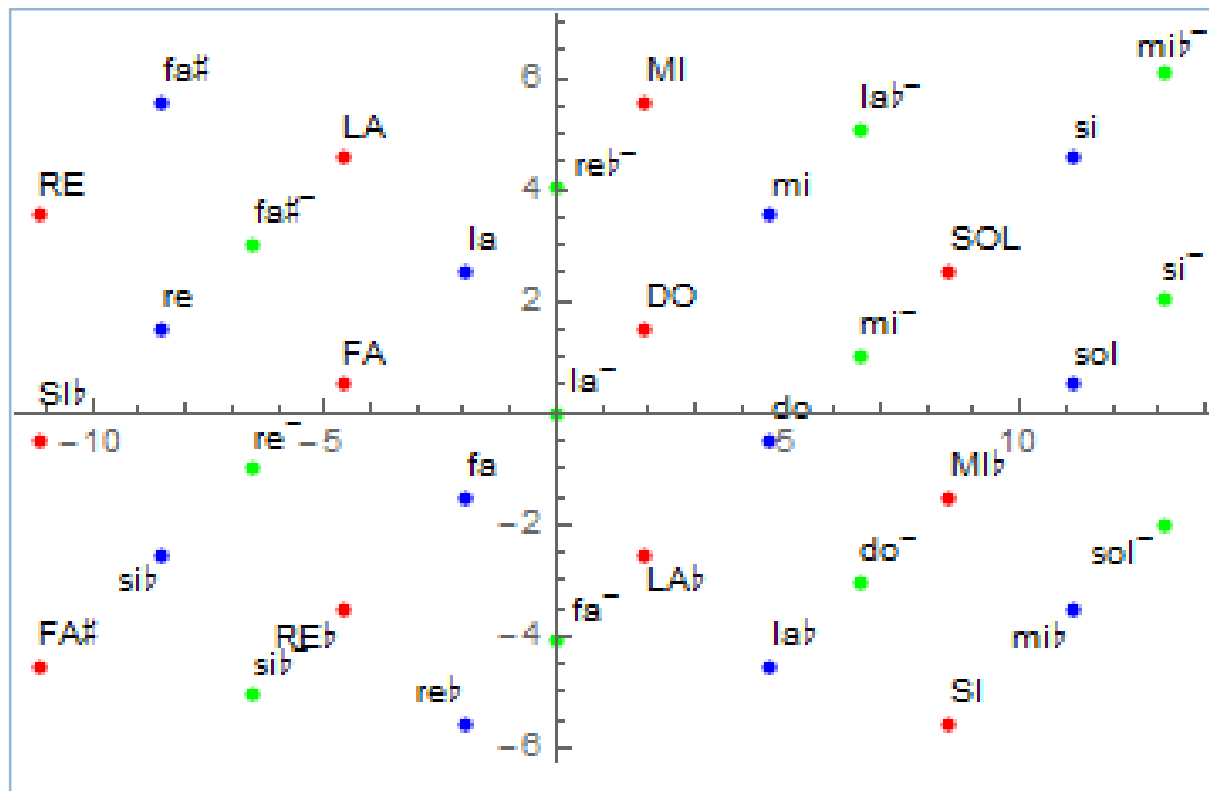
Giant Steps

John Coltrane

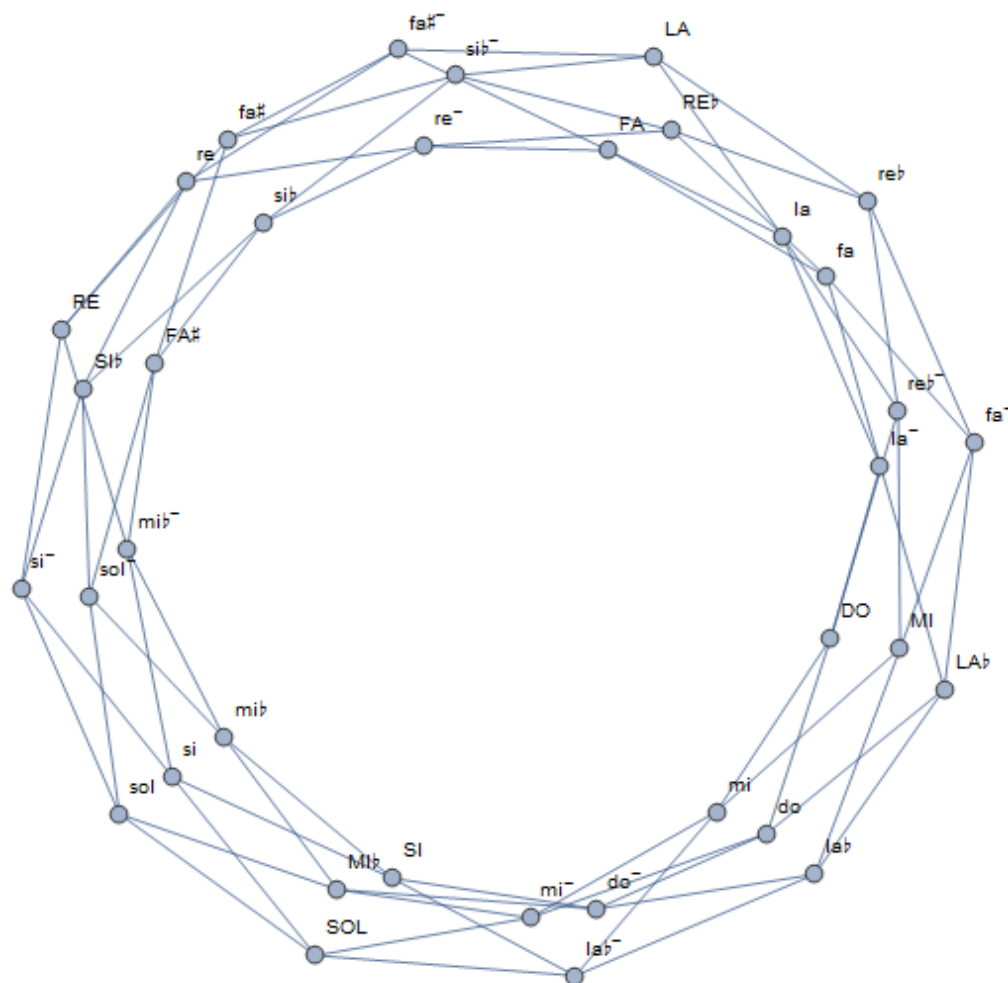
(tenor)

Tríades majors, menors i disminuïdes

$$d(P, Q) = \text{Min} \{ \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \sqrt{(\text{Min}\{|p_1 - q_1|, L - |p_1 - q_1|\})^2 + (\text{Min}\{|p_2 - q_2|, l - |p_2 - q_2|\})^2} \}.$$



El cicle hamiltonià de les tríades



Ordre 36

Moderato (♩ = c. 104)

P. Bayer & Ludwig

Hamiltonian cycle

Score for Piano, Clarinet en Bb, Trompeta, and Baix acústic. The score is divided into two systems, each with four staves. The first system includes Piano (top), Piano (second), Clarinet en Bb (third), and Trompeta (fourth). The second system includes Baix acústic (fifth), Pno. (sixth), 3 Cl. (seventh), and an additional staff (eighth). The tempo is Moderato (♩ = c. 104). The key signature is C major. The score features a Hamiltonian cycle of chords: C, Am5, Fm, F, Am, C#m5, E, and F#m5. The Piano part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The Clarinet en Bb part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The Trompeta part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The Baix acústic part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The Pno. part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The 3 Cl. part includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system. The additional staff includes a melodic line with a 5-measure rest in the first system and a 5-measure rest in the second system.



2

Hamiltonian cycle

9 A^b C^m E^b5 G

Pno.

3^b Cl.

13 G^m E^b E^m G^{dim}

Pno.

3^b Cl.

3

Hamiltonian cycle

17 B^b B^{nat}5 D F^{dim}

Pno.

3^b Cl.

21 B^{nat}5 D^b C^{dim} A

Pno.

3^b Cl.

4

Hamiltonian cycle

F#m5 Dm Dm5 Bbm

25

Pno.

3b Cl.

F# Dbm5 Bm B

29

Pno.

3b Cl.

Hamiltonian cycle

5

Cm5 A5m Gbm5 Em

33

Pno.

3b Cl.

C

37

Pno.

3b Cl.

rit.

Un experiment amb IA

Aromes cubanes

P. Bayer & *Ludwig*

- Saxo soprano: M. Bayer
- Piano: P. Bayer
- Percussió: *Ludwig*



En la jubilació de
Josep González Rovira
UPC, Vilanova, 2019.06.27



Foto: J.-C. Lario

Referències

Amiot, Emmanuel: The tori of phases. *Mathematics and Computation in Music*, 1–18, Lecture Notes in Comput. Sci., 7937. Springer, 2013.

Benson, David J.: *Music. A mathematical offering*. Cambridge University Press, 2007.

Díaz Jerez, Gustavo: *Algorithmic Music, Using mathematical Models in Music Composition*. PhD Thesis. The Manhattan School of Music, 2000.

Nierhaus, Gerhard: *Algorithmic Composition*. Springer, 2009.

Rayleigh, John William Strutt: *The theory of sound*. I, II. MacMillan, 1894, 1896.

Vañó, Lucía: *Música i matemàtiques: una introducció al tractament matemàtic del so*. TAD 2012, UB. Direcció: P. Bayer.

Villalón, Helena: *Una formulació matemàtica de les modulacions musicals*. TFG 2016, UB. Direcció: P. Bayer.

Agraïments

CSIC: Óscar García Prada

ESMUC

RACAB: Joaquim Agulló, Francesc Serra

UB: Lucía Vañó, Helena Villalón

STNB: Jordi Guàrdia, Joan-C. Lario

CA LA DONA: Mercè Otero

TALLER DE MÚSICS: Carlos Uguet,
Marcel·lí Bayer

IEC: Ricard Guerrero

UPC: Sebastià Xambó, Jaume Franch

Fi