REMEMBER MARYAM MIRZAKHANI

Contribucions de Maryam Mirzakhani en dinàmica i geometria

Joana Cirici

Departament de Matemàtiques i Informàtica

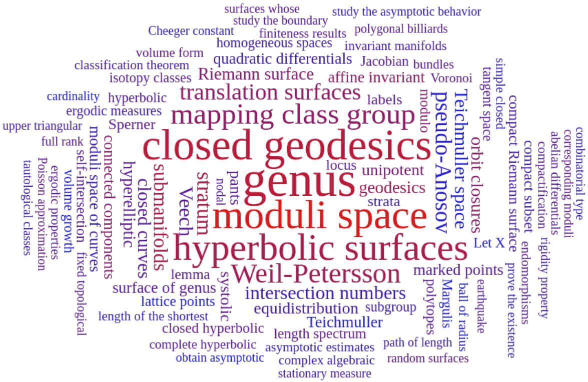
UNIVERSITAT DE BARCELONA

Bio

- Neix el 1977 a Teheran.
- 1995 i 1996. Olimpíada Internacional de Matemàtiques (primera noia Iraniana en participar). Dues medalles d'Or. Publica els primers articles.
- 1999 Llicenciatura a la Universitat de Tecnologia Sharif de Teheran.
- 2004 Doctorat en Matemàtiques (Harvard, Director: Curtis T. McMullen).
  - ⋆ Treballs publicats a *Annals of Mathematics*, *Inventiones Mathematicae* i *Journal of the American Mathematical Society*.
- 2008 Catedràtica a la Universitat de Stanford.
- 2014 Medalla Fields (primera dona en 80 anys d'història).

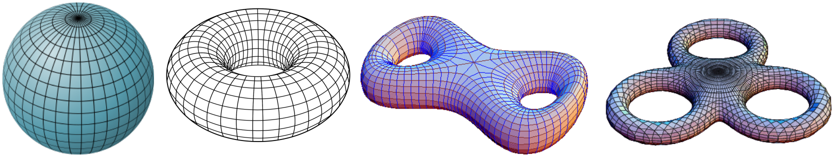
"per les seves contribucions excepcionals a la dinàmica i la geometria de les superfícies de Riemann i els seus espais de moduli".

- Mor el juliol de 2017 a causa d'un càncer de mama.
- Les seves idees matemàtiques continuen vives.



- Corbes geodèsiques en superfícies de Riemann hiperbòliques.
- Teorema de la vareta màgica i dinàmica de billars.

- Superfícies topològiques (compactes i orientables): classificació per gènere.



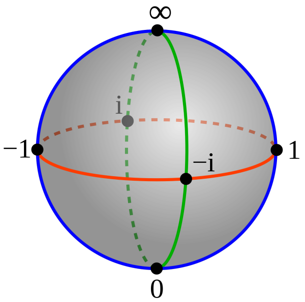
- Superfície de Riemann: superfície topològica + **estructura geomètrica**.
  - ⋆ Marc natural per estudiar el comportament global de les

    funcions holomorfes
  - ⋆ "Emboliquem" les superfícies topològiques de "paper complex".

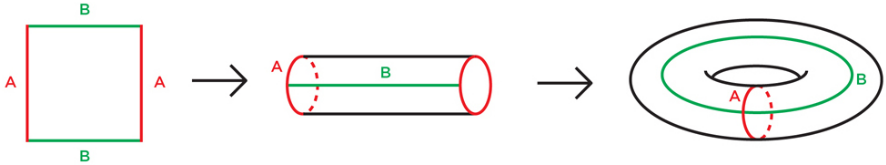
- Isomorfisme entre superfícies de Riemann: aplicació bijectiva i holomorfa.
- Considerarem classes d'isomorfisme de superfícies de Riemann.

L'esfera de Riemann

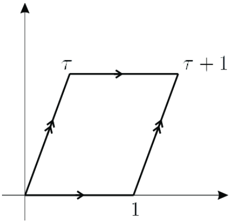
- L'esfera admet una única estructura complexa (llevat d'isomorfisme).
- $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.



- Geometria algebraica: $\mathbb{CP}^1$ (estudi de corbes racionals).
- Anàlisi: Funcions racionals en $\mathbb{C} \rightsquigarrow$ funcions holomorfes en $\widehat{\mathbb{C}}$ (pols $\mapsto \infty$).
- Física quàntica (esfera de Bloch): Representació geomètrica de qbits.



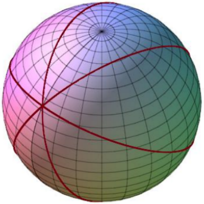
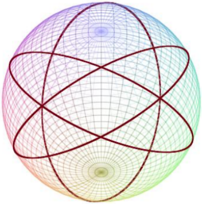
- El tor admet infinites estructures complexes diferents.
- $\mathbb{T}$ = quocient de $\mathbb{C}$ per un reticle $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$.
- Ens podem restringir a reticles de la forma $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, on $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.



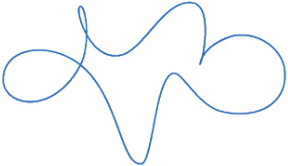
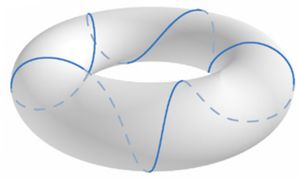
$$\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/\Lambda = \{z + \Lambda; z \in \mathbb{C}\}.$$

Corbes geodèsiques

- *Geodèsica*: corba que localment minimitza la seva longitud.
- Les geodèsiques de l'esfera són els cercles màxims.

- Geodèsiques del tor:
  - ⋆ Si no són tancades, aleshores són denses: pinten tot el tor.
  - ⋆ Són tancades si i només si tenen "pendent racional".

Geometria hiperbòlica

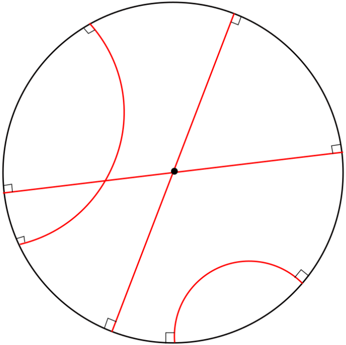
- Primer exemple de geometria no-Euclidiana.
- Donades una recta R i un punt p, hi ha almenys dues rectes que passen per p i no tallen R.
- Model del disc de Poincaré: $\mathbb{D} = \left\{x + iy \in \mathbb{C} \; ; \; x^2 + y^2 < 1\right\}$

Mètrica: $ds^2 = \dfrac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}$

Corba: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{D}\,,\; t \mapsto (x(t), y(t))$

Longitud: $\ell(\gamma) := \displaystyle\int_\gamma ds$

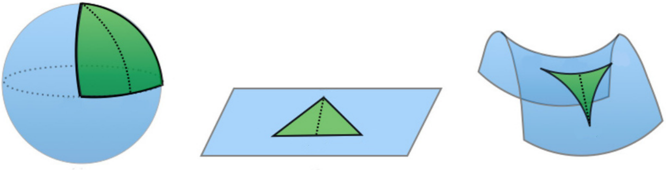
Distància: $d(z, w) := \inf_\gamma\{\ell(\gamma)\,;\, \gamma : z \to w\}$.



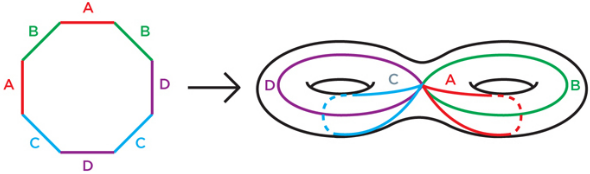
- "Emboliquem" les superfícies topològiques de "paper hiperbòlic".

Superfícies hiperbòliques

- Superfícies amb curvatura constant negativa ($g \geq 2$)

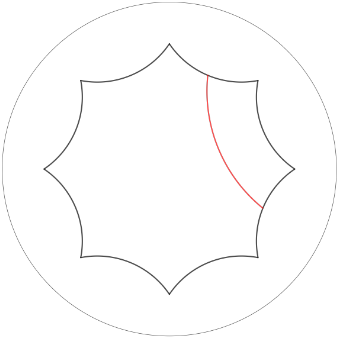


- Tota superfície topològica es pot obtenir identificant dos a dos les arestes d'un polígon:



- Considerant polígons en el pla hiperbòlic obtenim superfícies hiperbòliques!

Superfícies hiperbòliques



Superfície de Riemann hiperbòlica de gènere 2
(doble dònut hiperbòlic)

- $4g$-polígon regular hiperbòlic (amb angles interns $\pi/2g$) $\rightsquigarrow$ superfície hiperbòlica de gènere g.

Corbes geodèsiques

- Per a una superfície hiperbòlica X de gènere $g \geq 2$:
  - ⋆ Tota corba tancada en X és homotòpica a una única geodèsica.
  - ⋆ Hi ha un nombre finit $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades de longitud $\leq \ell$.

Teorema dels Nombres Primers (Delsarte, Huber i Selberg , 1940)

$$N(X, \ell) \sim e^{\ell}/\ell \quad \text{quan} \quad \ell \to \infty.$$

- El Teorema de Nombres Primers clàssic: el nombre d'enters primers amb $0 \leq \log p \leq \ell$ creix de la mateixa forma.
- El comportament asimptòtic és independent del gènere.
- Gairebé totes les geodèsiques autointersequen.

Teorema (Mirzakhani)

El nombre de geodèsiques simples creix com $N(X, \ell) \sim C_X \cdot \ell^{6g-6}$.

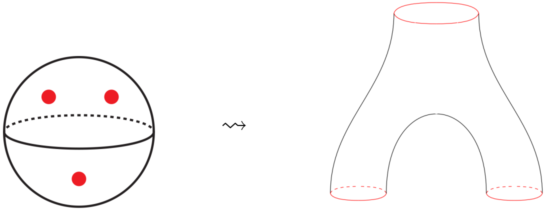
- En aquest cas, C_X depèn tant del gènere com de la *geometria* de X.
- Interacció entre una superfície individual i la geometria de l'espai de moduli.

- Un *espai de moduli* és un espai de solucions de problemes de classificació geomètrics, mòdul deformacions. (*Modulus* $\longleftrightarrow$ paràmetre).
- Fonamental en **geometria alegbraica**, **geometria diferencial**, **aritmètica**, **topologia**, **dinàmica**, **teoria de cordes**, ...
- Sovint hereta estructura geomètrica dels objectes que parametritza.

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{de gènere } g \\ \text{amb } n \text{ punts marcats.} \end{array} \right\}.$$

- És una varietat algebraica de dimensió complexa $3g - 3 + n$.
- També té una estructura simplèctica (permet calcular volums).
- És totalment no homogeni. Mirzakhani prova que la dinàmica en aquests espais satisfà propietats de rigidesa pròpies dels espais homogenis.

Punts marcats i mètriques hiperbòliques



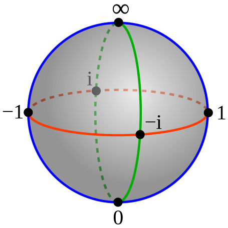
Teorema d'uniformització de Poincaré

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{amb punts marcats.} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Mètriques hiperbòliques} \\ \text{de curvatura constant negativa} \\ \text{amb } \textit{cúspides} \text{ als punts marcats} \end{array} \right\}$$

- Condició: $\chi := 2 - 2g - n < 0$.

L'esfera de Riemann amb punts marcats

- $\mathcal{M}_{0,n} = \{$ Esferes de Riemann amb n punts marcats $\} /$ isomorfisme .



- Grup de Möbius:

$$\text{Mob} := \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d}; \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \neq 0 \right\} \quad \begin{smallmatrix} f(\infty)=\frac{a}{c} \\ f(\frac{-d}{c})=\infty \end{smallmatrix}.$$

- Donats tres punts diferents de $\widehat{\mathbb{C}}$ sempre hi ha $f \in \text{Mob}$ que envia aquests tres punts a 0, 1 i ∞.
- Tota transformació que fixa $\{0, 1, \infty\}$ és la identitat.

- $\mathcal{M}_{0,3} = \{*\}$.
- $\mathcal{M}_{0,4} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$.
- $\mathcal{M}_{0,n} = \{(t_1, \cdots, t_{n-3}) \in \widehat{\mathbb{C}}^{n-3}; t_i \neq 0, 1, \infty\,,\, t_i \neq t_j\}$.
- $\mathcal{M}_{1,1} = \{\Lambda = (1, \tau)\}/\mathbb{C}^* = \mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

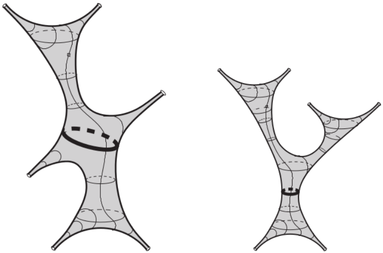
Espai de moduli i tipus topològics

- Mirzakhani integra la funció $X \mapsto N(X, \ell)$ en l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$.

Teorema (Mirzakhani)

$$\lim_{\ell \to \infty} \frac{N(X,\ell)}{\ell^{6g-6+2n}} = C_X \,, \quad \text{on } C_X : \mathcal{M}_{g,n} \to \mathbb{R}^+.$$

Estadística topològica



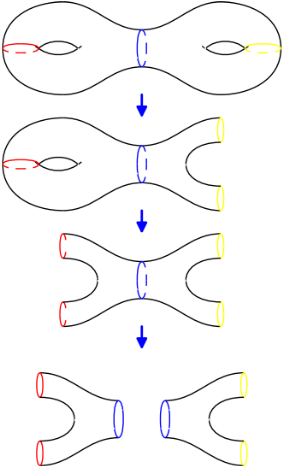
Teorema (Mirzakhani)

La freqüència de cada tipus topològic està ben definida:

$$\lim_{\ell \to \infty} (N_{3+3}(X,\ell) : N_{2+4}(X,\ell)) = 4 : 3.$$

- No depèn de X, només del gènere!

- Entendre les geodèsiques simples ens dóna informació sobre la superfície.
- Tota superfície descomposa en parells de pantalons:



- Pregunta: quantes descomposicions diferents (no homotòpiques) hi ha?
- Resposta: infinites! Però no si restringim la geometria: $\leq \ell$.

Corol·lari

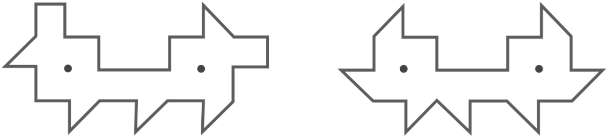
La probabilitat de que una corba simple geodèsica separi una superfície de gènere 2 en dues peces de gènere 1 és $1/7$.

- Resultats molt més generals: les freqüències topològiques en $\mathcal{M}_{g,n}$ estàn ben definides i només depenen del gènere.
- Descriu propietats geomètriques d'una superfície X en termes de la geometria i topologia de $\mathcal{M}_{g,n}$.
- Fórmula en termes de *nombres d'intersecció* en $\mathcal{M}_{g,n}$.

Conjectura de Witten (Kontsevich 1992)

- Relaciona *nombres d'intersecció* de l'espai de moduli amb cert sistema infinit d'equacions diferencials.
- Una sola fórmula combina **geometria algebraica enumerativa**, **combinatòria**, **sistemes integrables** i **física quàntica**.
- Conseqüències fortes en la teoria de la *gravetat quàntica*.

- Sistemes que evolucionen amb el temps: partícules de gas, sistema planetari, corrents oceànics, electrons en un metall,...
- Sistemes de diferents escales es comporten de forma similar.
- Taules de billar poligonals: entendre les trajectòries.
  - ⋆ Exemple de sistema dinàmic caòtic.
  - ⋆ Hi ha trajectòries tancades? Trajectòries denses? Depèn de la taula?
- Problemes d'il·luminació: habitació poligonal emmirallada.
  - ⋆ Hi ha "punts foscos"? Què en podem dir del conjunt de punts foscos?
  - ⋆ (Tokarsky 1995 / Castro 1997) Exemple d'habitació no il·luminada.



  - ⋆ Problema: caracteritzar els conjunts de punts foscos d'una taula.

Mes problemes en billars

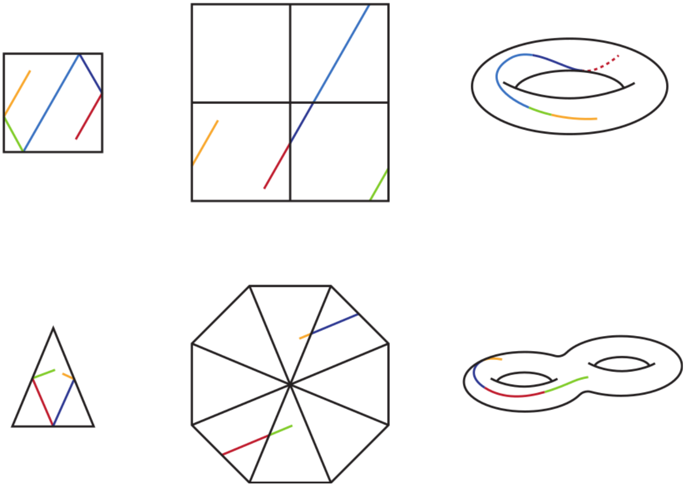
- Problemes de seguretat: podem bloquejar totes les trajectòries entre dos punts donats, amb un nombre finit de punts?
  - ⋆ Si això passa per tot parell de punts, diem que el polígon és *segur*.
  - ⋆ El quadrat és segur! (Exercici)
  - ⋆ Ens podem preguntar el mateix problema per a geodèsiques en una varietat.

- Trajectòries tancades: existeixen en un polígon arbitrari?
  - ⋆ Polígons racionals (angles múltiples racionals de π). Sempre hi ha almenys una trajectòria tancada.

- Billars òptims: hi ha billars tals que tota trajectòria sigui o bé tancada o bé equidistribuïda?
  - ⋆ Els polígons regulars són òptims.
  - ⋆ En general resulta molt difícil decidir si una taula és òptima o no.
  - ⋆ Resultats per a billars tipus L (relacionats amb superfícies de gènere 2).

Taules de billar i superfícies

- Unfolding: Si reflectim la taula en comptes de la bola obtenim una superfície compacta!



- Trajectòries tancades = geodèsiques simples i tancades en la superfície.

Asimptòtica de billars

Conjectura

El nombre de trajectòries tancades de longitud $\leq \ell$ es comporta com

$$N(T, \ell) \sim \frac{C_T \cdot \ell^2}{\pi \cdot \mathrm{Area}(T)}$$

- Eskin i Mirzakhani progressen cap a aquest resultat:

Teorema (Eskin-Mirzakhani)

El límit

$$\lim_{n \to \infty} N(T, \ell)/\ell^2$$

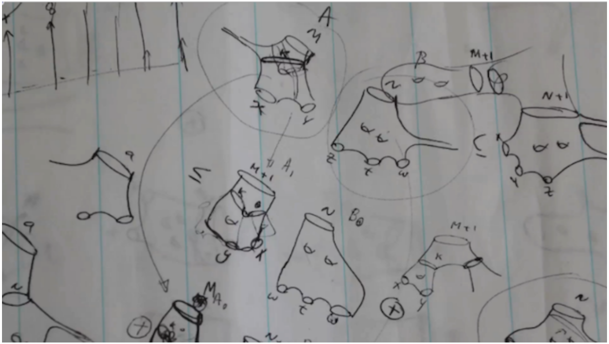
existeix i és diferent de zero.

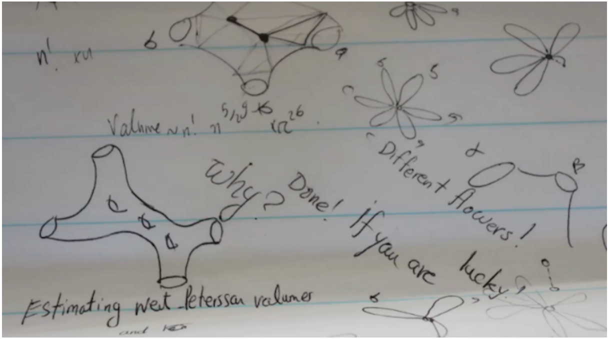
Corol·lari (Quasi-il·luminació)

En tot billar poligonal racional hi ha un nombre finit de punts foscos.

Teorema de la Vareta Màgica

- **Eskin-Mirzakhani**: traslladen resultats fonamentals en la teoria dels sistemes homogenis als espais de moduli de superfícies.
  - ⋆ Les superfícies de translació donen lloc a espais de moduli.
  - ⋆ Aquests espais estan dotats d'una acció de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
  - ⋆ Quan la vareta màgica toca una superfície de translació, ens retorna una varietat: la clausura de la seva òrbita en l'espai de moduli.
- La dinàmica en els espais de moduli és altament no homogènia.
- Connexions profundes amb la dinàmica dels espais homogenis.
- Estenen resultats de McMullen ($g = 2$).
- 2020 **Breakthrough Prize awards** (Alex Eskin).




Why?
Done! If you are lucky!
Different flowers!
Estimating Weil-Petersson volumes

Moltes gràcies!