# La Optimización o la aplicación del método científico a la toma de decisiones. Joseph Luis de Lagrange, ¿un precursor?


**Marco A. López- Cerdá**

**Departamento de Estadística e Investigación Operativa**

**Universidad de Alicante**

# Definición de IO

- Cualquier definición de una determinada disciplina científica debe ser clara, concisa y sucinta.
- Operational Research Society de Gran Bretaña, 1962: "*Investigación Operativa es la disciplina que aborda, a través de la ciencia moderna, problemas complejos relativos a la dirección y gestión de grandes sistemas en los que intervienen hombres, máquinas, materiales y dinero, y que surgen en la industria, los negocios, la administración y la defensa*“

- Otra definición mucho más actual: "*Investigación Operativa* es la disciplina que ayuda a la toma de mejores decisiones mediante la aplicación de métodos analíticos avanzados" (Web del Institute for Operations Research and Management Sciences (INFORMS)).
- Su principal característica es la aplicación del método científico a la toma de decisiones complejas en contextos muy diversos. Con el riesgo de una simplificación excesiva podríamos definir la "IO como la ciencia de la *toma de decisiones".*

# Orígenes históricos de la IO

- Dido, o Elisa de Tiro en la Eneida, quizás aplicó la IO cuando el rey Yarbas le ofreció la concesión de la máxima extensión de terreno que podía ser abarcada por una piel de toro. Dido decidió cortar la piel de toro en finas tiras con las que delimitó un extenso territorio sobre el que asentó la antigua Cartago.

- En lo que todos los analistas coinciden es en situar el origen histórico de la IO en los años críticos de la 2ª Guerra Mundial.

- En 1936 el British Air Ministry estableció una estación de investigación militar en Suffolk con el objetivo de aplicar nueva tecnología al uso del radar en la intercepción de aviones de combate enemigos.

- La *British Operational Research Society* sitúa los orígenes de la IO en 1937, cuando los primeros logros de la estación de Suffolk fueron reconocidos y explotados por un equipo de oficiales de la Royal Air Force (RAF), en su base de operaciones en Kent.

- El término *Operational Research* es atribuido a Albert P. Rowe, segundo superintendente de la base de Suffolk, quien lo introdujo en 1938.

- Bajo la dirección del físico Patrick M.S. Blackett, y en el seno de la RAF, se creó en 1940 un grupo de estudio interdisciplinario, conocido como *Blackett's Circus*, y que estuvo originalmente integrado por tres psicólogos, un físico, un astrofísico, cuatro matemáticos, un oficial de la armada y un topógrafo.
- Blackett obtuvo el Nobel en Física en 1948.

Patrick M.S Blackett

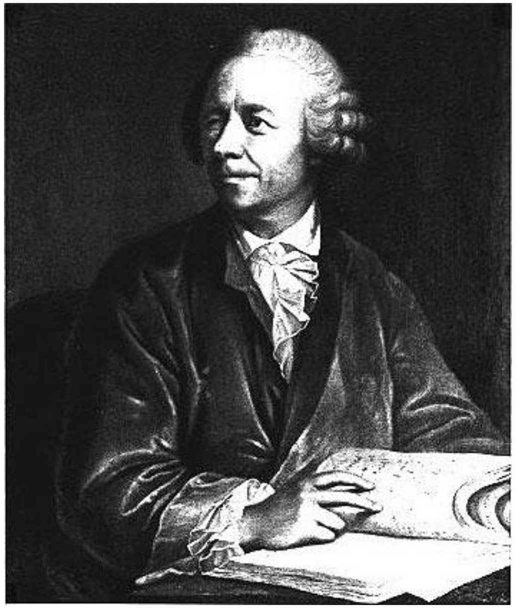
Su eficacia en la destrucción de los famosos submarinos alemanes de la serie U en la batalla del Atlántico, gracias a la ubicación estratégica de cargas de profundidad, fue extraordinaria, siendo este grupo el precursor de grupos de IO similares creados en la Armada Británica.

La característica de interdisciplinariedad de estos grupos es esencial a la IO, desde sus mismos orígenes, y su éxito futuro dependerá en buena medida del mantenimiento de este espíritu de colaboración científica.

- Dénes König, en su libro de 1936, introdujo el término *teoría de grafos*, y estableció las bases de este importante capítulo de la matemática discreta, de extraordinaria influencia en el desarrollo posterior de la IO.
- Este tratado aparece doscientos años después de que Leonhard Euler resolviese *el problema de los siete puentes de Königsberg*, la antigua ciudad rusa de Kaliningrado (que durante el siglo XVIII formó parte de Prusia Oriental).

- Esta ciudad está atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas unidas mediante siete puentes.
- El problema consistía en encontrar un recorrido que pasase sólo una vez por cada uno de los puentes y regresase al punto de partida.

- La respuesta de Euler al problema de los siete puentes de Königsberg es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características.
- En su honor se introdujo posteriormente la noción de *circuito euleriano*, que es aquel camino en un grafo capaz de recorrer todas las aristas una única vez, regresando finalmente al vértice de partida.



Euler

- En aquel momento Euler estaba tratando con un tipo distinto de geometría en el que la distancia no era relevante.
- Un paso más en la dirección de liberar las matemáticas de la *necesidad de medir*, se produjo en 1750 cuando Euler escribió una carta a Christian Goldbach en la que establecía la llamada, desde entonces, *fórmula de Euler* para un poliedro, y que establece la relación entre el número de sus caras, aristas y vértices (v-a+c=2).

Esta fórmula constituye el primer ejemplo conocido de *invariante topológico*, noción clave en *topología*, disciplina matemática de extraordinaria importancia y que se beneficia, al igual que la IO, de la riqueza conceptual, y de su valor como herramienta de modelización, de la teoría  de grafos.

- Es interesante constatar el hecho de que la fórmula de Euler no fuese descubierta antes, y que la sencilla relación que establece pasase desapercibida a Arquímedes y al propio Descartes, quienes estudiaron a fondo las propiedades de los poliedros.
- La razón puede ser que todos los matemáticos que precedieron a Euler en el estudio de los poliedros, fueron incapaces de pensar en propiedades geométricas que no estuvieran ligadas a la noción de distancia.

- Recientemente, Francisco Santos Leal, catedrático de la Universidad de Cantabria, ha refutado la conjetura de Hirsch (formulada en 1957) que dice:

- "Si un polítopo en d variables tiene n facetas, entonces n>d, d mayor o igual que 2, y siempre ha de ser posible viajar de cualquier vértice a cualquier otro vértice recorriendo como mucho n-d aristas".

# La PM/Optimización, núcleo de la IO

- Sin duda la *programación matemática* (PM, abreviadamente) puede ser considerada el núcleo de la IO, y es este capítulo clave de nuestra disciplina el que recibirá mayor atención en el resto de esta exposición.
- El término fue utilizado por primera vez en 1959, con ocasión del RAND Symposium que tuvo lugar en Santa Mónica (California), para referirse a la disciplina matemática que tiene por objeto la resolución de problemas de optimización.

- Aunque hoy en día *optimización* y *programación matemática* se consideran sinónimos, en los años 50 del siglo pasado se apostó decididamente por el segundo de ellos, poniendo el mayor énfasis en la naturaleza económica de los problemas abordados, y relegando a un segundo plano la fundamentación matemática de la disciplina.

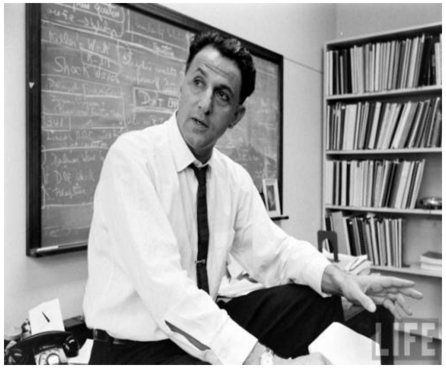
Es así como se acuñaron sucesivamente los términos de *programación lineal*

(Dantzig, 1947), *programación no lineal* (Kuhn y Tucker, 1951), *programación dinámica* (Bellman, 1957), *programación entera* (Gomory, 1958), etc.

Dantzig

Khun

Tucker




Bellman

Gomory

- La *optimización* está presente en cualquier actividad planificada del ser humano.
- Las compañías aéreas planifican sus vuelos y la rotación de las tripulaciones con el afán de minimizar los costes o, lo que es equivalente, de maximizar sus beneficios.
- Los inversores orientan sus decisiones de forma que se minimicen los riesgos a la vez que se garanticen niveles de rentabilidad satisfactorios.

- En general, las industrias aspiran a una eficiencia máxima a la hora de diseñar sus productos y de organizar sus propios procesos productivos.
- Por su parte la naturaleza también optimiza, y los sistemas físicos evolucionan hacia un estado de mínima energía. Las moléculas en un sistema químico aislado reaccionan entre ellas hasta que la energía potencial de sus electrones alcanza su mínimo valor. Los rayos de luz siguen aquellas trayectorias que minimizan la duración de su viaje.

# Prolegómenos de la PM

Lo que sí puede afirmarse con rigor histórico es que los verdaderos prolegómenos de la *programación matemática* se corresponden con las decisivas aportaciones de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII al desarrollo de las poderosas herramientas del cálculo.

Destaquemos aquí a Sir Isaac Newton con sus descubrimientos fundamentales alrededor de 1665, como lo fueron su método para calcular, de forma aproximada, las raíces de una ecuación, y las condiciones necesarias para la existencia de extremo (máximo o mínimo) de una función.

Isaac Newton

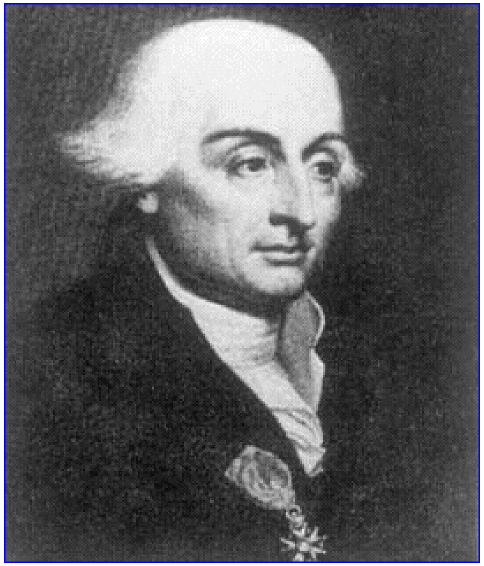
Aproximadamente 35 años antes, Pierre de Fermat, magistrado de la ciudad francesa de Toulouse, hizo uso implícito de la condición necesaria de optimalidad establecida por Newton, pero sin recurrir (por ser desconocidas) a la noción de derivada ni a la de límite.


Pierre de Fermat

Brook Taylor, discípulo de Newton, puso la primera piedra de la teoría de la aproximación, de gran importancia en IO, al utilizar polinomios para aproximar determinadas funciones diferenciables con una cota de error preestablecida.

Brook Taylor

El matemático francés (de origen italiano) Joseph-Luis de Lagrange, en su celebrado libro *Mécanique Analytique*, introduce su método, conocido como regla de los multiplicadores de Lagrange, para encontrar los extremos de una función cuyas variables están sujetas a restricciones en forma de igualdad, aunque su procedimiento es descrito como una herramienta para determinar los estados de equilibrio de un sistema dinámico.



Joseph-Luis de Lagrange

Important mathematicians in the optimization field

# Joseph Louis Lagrange

**Joseph-Louis Lagrange**

Joseph-Louis (Giuseppe Lodovico), conte de Lagrange

| | |
|---|---|
| Born | 25 January 1736<br>Turin, Piedmont |
| Died | 10 April 1813 (aged 77)<br>Paris, France |
| Residence | Piedmont<br>France<br>Prussia |
| Nationality | Italian<br>French |
| Fields | Mathematics<br>Mathematical physics |
| Institutions | École Polytechnique |
| Doctoral advisor | Leonhard Euler |
| Doctoral students | Joseph Fourier<br>Giovanni Plana<br>Simeon Poisson |
| Known for | Analytical mechanics<br>Celestial mechanics<br>Mathematical analysis<br>Number theory |

## Lagrange scientific contribution

1. One of the creators of the calculus of variations, deriving the Euler–Lagrange equations for extrema of functionals.
2. Extended the method to take into account possible constraints, arriving at the method of Lagrange multipliers.
3. Invented the method of solving differential equations known as variation of parameters, applied differential calculus to the theory of probabilities and attained notable work on the solution of equations.
4. Proved that every natural number is a sum of four squares.
5. His treatise *Theorie des fonctions analytiques* laid some of the foundations of group theory, anticipating Galois.
6. In calculus, Lagrange developed a novel approach to interpolation and Taylor series.
7. Studied the three-body problem for the Earth, Sun, and Moon (1764) and the movement of Jupiter’s satellites (1766), and in 1772 found the special-case solutions to this problem that are now known as Lagrangian points.
8. But above all he impressed on mechanics, having transformed Newtonian mechanics into a branch of analysis, Lagrangian mechanics as it is now called, and exhibited the so-called mechanical "principles" as simple results of the variational calculus.

# CHAPITRE XI.

DES PLUS GRANDES ET DES MOINDRES ORDONNÉES DES SURFACES COURBES. SOLUTION GÉNÉRALE DES QUESTIONS DE MAXIMIS ET MINIMIS. MANIÈRE DE DISTINGUER LES MAXIMA DES MINIMA DANS LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

---

51. Si l'on demande les plus grandes et les moindres ordonnées d'une surface donnée, il est aisé de concevoir qu'elles ne peuvent répondre qu'aux points où le plan tangent devient parallèle au plan des $x$ et $y$; donc on aura, dans ces points, $\tang\alpha = 0$, et, par conséquent (nº 39),

$$z'^2 + z_{,}^2 = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant à la fois

$$z' = 0 \quad \text{et} \quad z_{,} = 0.$$

Ce sont là les conditions nécessaires pour que l'ordonnée $z$ devienne un maximum ou un minimum.

Puisque $z$ peut représenter une fonction quelconque de $x$ et $y$, on en conclura, en général, que, pour qu'une fonction de deux variables devienne un maximum ou un minimum, il faut que ses deux fonctions primes relatives à chacune de ces variables soient nulles.

Mais on peut parvenir directement à cette conclusion par la considération des fonctions d'une seule variable, suivant la théorie du nº 24, et trouver en même temps les conditions nécessaires pour que le maximum ou minimum ait lieu. En effet, $z$ étant fonction de $x$ et $y$, on peut supposer d'abord $x$ donné et chercher le maximum ou minimum de $z$ relativement à $y$; on aura pour cela l'équation

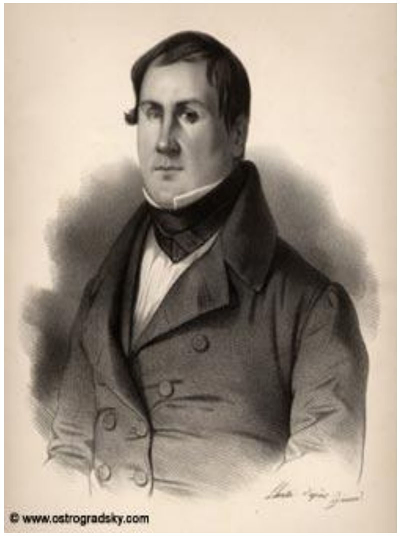
$$z_{,} = 0,$$

El caso en que las restricciones tienen forma de desigualdad, como sucede frecuentemente en problemas de optimización típicos de la IO, fue analizado por primera vez por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, quien propuso su conocido método de eliminación de variables en un sistema de inecuaciones lineales, extensión del método de eliminación de Gauss.

Fourier

Una condición necesaria de optimalidad, adaptación de la de Lagrange, fue conjeturada por el economista-matemático Antoine-Augustin Cournot (1827) para ciertos casos particulares, y por el matemático ruso Mikahil Ostrogradski (1834) para el caso general.

Cournot




Ostrogradski

- Fue en el año 1951 cuando la llamada *programación matemática no-lineal*, disciplina que se ocupa del problema de minimizar (o maximizar) una función objetivo no-lineal cuyas variables están sometidas a restricciones, también no lineales, en forma de desigualdad, cobra carta de naturaleza con el artículo seminal titulado "*Nonlinear programming*", publicado por Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker.
- Las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn y Tucker tienen su origen en dicho artículo, y se las conoce como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT, de forma breve) constituye un reconocimiento de la contribución del físico William Karush, quien dio una primera prueba en 1939 en su tesis no publicada.

# Problemas clásicos de Optimización

La parte final de esta exposición se dedican a presentar brevemente algunos los problemas clásicos de la PM, problemas que desde sus orígenes han inspirado líneas de investigación, activas hasta nuestros días.

# El problema del agente viajero (TSP)

- En 1937 Merrill M. Flood mantuvo una conversación con Albert W. Tucker sobre un problema de gran interés, tanto desde el punto de vista matemático como por sus evidentes aplicaciones, el *problema del agente viajero*.
- A partir de dicha conversación, Flood estudió en profundidad dicho problema, lo popularizó con dicho nombre en inglés, es decir el *travelling salesman problem* (TSP, abreviadamente), y contribuyó a que fuese considerado durante muchos años el paradigma de la *optimización combinatoria*.

- A finales de los años 40, la RAND Corporation, tras la intervención del propio Flood, vio en este problema un reto intelectual, merecedor del interés científico de la corporación.
- El Proyecto RAND (**R**esearch **an**d **D**evelopment) fue lanzado por el gobierno de los EEUU en 1945 con el fin de explotar la experiencia adquirida por aquellos científicos que habían participado en la planificación de operaciones militares durante la 2ª Guerra Mundial, y aplicarla a la resolución de problemas, de gran complejidad, surgidos en la posguerra en el ámbito civil.

Todo un ejemplo de cómo recurrir al asesoramiento científico en la toma de decisiones gubernamentales, si bien el Proyecto RAND recibió algunas críticas por su excesivo sesgo hacia las cuestiones de naturaleza militar (motivadas, quizás, por el preocupante escenario en ciernes de la Guerra Fría).

- El problema del TSP es extraordinariamente sencillo en su formulación:
- Dadas n ciudades de un territorio, el objetivo es encontrar una ruta que, comenzando y terminando en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades (lo que se llama un *circuito hamiltoniano*), y minimice la distancia total recorrida por el viajante.
- La solución al TSP más simple consistiría en evaluar todas las posibles rutas y quedarse con aquella en que la distancia recorrida es menor (aunque quizás alguna ciudad sea visitada más de una vez).
- El problema reside en que el número de estas combinaciones es n!, y este número es impracticable, incluso con los medios computacionales actualmente a nuestro alcance.
- Por ejemplo, si un ordenador fuese capaz de calcular la longitud de cada ruta en un microsegundo, tardaría algo más de 3 segundos en resolver el problema para 10 ciudades, algo más de medio minuto en resolver el problema para 11 ciudades, y más de 77 años en resolver el problema para sólo 20 ciudades.

## Otras aproximaciones algorítmicas:

- Algoritmos de ramificación y acotación, los cuáles pueden ser usados para procesar TSP que contienen entre 40 y 60 ciudades.
- Algoritmos de mejoras progresivas (iterativas) los cuales utilizan técnicas de programación lineal. Trabajan bien para más de 200 ciudades.
- Una implementación de un algoritmo de ramificación y poda resolvió un problema con 85.900 ciudades [Applegate et al. 2006].

# El problema del transporte

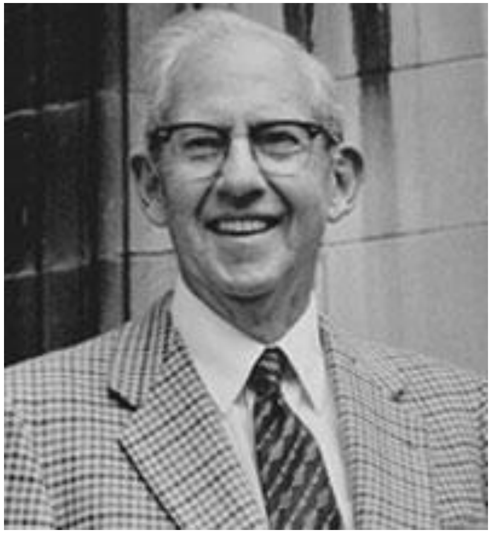
- La primera formulación del *problema clásico de transporte* (el envío a un mínimo coste de ciertos bienes o productos desde los puntos de oferta a los de demanda, desde los almacenes o factorías a los mercados) se debe a Frank L. Hitchcock en 1941(quien también propuso un bosquejo de algoritmo para su solución), aunque la formulación precisa, su teoría y resolución (basada en el método simplex de la programación lineal) se debe a George B. Dantzig.

El economista Tjalling C. Koopmans, trabajando independientemente para la British-American Combined Shipping Board, investigó y resolvió este mismo problema, al que por dicho motivo se le conoce como problema de transporte de Hitchcock-Koopmans.

Tjalling C. Koopmans

# El problema de la dieta

Otro problema de IO surgido con anterioridad al nacimiento de la programación lineal es el *problema de la dieta*. En 1945 el economista George Stigler planteó el siguiente problema: Considérese un hombre moderadamente activo (por ejemplo, un profesor universitario de 40 años de edad), y una lista de 77 alimentos que pueden entrar a formar parte de su dieta diaria.



George Stigler

La pregunta es: ¿qué cantidad de cada uno de estos alimentos debe incorporar a su dieta para que la ingesta de 9 nutrientes básicos no sea inferior a las cantidades mínimas recomendadas por las autoridades sanitarias, y que a la vez el coste total de los alimentos consumidos (o coste de la dieta) sea mínimo?

Stigler formuló este problema de optimización en términos de un conjunto de 9x77 desigualdades lineales simultáneas y de forma heurística, pero sagaz, determinó una solución no-óptima cuyo coste era de 39.93$ al año (precios del año 1939).

- En 1947, Dantzig formuló el problema de la dieta como un problema de programación lineal de gran dimensión, utilizando el método simplex, y con un coste computacional considerable (120 personas-días, usando calculadoras de mesa), obtuvo la solución óptima y consiguió ahorrar 24 céntimos por año respecto de la solución aproximada hallada por Stigler.
- La inteligencia y habilidad demostradas por Stigler, en esta y otras ocasiones, le hicieron digno merecedor del premio Nobel de Economía, que obtuvo finalmente en 1982 por sus estudios sobre la estructura industrial, el funcionamiento de los mercados, y las causas y efectos de la regulación pública.

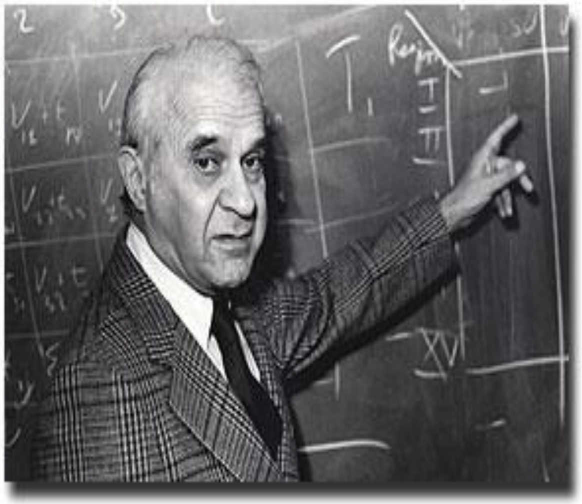
# El problema de PL y su importancia

- Un problema de programación lineal es aquél en el que se trata de maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal de varias variables que están sometidas a restricciones expresables en forma de desigualdades y/o igualdades lineales.

El primero en dar esta formulación fue George B. Dantzig, y muy pronto se evidenció el hecho extraordinario de que miles de problemas de decisión que surgen en los negocios, la industria, la administración, en la actividad militar, etc. son de esta naturaleza, o pueden ser aproximados por problemas de este tipo.

George B. Dantzig

- El propio Dantzig manifestó en 1963 que el modelo interindustrial de Wassily W. Leontief, Premio Nobel de Economía en 1973, constituyó un factor de motivación en su concepción del modelo general de la programación lineal.
- Personalmente tuve el privilegio, y el goce intelectual, de estudiar, en los comienzos de mi carrera profesional, la teoría del equilibrio en economías lineales y el análisis interindustrial en el libro "Introduction to sets and mappings in modern economics", de Hukukane Nikaido.



Wassily W. Leontief

Aunque hubo algunos intentos previos de expresar el modelo en términos matemáticos, en su mayoría debidos al matemático ruso Leonid V. Kantorovich en 1939, lo cierto es que sólo Dantzig puede ser considerado el verdadero padre de la programación lineal, ya que, aparte de la formulación precisa del problema, inventó el *método simplex* para su resolución exacta, y con él revolucionó el mundo de la toma de decisiones en la segunda mitad del siglo XX.

- En 1975 Kantorovich y Koopmans fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía por su contribución a la teoría de la asignación óptima de recursos, lo que decepcionó a muchos investigadores operativos que consideraban superiores los méritos de Dantzig.

- El propio Koopmans consideró la concesión injusta en dicho sentido, y propuso a Kantorovich renunciar al premio. La renuncia de Kantorovich era una decisión harto difícil para él en la medida en que su trabajo científico no era debidamente reconocido en la antigua Unión Soviética, en donde la utilización de métodos matemáticos en Economía, y la optimización de beneficios, se consideraban actitudes claramente anti-marxistas.

- Por su parte, Koopmans donó, a modo de compensación, 40,000$ al International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), en Laxenburg (Austria), centro de investigación en el que los tres científicos compartieron estancias de investigación a lo largo de los años.

- El método simplex se sigue enseñando en las facultades de matemáticas, de economía, escuelas de ingeniería, de negocios, etc. de todas las universidades del mundo, a pesar de que otros métodos de resolución han surgido posteriormente con el propósito de mejorar su eficiencia computacional (éste es el caso de los *métodos de puntos interiores*). El método simplex fue seleccionado como uno de los diez algoritmos más decisivos del siglo XX.

László Lovász, en 1980, afirmó lo siguiente: "Si uno tuviera que hacer una estadística acerca de qué problema matemático está consumiendo más tiempo de ordenador, entonces (excluyendo problemas de manejo de bases de datos, como búsqueda u ordenación) la respuesta sería probablemente que dicho problema es el de programación lineal".

Otra anécdota ilustrativa de la importancia de la programación lineal es la siguiente. En 1958, Joel Franklin colaboró en la realización de una encuesta, dirigida por el Caltech Computing Center, sobre los usos industriales de grandes ordenadores. La compañía visitada en cierta ocasión era la Mobil Oil Corporation, en donde el vicepresidente de la compañía en persona recibió a Franklin en su lujosísimo despacho.

Joel Franklin

Con sorpresa, Franklin reconoció en él a un compañero suyo del Courant Institute de Nueva York.

La compañía había adquirido recientemente un gran ordenador que había costado millones de dólares, y a la pregunta de cuál era la rentabilidad que esperaban obtener de dicha inversión, el antiguo colega de Franklin contestó "No hay problema. Este equipo ya ha sido pagado con los beneficios que la compañía ha obtenido, a través de su uso, en dos semanas".

Franklin preguntó: ¿De qué manera?, y la respuesta fue concisa: "Resolviendo principalmente problemas de programación lineal".

# Reflexiones finales

Al igual que en el estudio de Euler sobre el problema de los siete puentes de Königsberg, en relación con los problemas de distribución en IO, en multitud de ocasiones las matemáticas preceden a la tecnología y se anticipan a ella.

Ello nos lleva a reflexionar sobre la siguiente cuestión: ¿Debe toda investigación en matemáticas estar inspirada por un problema real, al que se trata de dar solución a través de las matemáticas, o debe el investigador sentirse libre a la hora de crear matemáticas, y pensar que las aplicaciones ya llegarán después, con el tiempo?

Personalmente, nos inclinamos por la segunda opción, y nos satisface ver refrendada nuestra opinión en la siguiente revelación del prestigioso matemático-economista, Joel Franklin, profesor de Matemática Aplicada en el California Institute of Technology (Caltech): "En cierta ocasión el Prof. H.F. Bohnenblust me dijo algo acerca de la investigación.

Había supervisado con éxito muchos proyectos de tesis doctorales, y también algunos pocos que fracasaron. Esto fue lo que dijo: - Los proyectos fracasados comenzaron con algún viejo problema famoso (como por ejemplo, probar la hipótesis de Riemann), y su pretensión fue buscar un método para resolverlo. Los proyectos que tuvieron éxito empezaron con algún método nuevo y, acto seguido, buscaron un problema al que aplicarlo -. ".

El propio J. Franklin, en su artículo del año 1983, da una muestra brillante de esta forma de proceder en investigación matemática, al partir del preexistente método del simplex y aplicarlo al *problema de los momentos*, problema de singular importancia en teoría de la probabilidad.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN