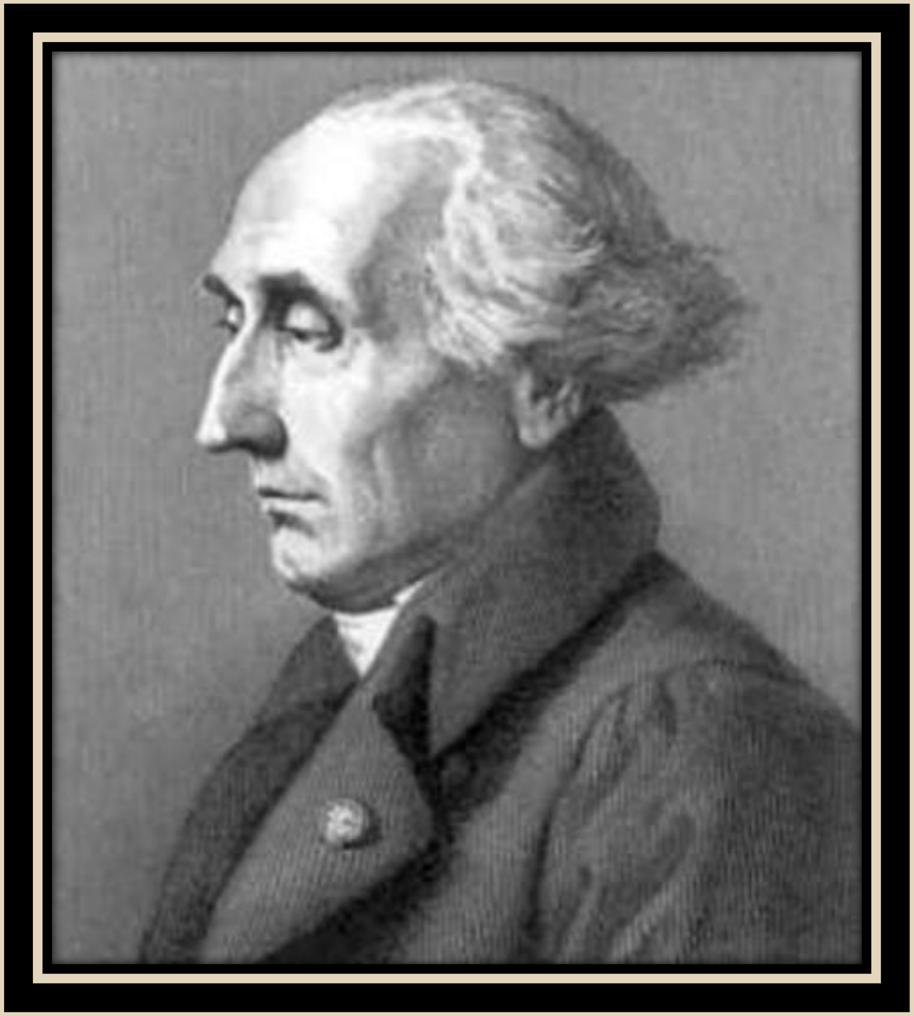
JORNADA LAGRANGE A L'FME (12-03-2014)



Lagrange y la primera formulación de la mecánica analítica (1788)

Luis Navarro Veguillas

Profesor Emérito, UB

luis.navarro@ub.edu

1.- Joseph-Louis Lagrange (Turín, 1736 – París, 1813)

1. A Contexto científico de la época

1. B Formación y primeros años en Turín (hasta 1766)

1. C La fecunda etapa berlinesa (1766-1787)

1. D Consolidación en París (1787-1813)

2.- Méchanique analitique [sic]**, (1788)**

2. A Parte I: Estática

2. B Parte II: Dinámica

2. C Ecuaciones de Lagrange

3.- Impacto de la nueva formulación de la mecánica

3. A Primeras reacciones

3. B Desarrollos posteriores

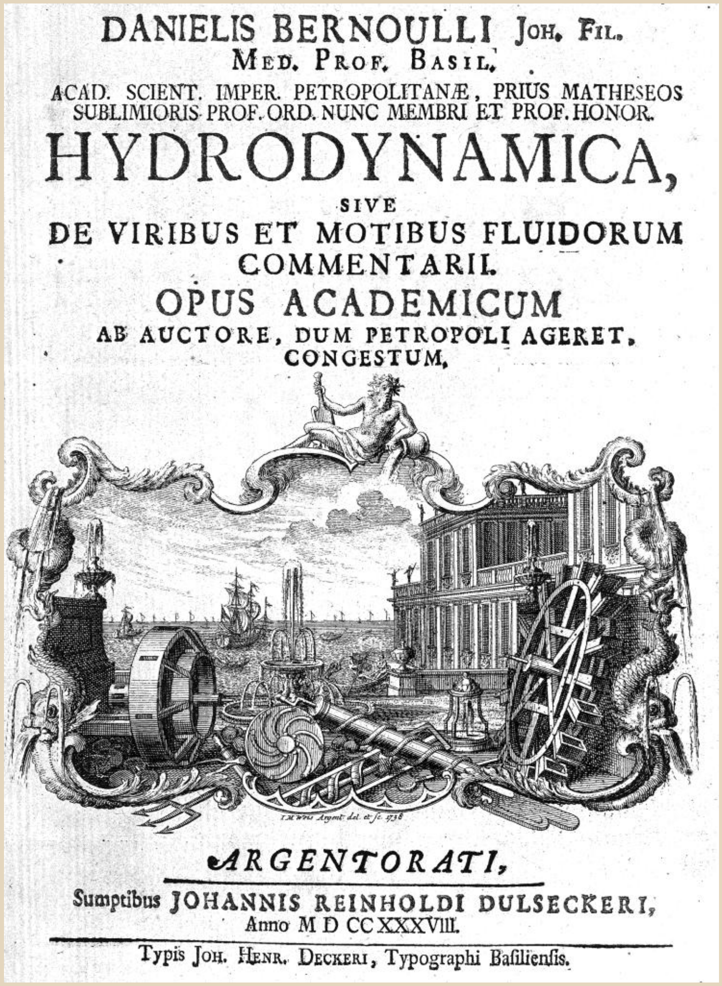
1.- Joseph-Louis Lagrange (Turín, 1736 - París, 1813)

- Giuseppe Lodovico Lagrangia, Turín, entonces capital del Reino de Cerdeña-Piamonte.
- Padres: cultivados y buena posición económica. Once hijos, Joseph-Louis es el pequeño. Sólo dos sobreviven a la infancia.
- Contra el deseo paterno —que le impulsaba hacia Derecho—, pronto se interesa por las matemáticas y la física.
- Consta que la lectura de un libro de Halley, de 1693, aplicando el álgebra a la óptica, influye notablemente en sus proyectos.
- Estudia física con Beccaria —un reconocido especialista de Turín en electricidad—, y matemáticas por su cuenta. Primero geometría; enseguida análisis, campo en rápido desarrollo.

1. A El contexto científico de la época

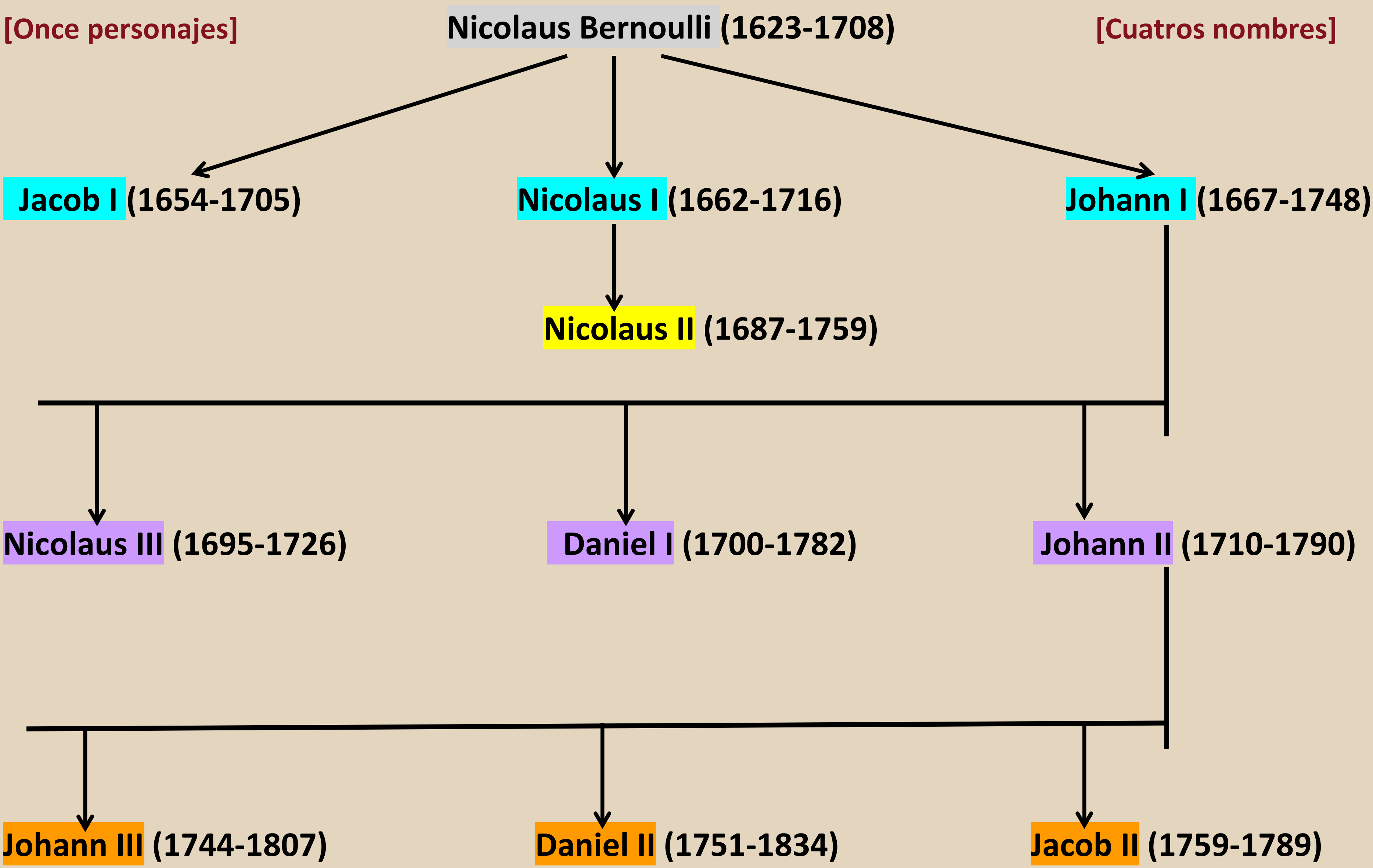
- **Física:**

  - El *Siglo de las Luces* presidido por los *Principia* (1687) y su posible extensión a óptica, electricidad, calor y química.
  - En esa línea: teoría corpuscular de la luz, experimentos de Franklin y leyes de Coulomb para la electrostática, calórico de Lavoisier, etc.
  - Primeros desarrollos de otros campos: óptica ondulatoria, termodinámica, teoría cinética de gases, fluidos, etc.


DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.
ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI, Anno M D CC XXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

- **Matemáticas:**
  - Desarrollo del cálculo diferencial (Newton, Leibniz) y su aplicación a problemas, generalmente relacionados con la mecánica. Caso de Euler: mecánica, hidrodinámica, acústica, óptica y astronomía.
  - Predominio de la intuición: aunque "hicieron las cosas bien", desde nuestra perspectiva actual faltaba rigor matemático.
  - Aunque ciertamente se operaba con "infinitésimos" (cambios infinitamente pequeños), "diferenciales", "derivadas", "variaciones" y demás, la definición de límite y sus derivaciones (convergencia, derivada, continuidad, integral definida, etc.) llegaron hacia 1820's, con Bolzano, entre otros, pero sobre todo con Cauchy.
- **Algunos científicos "contemporáneos" de Lagrange (n. 1736):**

  Leonhard Euler (1707), Jean d'Alembert (1717), Maria Agnesi (1718), Johann III Bernoulli (1744), Gaspard Monge (1746), Pierre-Simon de Laplace (1749), Adrien-Marie Legendre (n. 1752), Joseph Fourier (1768), Bernard Bolzano (1781), Augustin-Louis Cauchy (1789)…


[Once personajes]
Nicolaus Bernoulli (1623-1708)
[Cuatros nombres]
Jacob I (1654-1705)
Nicolaus I (1662-1716)
Johann I (1667-1748)
Nicolaus II (1687-1759)
Nicolaus III (1695-1726)
Daniel I (1700-1782)
Johann II (1710-1790)
Johann III (1744-1807)
Daniel II (1751-1834)
Jacob II (1759-1789)

1. B Los años en Turín (1736 - 1766)

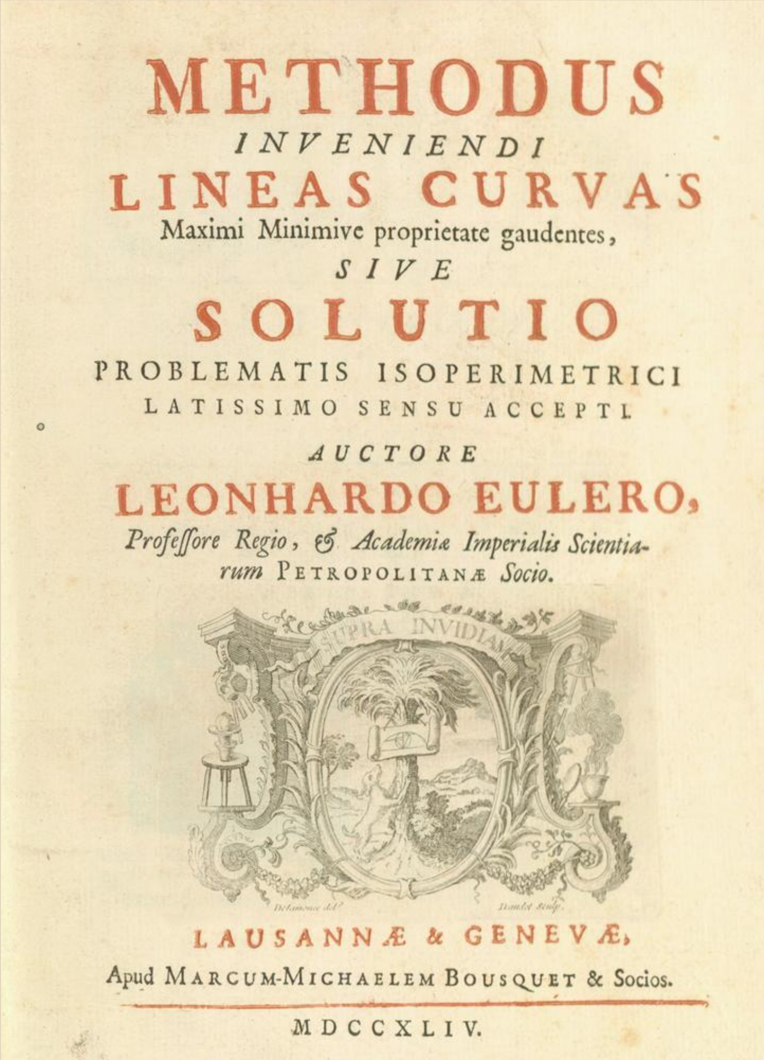
1754 (18)	▪ Finaliza unos brillantes estudios universitarios. ▪ Muestra que conoce el *Metodus*… de Euler (1744). ▪ A Euler: analogía entre el binomio de Newton y los coeficientes de la diferenciación del producto de dos funciones. Leibniz y J. Bernoulli ¡lo habían publicado!
1755	▪ Profesor en *Reali Scuole d'Artiglieria di Torino*. ▪ Propone a Euler ciertos refinamientos (cálculo de variaciones y principio de mínima acción).
1757	▪ Junto a otros jóvenes colegas, fundan la *Società Scientifica Privata Torinese*. En 1783 se convertirá en la luego famosa *Accademia delle Scienze di Torino*. ▪ Crean *Miscellanea Taurinensis* [física y matemáticas].

Accademia delle Scienze di Torino (ente di diritto privato):

«Contribuire al progresso scientifico, promuovendo ricerche e curando la pubblicazione dei loro risultati, contribuendo alla diffusione del sapere mediante congressi, convegni, seminari, conferenze e ogni altro mezzo ritenuto idoneo, e inoltre fornendo pareri e formulando proposte alle istituzioni pubbliche e a organismi privati nei campi di sua competenza».

(Lagrange, a la derecha)

Methodus (Euler, 1744)



Additamentum II

«Sobre la determinación del movimiento de los proyectiles en un medio no resistente, por el método de máximos y mínimos»

Euler, en el Additamentum

«Puesto que todos los efectos de la naturaleza obedecen a una ley de máximo o mínimo, no cabe duda de que también en las trayectorias curvas que los proyectiles describen... hay alguna propiedad que se hace máxima o mínima». [¿Cuál?]

- **Método:** resolver el problema con el método directo (Newton) y, «con la debida atención», descubrir cuál es esa propiedad.

- **Principio:** Entonces, digo que la trayectoria descrita por el cuerpo ha de estar dispuesta de tal manera que $M\, ds\, \sqrt{v}$ —o bien $ds\, \sqrt{v}$, si *M* es constante—, ha de ser mínimo entre todas las trayectorias contenidas entre los mismos extremos. [*M*, masa puntual; *ds*, trayecto recorrido en *dt*; $\sqrt{v}$, velocidad].

Su investigación en Turín, en *MiscellaneaTaurinensia*

1759 (23)	• «Recherches sur la méthode de maximis et minimis» • «Recherches sur la nature et la propagation du son»	➢ Introducción a su posterior cálculo de variaciones. ➢ Estudia la "cuerda vibrante" y su historia, desde Newton.
1764	«Recherches sur la libration de la Lune, … pour le Prix de l'année 1764» (Académie).	Estudio de los diferentes movimientos de la Luna, por la acción de la Tierra y del Sol
1766	• «Solution de différens [*sic*] problèmes de calcul intégral» • «Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter»	➢ Integración de ecuaciones diferenciales variadas. ➢ Premio de la *Académie des Sciences*, de París.

1. C La fecunda etapa berlinesa (1766-1787)

- Acepta la oferta de D'Alembert, en nombre de Federico II de Prusia, para trasladarse a Berlín, cubriendo la baja de Euler como director de la Sección de Matemáticas, en la *Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*.
- 1767 (31 años): se casa con su prima Vittoria Conti, "perfecta ama de casa". De mutuo acuerdo, deciden no tener hijos.
- Muy estimulado por D'Alembert para presentarse a premios científicos (de la *Académie des Sciences* de París, en especial) y para exponer y publicar sus investigaciones.
- Durante su estancia en Berlín, Lagrange se abrió a nuevos campos de investigación: astronomía, álgebra, mecánica, acústica, fluidos (es decir, medios continuos), probabilidad…

Una muestra de sus publicaciones (63) en Berlín

1767 (31)	«Sur les courbes tautochrones» (isochrones)	La cicloide (que también es braquistócrona): $\tau = \pi\sqrt{r / g}$

Antes de 1775 :
Description et usage d'un cabinet de physique expérimentale (2 vols.)

Joseph-Aiguan Sigaud de Lafond (1730-1810)

1770-1771	• «Réflexions sur la résolution algébrique des équations» • «Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers».	➢ Hasta grado cuatro, solubles mediante radicales. ➢ Necesaria y suficiente para que *n* sea número primo: (n-1)!+1 divisible
1772	«Essai d'une nouvelle méthode pour résoudre le problème des trois corps».	Premio de la *Académie des Sciences*, de París, compartido con Euler.
1774	• «Sur l'intégration des équations a différences partielles du premier ordre» • «Sur l'équation séculaire de la Lune»	➢ Como anteriormente, resuelve ejemplos concretos con ideas particulares. ➢ Premio de la *Académie des Sciences*, de París. Introduce el concepto (no el término) de "potencial".

1776	«Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul [*sic*] intégral»	Contraposición al empleo de desarrollos en serie.
1777	«Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante»	*Método del descenso infinito*; variante del *de reducción al absurdo* (con naturales). [Fermat ya lo había introducido antes].
1778	• «Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes» • «Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds»	➢ Premio de la *Académie des Sciences*, de París. (Última vez que optó). ➢ Forma parte de una serie (a D'Alembert, 1775): teoría completa sobre las acciones mutuas entre planetas.

1782	«Sur la diminution de l’obliquité de l’écliptique»	El último de aquella serie anunciada a D’Alembert.
1783	«Mémoire sur la Théorie du mouvement des fluides»	Incursión en la teoría de los medios continuos.
1785	• «Méthode général pour intégrer les équations partielles du premier ordre lorsque ces différences ne sont que linéaires» • «Sur le problème de la détermination des orbites des Comètes d’après trois observations» (3 mémoires)	➢ Completa muchos estudios precedentes sobre casos particulares de ecuaciones en lineales en derivadas parciales. ➢ Culmina una serie de trabajos anteriores, mostrando su interés por la relación entre la teoría y las observaciones.

1. D   Consolidación y final en París

- En 1783 (47 años) mueren su mujer y su mentor D'Alembert en Paris. Estado de salud delicado y profunda depresión.
- Tres años después fallece Federico II, lo que debilita mucho su posición en Berlín. Comienza a considerar otras ofertas.
- En 1787 (51 años), tras rechazar ofertas italianas, se decide por el traslado a París, como miembro de la *Académie des Sciences*. Sin obligaciones docentes, como en Berlín.
- Recién instalado en París, publica en 1788 la *Méchanique Analitique*, que había sido totalmente escrita en Berlín. Trata de reunir en un texto estructurado sus contribuciones al análisis, al cálculo y a la mecánica. De ahí nuestro interés por citar aportaciones previas suyas en estos temas.

- Carta de Lagrange a Laplace, 15/09/1782:

«Estoy a punto de completar un tratado sobre mecánica analítica, basado tan sólo en un principio; pero como aún no sé cuándo ni dónde lo podré publicar, no tengo prisa en darle los últimos retoques»

- Se vuelve a casar en 1792: con la hija del ya entonces famoso astrónomo Pierre Charles Le Monnier. También sin hijos.
- En septiembre de 1793, tras la ejecución de Luis XVI, comienza el “Reino del terror”: una ley permite arrestar a los extranjeros nacidos en países enemigos y confiscar sus bienes. La ley afectaba de pleno a Lagrange que se libró debido a su prestigio y a la influencia de Lavoisier.

- Desde entonces: poco más que un prestigioso observador de la revolución. Unos, partidarios (Laplace, Monge). Otros, víctimas (Condorcet, suicidio en prisión; Lavoisier, guillotina).

- Un lema personal que puede ayudar a entender su alto grado de adaptación a los nuevos cambios y a su "supervivencia":

> «*Creo que, en general, uno de los primeros principios de una persona sabia consiste en ajustarse estrictamente a las leyes del país en el que está viviendo, incluso cuando ellas no resulten razonables*»

- En 1790 la *Académie des Sciences* había comenzado la tarea de unificar unidades de pesos y medidas. En 1795 se crea el *Bureau des Longitudes*. Lagrange es un miembro activo en ambos, desde el principio.

- En 1794, decreto de la *Convention Nationale*:

> *«Il sera établi à Paris une École Normale, où seront appelés, de toutes les parties de la République, des citoyens déjà instruits dans les sciences utiles, pour apprendre, sous les professeurs les plus habiles dans tous les genres, l'art d'enseigner*.»

- La *École* pasó por diversas vicisitudes y nombres. En 1903, como *École Normale Superieure*, pasó a formar parte de la *Université de Paris* y en 1962 (con Georges Pompidou como primer ministro) la *École* pasó a ser reconocida, además, como centro de investigación.
  [Sólo a partir de 1902 se admitieron mujeres]

- Lagrange —con Laplace como ayudante— enseñó matemáticas elementales en la *École* desde su fundación.

- También en 1794, se crea la *École Central des Travaux Publics*, después *École Polytechnique*, Lagrange —casi 60 años de edad— comenzó explicando allí Análisis Matemático.

LAGRANGE

Prend une grande part à l'organisation de l'Ecole polytechnique. Inaugure le cours d'analyse devant tout le personnel réuni le 24 mai 1795

- Por testimonios de alumnos (Fourier, entre otros), Lagrange nunca resultó ser un buen docente: voz excesivamente débil y monótona, perpetuo acento italiano y, sobre todo, alto grado de sus abstracciones $\Rightarrow$ Clases muy difíciles de aprovechar.
- Su obligación de dar clases no estaba incluida entre las condiciones de su traslado a París, sino que vino como consecuencia de los cambios instituidos por la revolución.
- En 1799 —63 años—, invocando su frágil salud y consciente del poco aprovechamiento de sus clases, logra que le eximan de su labor docente, aunque continua formando parte de la *École*. Así, mantiene su desahogada posición económica.

> «*Ces leçons n'avaient pour objet que l'avancement de l'analyse (...) et n'entraient pas nécessairement dans le système d'enseignement de l'Ecole*.»

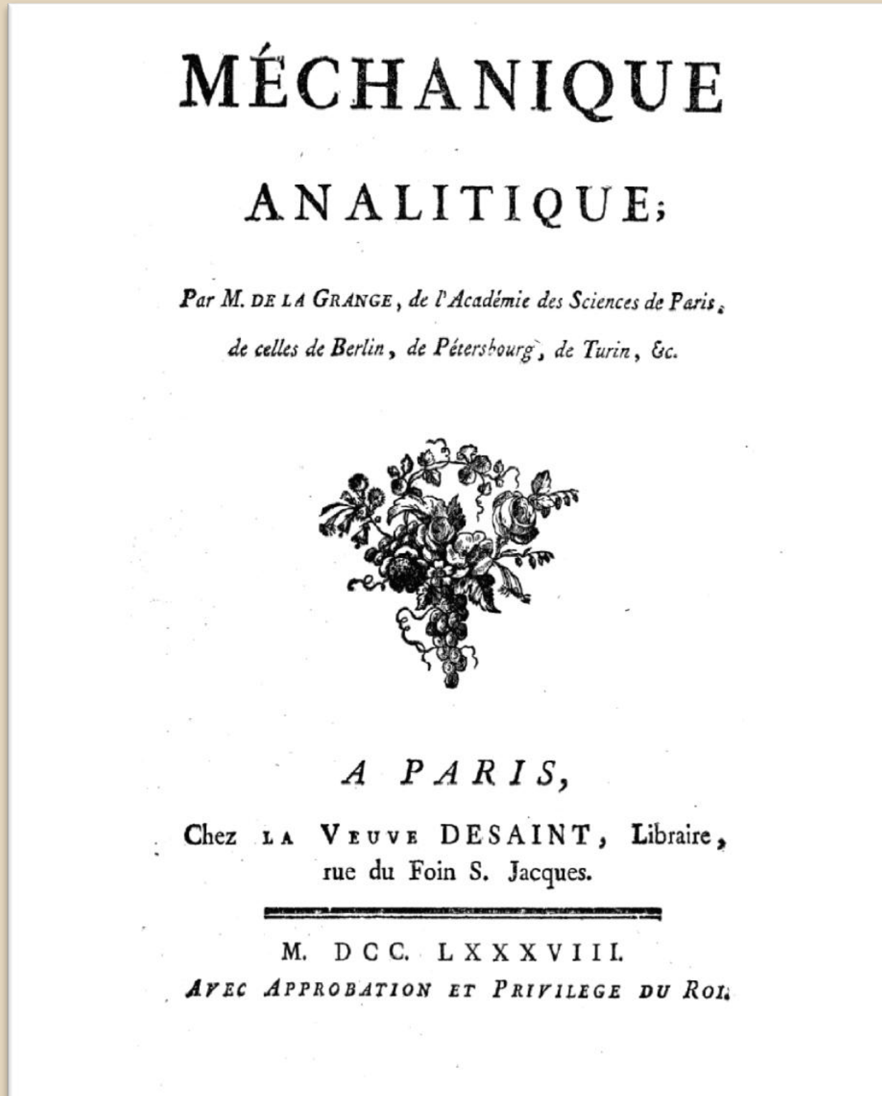
- Por el contrario, sus investigaciones merecieron desde el principio la máxima consideración nacional e internacional.
- Napoleón, a su retorno de Egipto (1801), se refirió a Lagrange como a la «*la haute pyramide des sciences mathématiques*».
- Algunas de sus últimas distinciones:
  - *Membre du Sénat Conservateur* (1799).
  - *Grand Officier de la Légion d'Honneur* (1804).
  - *Comte d'Empire* (1808).
  - *Grand-Croix de l'Ordre de la Réunion* (1813).
- Lagrange fallece el 11 de abril de 1813 —77 años, una semana después de recibir su *Grand-Croix*—, tras aparecer publicada la segunda edición de *Théorie des fonctions analytiques […], 1797.*
- Sus restos reposan desde entonces en el

Panthéon de Paris (1764-1790), Quartier Latin

Aux grands hommes la Patrie reconnaissante


JOSEPH LOUIS LAGRANGE.
SÉNATEUR COMTE DE L'EMPIRE,
GRAND OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
© Piero d'Houin

2.- Méchanique Analitique (1788)



MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

«On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais la plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science et l'art de résoudre problèmes qui s'y rapportent à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet, ne laissera rien à désirer.»

Como consecuencia:

«On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulier et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine.»

Contenido:

- Primera parte: *Estática* o teoría del equilibrio.
- Segunda parte: *Dinámica* o teoría del movimiento.
- En cada parte: *Sólidos y fluidos*, por separado.

2 A.- Parte I: Estática

Definiciones fundamentales (primeras líneas)**:**

- **Estática:** «ciencia del equilibrio de fuerzas».
- **Fuerza (o potencia**): «la causa, sea la que fuere, que imprime o tiende a imprimir movimiento a los cuerpos sobre los que se supone aplicada».
- **En el estado de equilibrio** las fuerzas no producen movimiento sino tendencias; es decir, «se destruyen» y anulan los efectos individuales. Las fuerzas se miden por el efecto que producirían si no fuesen contrarrestadas.

Sección inicial: revisión histórica personal de las principales aportaciones, que resume en tres leyes fundamentales:

- **Ley de la balanza**, Arquímedes (siglo III, a. de C.), con demostraciones «modernas» de Stevin, Galileo, Huyghens…
- **Ley de la composición de las fuerzas**, Galileo (Diálogo, 1632) y perfeccionado por Varignon (*Projet d'une nouvelle mécanique*, 1687). Componiendo las fuerzas dos a dos, se obtiene una resultante, que ha de ser nula en el equilibrio.
- **Principio de las velocidades virtuales**, original de Jean Bernoulli —Johann I—, en 1717 y sucesivamente refinado y aplicado por Varignon, Maupertuis y Euler, entre otros. Su enunciado según Lagrange:

  «Si un sistema cualquiera de tantos cuerpos o puntos como se desee, sometido cada uno de ellos a fuerzas cualesquiera, está en equilibrio y se da a este sistema un movimiento arbitrariamente pequeño, en virtud del cual cada punto recorre un espacio infinitamente pequeño que expresará su

velocidad virtual, la suma de las fuerzas multiplicadas cada una por el espacio que el punto donde cada una de ellas se aplica recorre en la dirección de dicha fuerza, será siempre igual a cero, entendiendo que como positivos los pequeños desplazamientos en la dirección de las fuerzas y negativos los de sentido opuesto.»

[Hoy: «*principio de los trabajos virtuales*»] $\xcancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0}$

Según Lagrange: las dos leyes anteriores —y cualquier otra sobre estática— se deducen de este principio, sin más que darle forma matemática adecuada. De hecho él escribe:

$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0$, [*dp, dq, dr,* … representan «pequeños desplazamientos» y *P, Q, R,* …las respectivas fuerzas «dirigidas según aquellos desplazamientos»].

Si hay ligaduras: *p, q, r, …* no son independientes. Alternativas:

- Determinar las fuerzas responsables de las ligaduras…
- Operar teniendo en cuenta ligaduras tipo f(*p, q, r, …*)=0. Para este caso, presenta un tratamiento original que hoy conocemos como «*multiplicadores de Lagrange*»: la última expresión la escribe ahora en la forma: $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots + \lambda\,df = 0$, a la que denomina *ecuación general del equilibrio*, «que se tratará como una ecuación ordinaria de máximos y mínimos».

El resto de la primera parte:

- Refinar y precisar [p. ej. distinguir entre δ, «variaciones»; y *d*, «diferenciales»], deduciendo las leyes anteriores.
- Aplicar la ecuación general a casos particulares.
- Extenderla a fluidos incompresibles, como «caso límite».

2 B.- Parte II: Dinámica

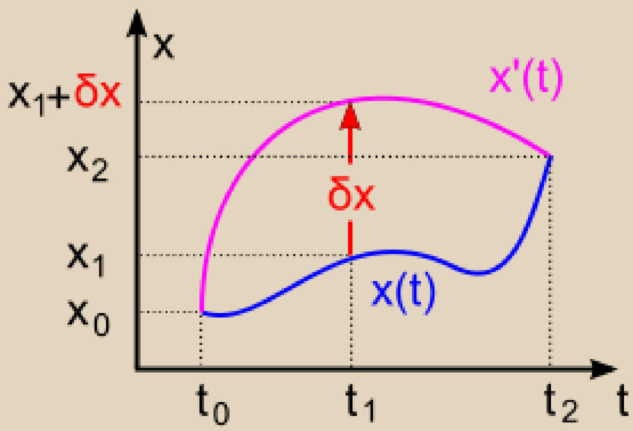
Dinámica newtoniana: ley fundamental

Forma general	Formas particulares
$\vec{F} = m\vec{a}$	— Coordenadas cartesianas: – $F_x = m\,\ddot{x}$ – $F_y = m\,\ddot{y}$ — Coordenadas polares: – $F_\rho = m\,(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)$ – $F_\varphi = m\,(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$

Propósito de Lagrange: una formulación general, independiente de las coordenadas, rigurosa y práctica.

Idea inicial, de D'Alembert, en su *Traité de Dynamique* (1743): reducir cualquier problema de dinámica a otro de estática.

Esencialmente (notación actual, por comodidad):



- Antes: $$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$
- Ahora: $$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$
- O sea: $$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

(Principio de D'Alembert)

Ligaduras *holónomas* —*k*, de la forma $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, t) = 0$ — y sus trabajos virtuales son nulos (excluye el rozamiento).

$$+$$

Coordenadas generalizadas («tout-à-fait indépendantes»):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N-k}, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right]_i \delta q_j = 0$$

siendo

$$n \equiv 3N - k; \quad Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{(fuerza generalizada)}; \quad T \equiv \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

9. De cette manière la formule générale du mouvement $\Gamma + \Phi = 0$ (art. 2) sera transformée en celle-ci,

$$\Xi\,\delta\xi + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\phi + \&c = 0,$$

dans laquelle on aura

$$\Xi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi}$$

$$\Psi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi}$$

$$\Phi = d.\,\frac{\delta T}{\delta d\phi} - \frac{\delta T}{\delta \phi} + \frac{\delta V}{\delta \phi}$$

&c,

en supposant

$$T = S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}\right) m,\quad V = S\,\Pi\, m,$$

$$\&\ d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.$$

Si donc dans le choix des nouvelles variables ξ, ψ, φ, &c, on a eu égard aux équations de condition données par la nature du système proposé, ensorte que ces variables soient maintenant tout-à-fait indépendantes les unes des autres, & que par conséquent leurs variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, &c, demeurent absolument indéterminées, on aura sur le champ les équations particulieres $\Xi = 0$, $\Psi = 0$, $\Phi = 0$, &c, lesquelles serviront à déterminer le mouvement du système; puisque ces équations sont en même nombre que les variables ξ, ψ, φ, &c, d'où dépend la position du système à chaque instant.

Mais quoiqu'on puisse toujours ramener la question à cet état, puisqu'il ne s'agit que d'éliminer par les équations de condition, autant de variables qu'elles permettent de le faire, & de prendre ensuite pour ξ, ψ, φ, &c, les variables

2 D.- Ecuaciones de Lagrange

Generales:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j; \quad j=1,2,\ldots,n$$

Caso particular:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0; \quad L\equiv T-V; \quad \vec{F}_i\equiv\nabla_i V$$

Medios continuos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right)-\frac{\delta L}{\delta \eta}=0$$

Pero ¡ojo ahora!: funcionales, derivadas funcionales, densidad lagrangiana, etc.

3 A.- Primer impacto

- Las ideas principales (multiplicadores y ecuación) ya habían sido expuestas (p. ej. movimiento de libración lunar, 1780).
- Ahora como punto de partida, despojadas de toda dependencia de principios virtuales y variacionales, siendo éstos ahora deducibles a partir de las ecuaciones generales.
- Ni figuras, ni intuiciones, ni principios variacionales... Sólo un planteamiento adecuado (coordenadas generalizadas + energía potencial) y un tratamiento matemático riguroso.
- En ese sentido quedó como una rama del Análisis Matemático, situación que aún se mantiene en diversos centros.

- Como reafirmación de lo anterior: se ha dicho alguna vez que, para Lagrange, en el título de su obra había que dar más peso al adjetivo *Analitique* que al sustantivo *Méchanique*.
- Consta que hacia el cambio de siglo XVIII-XIX, la formulación lagrangiana era la habitual en la investigación y, aunque más paulatinamente, en la docencia.
- El resumen de las aportaciones previas a la mecánica, que Lagrange incluye como introducción —tanto a la estática como a la dinámica— también resultó de gran influencia: muchos la consideran como una seria y documentada introducción a la *historia de la mecánica*.
- No sólo demuestra erudición, sino que había consultado muchas fuentes originales. Curiosidad y comprobación: varios historiadores posteriores cometieron los mismos errores de citas que Lagrange.

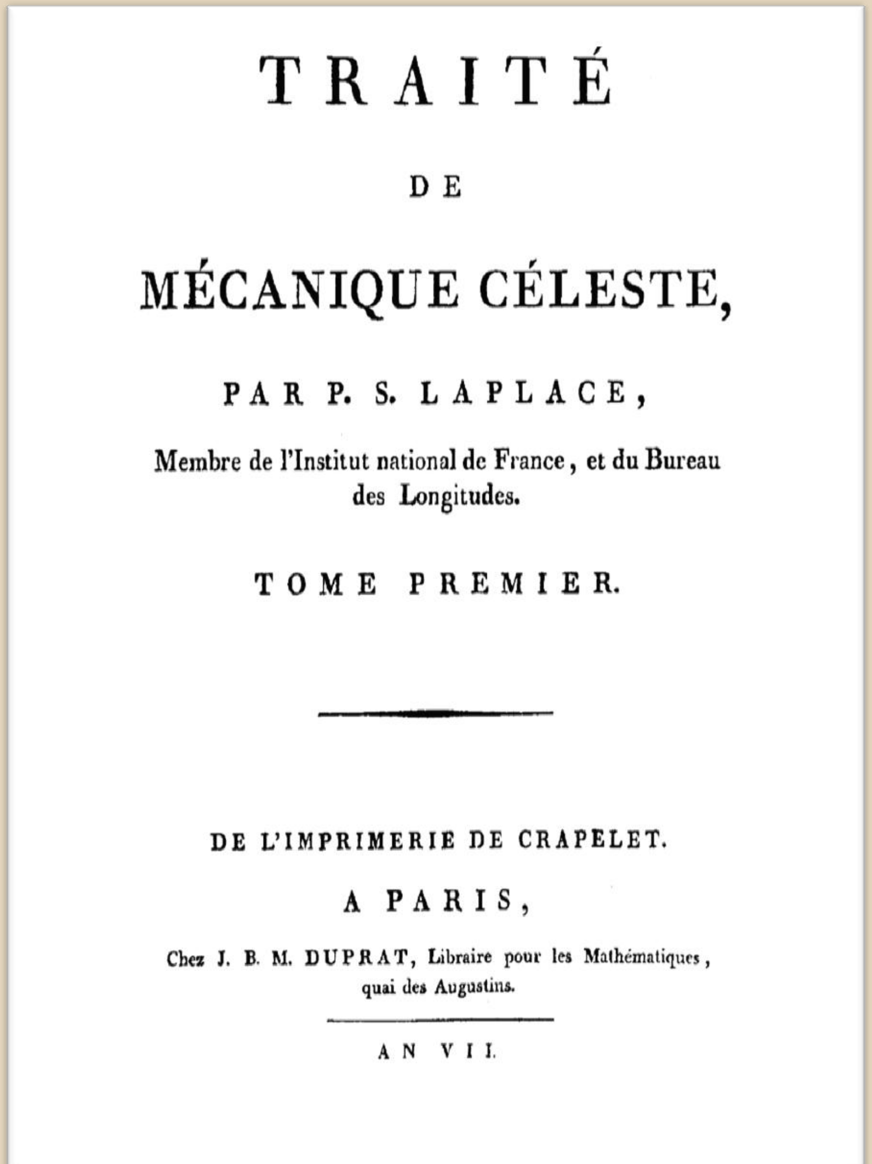
- La doble influencia de Lagrange —en la mecánica y en su historia— es reconocida expresamente por Mach, Dugas, Jouguet y Truesdell, entre otros. Aunque, a partir de los 50's, se duda de la importancia de su influencia en la historiografía.
- Posiblemente, la crítica más fuerte es la de Truesdell (p. 229, *Ensayos de Historia de la Mecánica*, Tecnos, 1975):

1. *Había poco de nuevo en la Méchanique Analitique; su contenido procede de trabajos anteriores del propio Lagrange o de las obras de Euler y otros predecesores.*
2. *Lagrange no comprende, o concede poca importancia, a los principios y conceptos generales de la mecánica.*
3. *Los bosquejos históricos de Lagrange suelen dar las referencias correctas, pero tergiversan o menosprecian el contenido de las mismas. [«Whigism»]*

3 B.- Algunos desarrollos posteriores:

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

- Entre 1799 y 1825, *Traité de Mécanique Céleste* (5 volúmenes).
- Refina y aplica los modernos desarrollos de la mecánica clásica —incluyendo colaboraciones propias— a la astronomía. Aclara: el significado de la ley de inercia y de la gravitación universal.
- Interesa resaltar: al profundizar en el problema de tres cuerpos, introduce y desarrolla un método de cálculos aproximados (teoría de perturbaciones) que amplía la aplicabilidad y el prestigio de la mecánica.
- Además:
  - *Théorie analytique des probabilités*, 1795, 1812.
  - *Exposition du système du monde*, 1796.
  - *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814.


TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

«Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.»

[*Demonio de Laplace*]

3 B.- Algunos desarrollos posteriores:

William Rowan Hamilton (1805-1865)

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

- Ecuaciones de Lagrange: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

"n ecuaciones diferenciales de segundo orden"

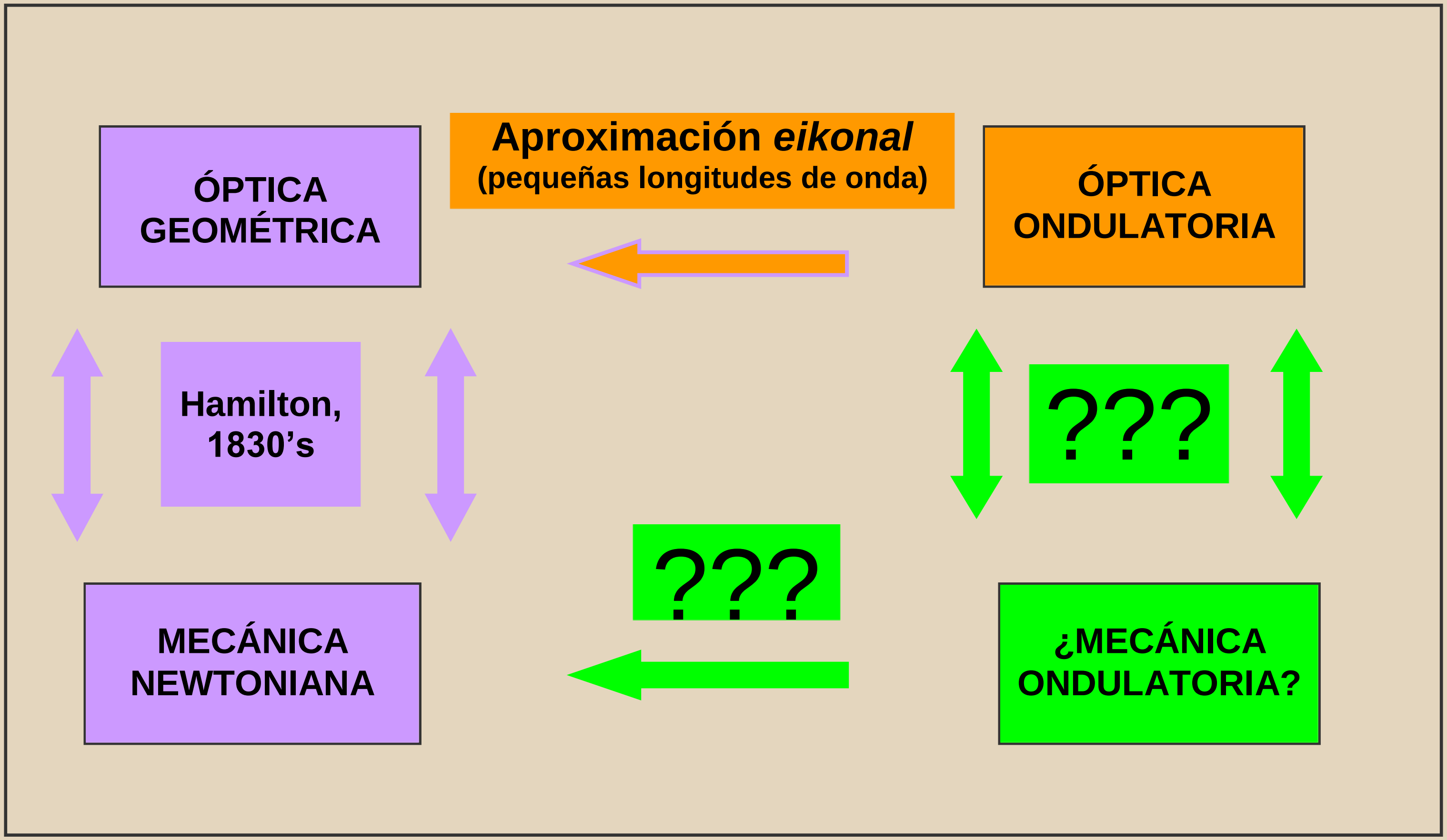
- Ecuaciones de Hamilton: $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\left[p_i \equiv \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}; \quad H(q,p,t) \equiv \sum_i \dot{q}_i \cdot p_i - L \quad \text{(transformación de Legendre)} \right]$$

"2n ecuaciones diferenciales de primer orden"

- **La auténtica motivación de Hamilton (1833-1837):** poner de manifiesto la intuida analogía entre la mecánica newtoniana y la óptica geométrica, dado que ésta podía explicarse a partir de una concepción corpuscular de la luz.
- **Lo logró con una formulación propia original**, diferente de la newtoniana y de la lagrangiana.
- **Por curiosidad, algunos "elementos correspondientes":**
  - rayo luminoso ⇔ trayectoria de la masa puntual
  - índice de refracción del medio ⇔ masa de la partícula
  - velocidad de la luz ⇔ energía cinética de la partícula
  - tiempo de propagación T ⇔ acción integral S
  - rayos de luz ortogonales a las superficies T=cte. ⇔ trayectorias ortogonales a las superficies S=cte.
  - principio de Fermat (δT=0) ⇔ p. de mínima acción (δS=0)
- **Todo ampliado y refinado por Jacobi**, una década después.

La analogía óptico – mecánica y el nacimiento de la mecánica ondulatoria. Schrödinger, 1926



Finalmente: una consideración y dos "recuerdos"

- A pesar de haber sido "superada" por la mecánica cuántica y por la teoría cuántica de campos, la mecánica clásica perdura en los nuevos planteamientos:

  - El hamiltoniano, preferente en la mecánica cuántica: $|\alpha(t)\rangle$

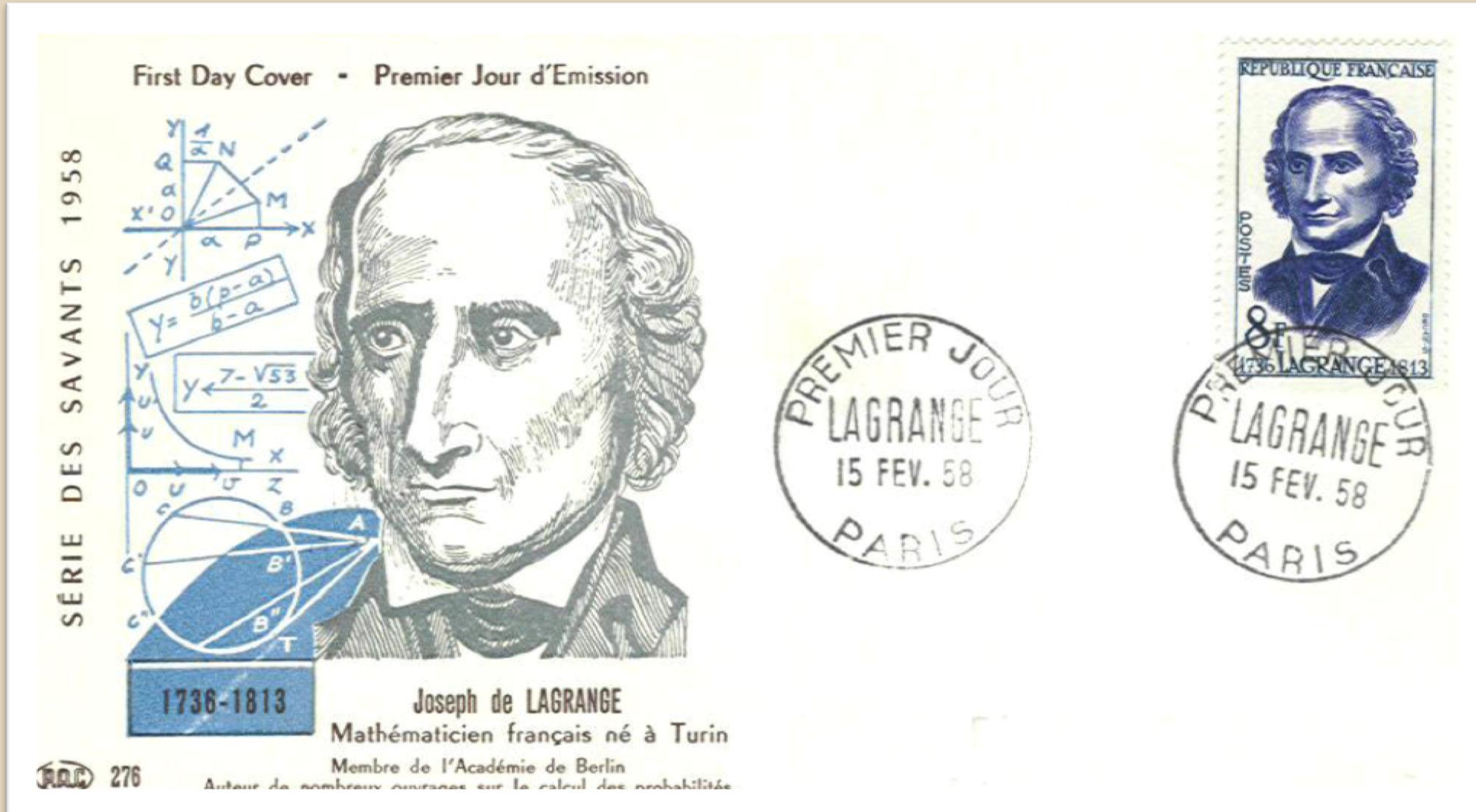
    $i\hbar \frac{d}{dx}|\alpha(t)\rangle = H|\alpha(t)\rangle$ con solución formal: $|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\,t\right)|\alpha(0)\rangle$

  - El lagrangiano, preferente en la teoría de campos: $\eta(x,t)$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$$

$$\mathrm{L} = \int dx\, L\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

Para filatélicos: *Série des savants français* (1958, premier jour)



Para… todos: http://math-doc.ujf-grenoble.fr/OEUVRES/

[*Proyecto digital de Gallica BNF + Mathdoc*]

"Obras completas" *online*:

- Euler
- D'Alembert
- Lagrange
- Laplace
- Cauchy

…………………..