# OLGA A. LADYZHENSKAYA
# Vida y Matemáticas de una mujer excepcional

JUAN L. VÁZQUEZ

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid,
y Real Academia de Ciencias

$\diamondsuit$

## Lección inaugural del curso 2022 - 2023

Facultat de Matemàtiques i Estatistica - UPC

Barcelona, 19 Oct. 2022

# Outline


1. Vida de Olga Ladyzhensakaya
2. Contribuciones matemáticas
3. Olga la persona

# Homenaje a Olga Alexándrovna Ladýzhenskaya en el centenario de su nacimiento

”La influencia de Olga Ladyzhenskaya (1922-2004) en las Matemáticas del siglo XX es universalmente reconocida por la Comunidad Científica Mundial. No son solo los resultados científicos de Olga los que han jugado un papel especial en su excepcional contribución a las matemáticas, incluso si son realmente profundos y fundamentales para ser recordados, sino también su integridad personal y su energía vital.

Los intereses de Olga en la vida no se limitaron a las matemáticas y las ciencias. Era una auténtica intelectual y amaba a los animales y a la Naturaleza. Era una viajera entusiasta y tenía una enorme habilidad como narradora cuando compartía sus impresiones con los amigos.

Había pocas cosas que no podía soportar; reaccionaba con rabia ante cualquier injusticia y con empatía con las desgracias de los demás; y siempre ayudó a las personas solas y débiles. Expresó abiertamente sus opiniones sobre temas culturales y sociales, incluso en los años del régimen totalitario, a menudo descuidando la seguridad propia”.

(tomado de Gregory A. Seregín, profesor en S. Petersburgo y Oxford)

# PRIMERA PARTE

## *Vida de Olga A. Ladyzhenskaya*

*O A L*

# Infancia y juventud de OAL. Años de prueba

Olga Aleksándrovna Ladýzhenskaya [1] nació el 7 de marzo de 1922 en la pequeña ciudad de Kologriv en la región (*óblast*) de Kostromá, a 500 kilómetros al noreste de Moscú (tomad la ruta a Yaroslavl). La menor de tres hijas de los Ladýzhenski, Olga mostró habilidades matemáticas muy temprano.

Su padre, Aleksander Ivánovich Ladýzhenski, fue profesor de matemáticas en Kologriv. Era una familia procedente de la baja nobleza, amante de la cultura. Aleksander enseñó a sus hijas matemáticas y despertó el gusto de Olga.

Fue ejecutado en 1937 tras un juicio sumarísimo, durante la Gran Purga estaliniana. Tiempos muy negros, en unos años se estima que fueron eliminadas más un millón de personas, entre ellas famosos dirigentes del PCUS como Kámenev, Zinóviev y Bujarin. Aun en 1940 fue asesinado el famoso líder León Trotski en México (por un estalinista español, Ramón Mercader, por encargo de la NKVD / KGB).

1. Verán a veces otras grafías como Alexandrovna Ladyženskaja.

# Infancia y juventud de OAL. Años de prueba

Olga Aleksándrovna Ladýzhenskaya [1] nació el 7 de marzo de 1922 en la pequeña ciudad de Kologriv en la región (*óblast*) de Kostromá, a 500 kilómetros al noreste de Moscú (tomad la ruta a Yaroslavl). La menor de tres hijas de los Ladýzhenski, Olga mostró habilidades matemáticas muy temprano.

Su padre, Aleksander Ivánovich Ladýzhenski, fue profesor de matemáticas en Kologriv. Era una familia procedente de la baja nobleza, amante de la cultura. Aleksander enseñó a sus hijas matemáticas y despertó el gusto de Olga.

Fue ejecutado en 1937 tras un juicio sumarísimo, durante la Gran Purga estaliniana. Tiempos muy negros, en unos años se estima que fueron eliminadas más un millón de personas, entre ellas famosos dirigentes del PCUS como Kámenev, Zinóviev y Bujarin. Aun en 1940 fue asesinado el famoso líder León Trotski en México (por un estalinista español, Ramón Mercader, por encargo de la NKVD / KGB).

Por esta razón, Olga fue considerada oficialmente como “hija de un enemigo del pueblo” y, a pesar de los excelentes exámenes de ingreso en la Universidad Estatal de Leningrado, hoy San Petersburgo, no fue admitida. Esta era entonces la mejor universidad de la URSS.

Olga tenía 17 años y le tocaba vivir en la desgracia y la pobreza como parte del viejo mundo que algunos querían ver extirpado de raíz.

1. Verán a veces otras grafías como Alexandrovna Ladyženskaja.

# Vuelta al pueblo

De 1939 a 1941 OAL estudió en el Instituto Pedagógico Pokrovsky de Leningrado. Al comienzo de la II Guerra Mundial (llamada en Rusia *Gran Guerra Patriótica*), Olga regresó a Kologriv, donde enseñó matemáticas en la antigua escuela de su padre. Tenía 19 años y una vida humilde.

Autorretrato 1943

La Olga joven real

# Giro en la vida. La Universidad I

En 1943, a OAL se le permitió inscribirse en la Universidad de Moscú como estudiante de segundo año. El “milagro” se debió a una persona de su entorno en Kologriv que estaba impresionada por sus notables dotes para las matemáticas y su bondad y logró usar sus contactos con autoridades benévolas en el sistema (que las hubo). Tras las entrevistas de rigor, OAL entró en el Dpto. de Matemática y Mecánica de la famosa Univ. Lomonósov de Moscú (GMU-L) bajo la tutela del gran Iván G. Petrovski, analista famoso que es la segunda P del anagrama KPP en la teoría de ondas viajeras y autor de libros famosos. Todo un lujo para la niña que estaba destinada a la oscura vida rural con algún que otro disgusto añadido por causa de ...

En 1947, OAL recibió el diploma de graduación con honores (su supervisor fue Petrovski). El trabajo se titulaba “The well-posedness of the Cauchy problem for 2nd. order parabolic equations”. $\Rightarrow$ *El artículo o su reseña se pueden leer en internet, son de fácil comprensión.*

# Giro en la vida. La Universidad I

En 1943, a OAL se le permitió inscribirse en la Universidad de Moscú como estudiante de segundo año. El "milagro" se debió a una persona de su entorno en Kologriv que estaba impresionada por sus notables dotes para las matemáticas y su bondad y logró usar sus contactos con autoridades benévolas en el sistema (que las hubo). Tras las entrevistas de rigor, OAL entró en el Dpto. de Matemática y Mecánica de la famosa Univ. Lomonósov de Moscú (GMU-L) bajo la tutela del gran Iván G. Petrovski, analista famoso que es la segunda P del anagrama KPP en la teoría de ondas viajeras y autor de libros famosos. Todo un lujo para la niña que estaba destinada a la oscura vida rural con algún que otro disgusto añadido por causa de ...

En 1947, OAL recibió el diploma de graduación con honores (su supervisor fue Petrovski). El trabajo se titulaba "The well-posedness of the Cauchy problem for 2nd. order parabolic equations". $\Rightarrow$ *El artículo o su reseña se pueden leer en internet, son de fácil comprensión.*

Tras casarse con Andrey Kiselëv (también matemático que enseñó Historia de las Matemáticas en la Universidad de Leningrado) se mudó otra vez allí e ingresó en el programa de doctorado en la Universidad de Leningrado, GLU, bajo la dirección de Sóbolev. La vida sonreía a una mujer que siempre mantuvo su talento, su amor al trabajo, el apego a sus amigos y su coraje.

- *8 años de dificultades no son nada para gente tan valiente*

# Universidad II. Leningrado/San Peter

Olga llegó a San Petersburgo, entonces Leningrado, e ingresó en el programa de doctorado en la Universidad Estatal bajo la dirección del gran Serguéi Lvóvich Sóbolev, famoso entre los famosos por dar nombre a una familia de espacios funcionales que usamos todos los días en las EDPs de la Física y la ingeniería, y por las llamadas desigualdades de Sobolev.

A los dos años consiguió el doctorado con el trabajo "Solution of the Cauchy problem for hyperbolic systems by the method of finite diferences". Aquí aparecen las diferencias finitas, la conexión con la matemática numérica. Esto sucedió bajo la influencia de Sóbolev. Estamos hacia el año 1950. Fue tb la época del comienzo de la amistad con Vladímir Ivánovich Smirnóv, mentor que fue de Sobolev, una amistad de OAL que duraría toda la vida.

A continuación Olga trabajó para el escalón más alto de los estudios soviéticos, la Tesis de Habilitación que se tituló "The Mixed Problem for a Hyperbolic Equation", [2] y en ella justificó el método de Fourier para ecuaciones hiperbólicas generales de segundo orden en el caso multi-dimensional.

2. Doklady Akad. Nauk SSSR 73, (1950).

# Universidad II. Leningrado/San Peter

Olga llegó a San Petersburgo, entonces Leningrado, e ingresó en el programa de doctorado en la Universidad Estatal bajo la dirección del gran Serguéi Lvóvich Sóbolev, famoso entre los famosos por dar nombre a una familia de espacios funcionales que usamos todos los días en las EDPs de la Física y la ingeniería, y por las llamadas desigualdades de Sobolev.

A los dos años consiguió el doctorado con el trabajo “Solution of the Cauchy problem for hyperbolic systems by the method of finite diferences”. Aquí aparecen las diferencias finitas, la conexión con la matemática numérica. Esto sucedió bajo la influencia de Sóbolev. Estamos hacia el año 1950. Fue tb la época del comienzo de la amistad con Vladímir Ivánovich Smirnóv, mentor que fue de Sobolev, una amistad de OAL que duraría toda la vida.

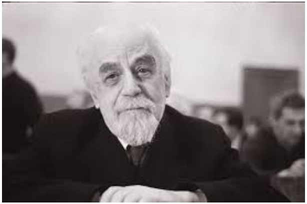
A continuación Olga trabajó para el escalón más alto de los estudios soviéticos, la Tesis de Habilitación que se tituló “The Mixed Problem for a Hyperbolic Equation”, [2] y en ella justificó el método de Fourier para ecuaciones hiperbólicas generales de segundo orden en el caso multi-dimensional.

♠ La Tesis H estaba lista en 1951. Sin embargo, la política intervino y Olga no pudo defenderla hasta la muerte de Stalin en 1953. Un susto más.

2. Doklady Akad. Nauk SSSR 73, (1950).

# Grandes figuras de las matemáticas mencionadas


Petrovski



Smirnóv

Sóbolev

- Iván Petrovski fue alumno de Dmitri Egórov. Entre sus estudiantes están Olga Ladyzhenskaya, Yevgeniy Landis, Olga Oleinik y Serguei Godunóv.
- Vladímir Smirnóv fue alumno de Vladimir Steklóv. Entre sus estudiantes están Leonid Kantoróvich, Solomon Mikhlin, y Serguei Sóbolev,
- Serguéi Sóbolev fue alumno de Nikolai Gunter y Vladímir Smirnov. Entre sus muchos estudiantes están Vladimir Kondrashóv, Olga Ladyzhenskaya, Mikhail Lavréntiev y Tadei Zelenyák.

# Una carrera de éxitos

- Nacida en 1922. Desde 1950, Olga Ladyzhenskaya trabajó en la Universidad de Leningrado, llegó a la cátedra en 1955.
- Desde 1954 hasta el final de su vida, fue Fellow de la Sección de Leningrado del Instituto Steklov (llamado LOMI, hoy día POMI-RAN).
- En 1961, OAL organizó el Laboratorio de Física Matemática en el Lomi, y dirigió este laboratorio hasta 1998.

# Una carrera de éxitos

- Nacida en 1922. Desde 1950, Olga Ladyzhenskaya trabajó en la Universidad de Leningrado, llegó a la cátedra en 1955.
- Desde 1954 hasta el final de su vida, fue Fellow de la Sección de Leningrado del Instituto Steklov (llamado LOMI, hoy día POMI-RAN).
- En 1961, OAL organizó el Laboratorio de Física Matemática en el Lomi, y dirigió este laboratorio hasta 1998.
- La profesora Ladyzhenskaya escribió más de 250 documentos matemáticos. Su trabajo cubre un amplio espectro de ecuaciones en derivadas parciales que van desde las ecuaciones hiperbólicas hasta ecuaciones diferenciales generadas por las funciones simétricas de los valores propios del Hessiano, y trató temas como la convergencia de la serie Fourier o la aproximación de diferencias finitas como método de resolución. Hizo contribuciones fundamentales en la Mecánica de Fluidos.

  Desarrolló el tratamiento analítico funcional de los problemas estacionarios no lineales y fue pionera en la teoría de los atractores para las ecuaciones de evolución disipativas.

  Es autora de cinco monografías que han influido en gran medida en el desarrollo del campo de las EDPs (ecuaciones en derivadas parciales) a lo largo de la segunda mitad del siglo pasado.

# Digno de visitar en San Petersburgo

LOMI=POMI, la Sección de San Petersburgo
del Instituto Steklov de Matemáticas

En Fontanka River Embankment, no. 27,
junto al canal Fontanka, St Petersburgo

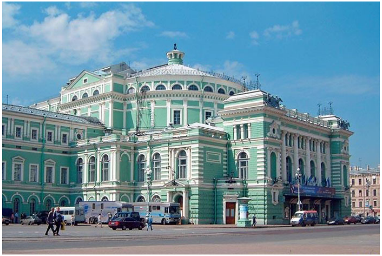
# Vida en el LOMI

## En el Instituto Steklov de Matemáticas

Olga con N Uraltseva, V Solonnikov y V Smirnov en 1968

# Bellezas de San Petersburgo

Palacio del Hermitage



El teatro Mariinski donde reinó Anna Netrebko

# Reconocimientos a OAL

- Sus extensos y profundos logros matemáticos fueron honrados con múltiples reconocimientos en su país. Recibió el Premio de la Universidad de Leningrado (dos veces, en 1954 y 1961), el Premio Chebyshëv de la Academia de Ciencias de la URSS (1966), el premio estatal de la URSS (1969), el Premio Kovalevskaya de la Academia Rusa (1992) y el Premio IOFE de la Administración de la Ciudad de San Petersburgo (2002).
- En 1981 se convirtió en miembro correspondiente, y en 1990 en miembro pleno de la Academia de Ciencias de la URSS. En 2002 recibió el premio más alto de la Academia Rusa, la gran medalla de oro Lomonosov.

# Reconocimientos a OAL

- Debido a las reglas del régimen soviético, Olga solo había podido viajar una vez al extranjero, cuando asistió al Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de 1958 en Edimburgo. Tuvieron que pasar 30 años hasta que pudo volver a viajar fuera, ya después de la Perestroika de Gorbachov.

  El deseado contacto con investigadores extranjeros le permitió comprobar que habían estado estudiando temas similares y causó algunas fricciones que la amistad naciente resolvió.

- Desde 1991 fue conocida e invitada con alguna frecuencia, visitando sobre todo USA, Alemania e Italia pero también España.

  Fue elegida como miembro extranjero de la Academia Leopoldina en Alemania (1985), de la Accademia Nazionale dei Lincei, Italia (1989), y de la Academia Americana (USA) de Artes y Ciencias (2001).

  Recibió además el título de Doctor honoris causa por la Universidad de Bonn (2002).

# Visitas notables

Congreso IM de Edinburgo en 1958

2003 en NY con Nirenberg, Morawetz, Lax, ...

# SEGUNDA PARTE

*Contribuciones matemáticas*

Opera Selecta

# Contribución matemática. Sus libros

- Ladyzhenskaya, O. A. (1969) [First Russian edition 1961, 63], *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow,* Mathematics and Its Applications 2 (Revised Second edition), Gordon and Breach, pp. XVIII+224. 1514 citations in Mathscinet.
- Ladyzhenskaya, O.A.; Ural'tseva, Nina N. (1968), *Linear and Quasilinear Elliptic Equations,* Mathematics in Science and Engineering 46, Academic Press, pp. XVIII+495. Russian edition 1964. 1838 citations in Mathscinet.
- Ladyzhenskaya, O. A.; Solonnikov, V. A.; Ural'ceva, N. N. (1968), *Linear and quasi-linear equations of parabolic type,* Translations of Mathematical Monographs 23, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, pp. XI+648. Russian edition 1967. 5028 citations in Mathscinet.
- Ladyzhenskaya, O. A. (1985), *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics,* Applied Mathematical Sciences 49, Springer Verlag, pp. XXX+322. [First Russian edition 1974]. 525 citations in Mathscinet.
- Ladyzhenskaya, O. A. (1991), *Attractors for Semigroups and Evolution Equations,* Lezioni Lincee: Cambridge University Press, pp. xi+7. 2nd. edition 2002. 414 citations in Mathscinet.

# Contribución matemática I. Los libros de EDPs no lineales

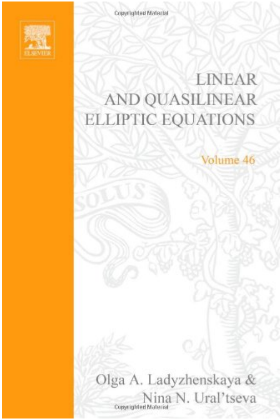
Llega el turno de examinar las dos obras más conocidas de OAL y sus estudiantes.

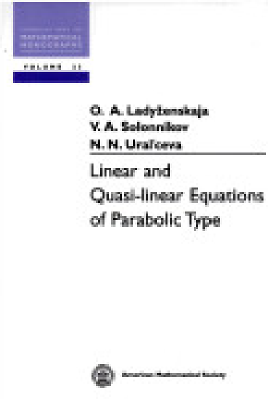
Empezamos porsu libro más famoso, “Ecuaciones lineales y cuasilíneas de tipo parabólico”. Publicado en Occidente en 1968, tiene más de 5000 citas en Mathscinet, He aquí el título ruso original:
• O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov y N. N. Uralceva, *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa,* Izdat. ”Nauka”, Moscú, 1967

Hace pareja en el lote la versión elíptica de este libro:
• O. A. Ladyženskaja y N. N. Uralceva, *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa,* Izdat. ”Nauka”, Moscú, 1964. Casi 2000 citas.

Esto da la imagen de una personalidad matemática que con su grupo obtiene un tremendo impacto en el campo de las EDPs (ecuaciones en derivadas parciales) de dos de los tipos que más importan en los fundamentos de la Física Matemática.
No hace falta decir que, aunque hoy hay muchos libros sobre el tema de las EDPS, estos dos libros siguen siendo extremadamente valiosos para muchos estudiantes de doctorado, posdocs, y de obligada referencia para expertos en PDEs de todas las edades.

# Los dos libros




Daremos una idea del contenido más tarde

# Contribución matemática III. Los atractores

Veamos ahora un libro de la edad tardía. En este volumen, OAL redondea y completa en forma de manual la exitosa serie de conferencias dadas en la Accademia Nazionale dei Lincei en Roma en 1991.

*Attractors for semigroups and evolution equations* OA Ladyzhenskaya - 1991.

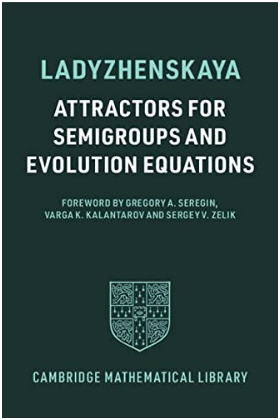
Podéis leerlo en books.google.com en la edición de 2002.

OAL recibió el Premio Kovalevskaya de la Academia de Ciencias de Rusia por este trabajo.

# Attractors

´

## El libro de los atractores




2nd Edition. Foreword by Gregory A. Seregin,
Steklov, St Petersburg, and Univ. Oxford, expert in fluids, ... ...

# Atractores. Noticia de las matemáticas

- Las conferencias romanas, dei Lincei, expuestas en el libro tratan de

(i) los semigrupos de operadores $S_t(u_0) = u(t)$, $t \geq 0$, que son continuos, en principio no lineales, están definidos en un espacio métrico completo. Es decir $u(t) \in X$ y $X$ es por ejemplo un espacio $L^p$, pero puedes dejar volar la imaginación. **Recuerda.** Semigrupo significa que $S_t \circ S_r = S_{t+r}$ para todo $r, t \geq 0$; $S_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) y de las soluciones de ecuaciones de evolución formuladas en forma abstracta. Se escriben así

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} = A\,u(t),}$$

y parece una EDO, Pero aquí $A$ es un operador integro-diferencial. Para empezar tomad el Laplaciano $\Delta$ definido en $\mathbb{R}^n$ o en un subconjunto acotado y os sale el Heat Semigroup. Me diréis que por qué no un grupo. Jeje, porque no lo es.

Se pretende saber todo sobre el comportamiento de las trayectorias $u(t) = u(t, x)$. Ojo: la $x$ estaba escondida,¡! Cuando $t \to 0$ las trayectorias se acercan al atractor, conjunto misterioso donde el sistema quiere terminar su ronda. Así llegamos a resolver muchos problemas de valores iniciales, $u(0) = u_0$, para EDPS adecuadas. En general eso quiere decir que $A$ es disipativo, y su opuesto $-A$ de llama maximal monótono.

# Atractores. Noticia de las matemáticas

- Las conferencias romanas, dei Lincei, expuestas en el libro tratan de

(i) los semigrupos de operadores $S_t(u_0) = u(t)$, $t \geq 0$, que son continuos, en principio no lineales, están definidos en un espacio métrico completo. Es decir $u(t) \in X$ y $X$ es por ejemplo un espacio $L^p$, pero puedes dejar volar la imaginación.
**Recuerda.** Semigrupo significa que $S_t \circ S_r = S_{t+r}$ para todo $r, t \geq 0$; $S_0 = \mathrm{Id}$.

(ii) y de las soluciones de ecuaciones de evolución formuladas en forma abstracta. Se escriben así

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} = A\,u(t),}$$

y parece una EDO, Pero aquí $A$ es un operador integro-diferencial. Para empezar tomad el Laplaciano $\Delta$ definido en $\mathbb{R}^n$ o en un subconjunto acotado y os sale el Heat Semigroup. Me diréis que por qué no un grupo. Jeje, porque no lo es.
Se pretende saber todo sobre el comportamiento de las trayectorias $u(t) = u(t, x)$. Ojo: la $x$ estaba escondida,¡! Cuando $t \to 0$ las trayectorias se acercan al atractor, conjunto misterioso donde el sistema quiere terminar su ronda. Así llegamos a resolver muchos problemas de valores iniciales, $u(0) = u_0$, para EDPS adecuadas. En general eso quiere decir que $A$ es disipativo, y su opuesto $-A$ de llama maximal monótono.

♡ *Y así, poco a poco, se teje la madeja, the unending thread, que interesa a analistas, probabilistas, geómetras, numeristas, físicos,... y otros*

# Atractores. Otras noticias

• Olga conoció a Jack Hale y ambos polemizaron sobre la paternidad de la idea de atractores en PDEs. Creo que ambos tenían razón, uno tiene que defender lo suyo, pero ”nada en exceso”.

• Yo hice mi tesis con Haim Brezis (Paris Jussieu, hoy Paris Sorbonne) sobre operadores del tipo maximal monótono.
He vivido entre semigrupos no lineales toda mi vida matemática y he escrito dos libros sobre el tema de estas páginas aplicado a ecuaciones específicas de tipo no lineal difusivo (2006 y 2007).
La comunidad española que estudia estos temas es numerosa y muy activa. Cito entre los seniors al gran Vicent Caselles que se nos murió tan pronto, al entusiasta divulgador J. M. Mazón en Valencia, y al académico J. I. Díaz en la UCM Madrid.

• Un resultado importante que es objeto de enorme sorpresa: muchos semigrupos disipativos se dejan describir para tiempo largo (comportamiento asintótico) como tendencia al equilibrio, y además el limite $t \to \infty$ está ligado al límite inicial $t \to 0$. Pero esto lo aprendí de mi maestro ruso Grigori I. Barenblatt (fallecido en 2018) y de mi amiga Shoshana Kamin, formada en la GMU-Lomonósov de Moscú que emigró a Tel Aviv hacia 1973. Por cierto, en esos misterios influye el grupo de simetrías de la ecuación. Y entonces renormalizamos y ... *the unending thread*.

# Atractores. Otras noticias

• Olga conoció a Jack Hale y ambos polemizaron sobre la paternidad de la idea de atractores en PDEs. Creo que ambos tenían razón, uno tiene que defender lo suyo, pero "nada en exceso".

• Yo hice mi tesis con Haim Brezis (Paris Jussieu, hoy Paris Sorbonne) sobre operadores del tipo maximal monótono.

He vivido entre semigrupos no lineales toda mi vida matemática y he escrito dos libros sobre el tema de estas páginas aplicado a ecuaciones específicas de tipo no lineal difusivo (2006 y 2007).

La comunidad española que estudia estos temas es numerosa y muy activa. Cito entre los seniors al gran Vicent Caselles que se nos murió tan pronto, al entusiasta divulgador J. M. Mazón en Valencia, y al académico J. I. Díaz en la UCM Madrid.

• Un resultado importante que es objeto de enorme sorpresa: muchos semigrupos disipativos se dejan describir para tiempo largo (comportamiento asintótico) como tendencia al equilibrio, y además el limite $t \to \infty$ está ligado al límite inicial $t \to 0$. Pero esto lo aprendí de mi maestro ruso Grigori I. Barenblatt (fallecido en 2018) y de mi amiga Shoshana Kamin, formada en la GMU-Lomonósov de Moscú que emigró a Tel Aviv hacia 1973. Por cierto, en esos misterios influye el grupo de simetrías de la ecuación. Y entonces renormalizamos y ... *the unending thread*.

Diablos, ¡me había prometido no hablar mucho de la escuela de Moscú!

# Una idea del libro parabólico LSU 1967

El problema 19 de Hilbert trata de saber la dependencia de la regularidad de las soluciones de EDPS con respecto a la regularidad de los datos para una numerosa clase de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden elípticas y parabólicas.
Let us be specific for a moment. Respiremos y vamos allá.

The Heat Equation $u_t = \Delta u$ is well known, it generates a semigroup in the $L^p$ spaces and moreover the solutions are smooth even the data are not. Remember that it is like an abstract ODE with initial value a function
The new question is : what happens with the parabolic families of related PDEs? Do solutions exit? are they smooth?

$$\boxed{u_t = \sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum_i b_i\partial_i u + cu + f}$$

and

$$\boxed{u_t = \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_i \partial_i(b_i u) + cu + f}$$

(where $(a_{ij})$ is a positive definite matrix, possible variable with space and time) are a powerful tool in advanced mathematics. Ladyzhenskaya could do that. It is not so new, many others had worked on that.

# Mejores modelos matemáticos. Ecuaciones no lineales

- Let us take a step forward and expand the family of diffusive models in a difficult direction, that of including nonlinearities.
- Indeed, the heat example and the linear models are not representative enough, since many models of science are nonlinear in a form that is very non-linear. A general model of nonlinear diffusion takes the divergence form

$$\boxed{\partial_t H(u) = \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(x, u, Du) + \mathcal{B}(x, t, u, Du)}$$

with monotonicity conditions on $H$ and $\nabla_p \vec{\mathcal{A}}(x, t, u, p)$ and structural conditions on $\vec{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{B}$. Posed in the 1960s in West and Russia.

# Mejores modelos matemáticos. Ecuaciones no lineales

- Let us take a step forward and expand the family of diffusive models in a difficult direction, that of including nonlinearities.
- Indeed, the heat example and the linear models are not representative enough, since many models of science are nonlinear in a form that is very non-linear. A general model of nonlinear diffusion takes the divergence form

$$\boxed{\partial_t H(u) = \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(x, u, Du) + \mathcal{B}(x, t, u, Du)}$$

  with monotonicity conditions on $H$ and $\nabla_p \vec{\mathcal{A}}(x, t, u, p)$ and structural conditions on $\vec{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{B}$. Posed in the 1960s in West and Russia.
- In this generality the mathematical theory is too rich to admit a simple description.

# Mejores modelos matemáticos. Ecuaciones no lineales

- Let us take a step forward and expand the family of diffusive models in a difficult direction, that of including nonlinearities.
- Indeed, the heat example and the linear models are not representative enough, since many models of science are nonlinear in a form that is very non-linear. A general model of nonlinear diffusion takes the divergence form

$$\boxed{\partial_t H(u) = \nabla \cdot \vec{\mathcal{A}}(x, u, Du) + \mathcal{B}(x, t, u, Du)}$$

  with monotonicity conditions on $H$ and $\nabla_p \vec{\mathcal{A}}(x, t, u, p)$ and structural conditions on $\vec{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{B}$. Posed in the 1960s in West and Russia.
- In this generality the mathematical theory is too rich to admit a simple description.
- Reference works. Books by Ladyzhenskaya-Solonnikov-Uraltseva, Friedman, Smoller,... But they are only basic reference.
- Enormous work on the regularity of the solutions has been achieved in the De Giorgi school (Italy) and then in the Caffarelli school to which many researchers in Madrid and Barcelona belong. Ask Cabré.

# Contrib. mat. II. Los fluidos incompresibles viscosos

Cambiamos a un mundo más difícil, los fluidos viscosos. El modelo es un sistema de ecuaciones (una para cada componente de la velocidad y una para la presión, y se llama Sistema de Ecuaciones de Navier-Stokes. Es crucial resolverlo en Aerodinámica, en Hidrodinámica, en Aviación, en la predicción del tiempo, en ecología marina,... y paro aquí.

# Contrib. mat. II. Los fluidos incompresibles viscosos

Cambiamos a un mundo más difícil, los fluidos viscosos. El modelo es un sistema de ecuaciones (una para cada componente de la velocidad y una para la presión, y se llama Sistema de Ecuaciones de Navier-Stokes. Es crucial resolverlo en Aerodinámica, en Hidrodinámica, en Aviación, en la predicción del tiempo, en ecología marina,... y paro aquí.

BUENAS NOTICIAS: se sabe resolver en dimensión de espacio 2, se escribe la ODE abstracta y se genera un semigrupo no lineal. OAL encontró una prueba original de existencia usando diferencias finitas (como decía Sobolev que habría que hacer) y de ahí surgió la idea de su libro de 1963. Hermoso de leer. La dedicatoria dice *"This book is dedicated to 3 very different persons whom I hold in high regard: my father Aleksander Ivánovich Ladyzhenski, Vladimir Ivanovich Smirnov, and Jean Leray".* Este último escribió los dos artículos seminales que plantearon el modo de ataque a esta serie de problemas en 1933-1934 en condiciones personales nada fáciles. Todo en NS viene de él. La gloire de la France.

# Contrib. mat. II. Los fluidos incompresibles viscosos

Cambiamos a un mundo más difícil, los fluidos viscosos. El modelo es un sistema de ecuaciones (una para cada componente de la velocidad y una para la presión, y se llama Sistema de Ecuaciones de Navier-Stokes. Es crucial resolverlo en Aerodinámica, en Hidrodinámica, en Aviación, en la predicción del tiempo, en ecología marina,... y paro aquí.

BUENAS NOTICIAS: se sabe resolver en dimensión de espacio 2, se escribe la ODE abstracta y se genera un semigrupo no lineal. OAL encontró una prueba original de existencia usando diferencias finitas (como decía Sobolev que habría que hacer) y de ahí surgió la idea de su libro de 1963. Hermoso de leer. La dedicatoria dice *"This book is dedicated to 3 very different persons whom I hold in high regard: my father Aleksander Ivánovich Ladyzhenski, Vladimir Ivanovich Smirnov, and Jean Leray".* Este último escribió los dos artículos seminales que plantearon el modo de ataque a esta serie de problemas en 1933-1934 en condiciones personales nada fáciles. Todo en NS viene de él. La gloire de la France.

MALAS NOTICIAS: el espacio real es de 3 dimensiones y el método matemático esbozado funciona solo a medias. Se sospecha que la dificultad matemática está relacionada con la turbulencia. OAL trabajó años en ello y aportó serios avances.

# Contrib. mat. II. Las ecuaciones de Navier-Stokes

Nuestros amigos Caffarelli, Kohn y Nirenberg aportaron en 1982 en el Courant Institute de NY un avance crucial. Es posible que las soluciones sean irregulares en algún punto, pero sabemos cuantificar el posible conjunto singular[3]. Y ahí estamos, el problema Clay número 6 del los 7 Problemas del Milenio de la Fundación Clay está aún abierto.

El tema es demasiado importante para mal representarlo en un par de páginas.

El precursor de los estudios sobre fluidos en España fue Amable Liñán, ingeniero que amaba las matemáticas, estudió en California en los años 1960 e inspiró a toda una joven generación en Madrid de los años 70. Experto mundial en combustión, Premio Príncipe de Asturias y académico, hombre siempre listo para hablar de su pasión.

Hay hoy día en España muchos practicantes de las matemáticas de los fluidos, en particular en el ICMAT de Madrid.

3. L Caffarelli, R Kohn, L Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, Comm. Pure Applied Math., 1982.

# Olga la persona

- Dicen que solo hay una explicación para el hecho de que, a pesar de tales adversidades, Olga Aleksandrovna pudiera llegar a la cima del reconocido Instituto Steklov de San Petersburgo y convertirse en líder incontestada de la Escuela de Matemáticas de Leningrado, y que esta explicación se reduce a su enorme talento, a su visión, y a su constancia en el trabajo.

4. Del poeta inglés John Donne (1572 - 1631)

# Olga la persona

- Dicen que solo hay una explicación para el hecho de que, a pesar de tales adversidades, Olga Aleksandrovna pudiera llegar a la cima del reconocido Instituto Steklov de San Petersburgo y convertirse en líder incontestada de la Escuela de Matemáticas de Leningrado, y que esta explicación se reduce a su enorme talento, a su visión, y a su constancia en el trabajo.
- No es toda la verdad, *No (wo)man is an island, entire of itself*[4].

4. Del poeta inglés John Donne (1572 - 1631)

# Olga la persona

- Dicen que solo hay una explicación para el hecho de que, a pesar de tales adversidades, Olga Aleksandrovna pudiera llegar a la cima del reconocido Instituto Steklov de San Petersburgo y convertirse en líder incontestada de la Escuela de Matemáticas de Leningrado, y que esta explicación se reduce a su enorme talento, a su visión, y a su constancia en el trabajo.
- No es toda la verdad, *No (wo)man is an island, entire of itself*[4].
  También hemos de citar el apoyo decidido de colegas influyentes y sabios, que vieron en ella sus cualidades y su personalidad y resistieron a las presiones de la política, de los prejuicios y de los intransigentes. Esto es un tanto a favor de los matemáticos que lucharon en la URSS por esta justa causa. Hablamos de Petrovski, de Smirnov, de Sóbolev, y hay muchos otros.

  Y no olvidemos la tolerancia relativa del régimen soviético en este respecto.
- Los matemáticas somos y seremos una comunidad sin fronteras, abierta al talento, a la libertad en la búsqueda de la verdad, a la honestidad intelectual y al progreso. Olga cumplió con estas reglas de la manera más sobresaliente.

4. Del poeta inglés John Donne (1572 - 1631)

# Video

A short film on the great lady (in Russian and English)

VideoOlga

# For Olga

VideoOlga

HER LIFE WAS A BEAUTIFUL ACCIDENT

Thank you for your attention

Gràcies, Muchas gracias

Thank you for your attention

Gràcies, Muchas gracias

# Consejos

WORK HARD, IF IT IS WORTH IT

WORK SMARTER, NOT HARDER

IF IT WORKS, WRITE IT DOWN

YOU ARE NOT AN ISLAND