Una mirada al teorema de Cauchy–Kovalevskaya

Alberto Enciso

ICMAT, Madrid

Cauchy–Kovalevskaya: un teorema excepcional

"PDEs as a non-unified subject": (local o no, lineal o no)

- Elípticas (potencial, superficies mínimas, Monge–Ampère)
- Parabólicas (calor, difusión)
- Dispersivas (Schrödinger, ondas, Einstein, olas)
- Fluidos (Euler, Navier–Stokes), transporte

Idea subyacente: diferente física implica diferentes propiedades, y diferentes propiedades implica diferentes ideas para analizarlas.

Klainerman '00: "El único resultado útil **general** en PDEs es el teorema de Cauchy–Kovalevskaya, que sólo se aplica en la clase (bastante **aburrida**) de soluciones *analíticas*".

Recordamos que una función $u(t)$ es *analítica* si se puede expresar (localmente) como una serie de potencias **convergente**:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,, \qquad a_n = \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \,.$$

El hecho de que esta serie tiene radio de convergencia $T > 0$ implica que $|a_n| \leqslant C T^{-n}$, es decir $|u^{(n)}(0)| \leqslant C n!\, T^{-n}$ para todo n.

La ecuación diferencial más sencilla

Sin entrar en detalles, el teorema de CK asegura que una ecuación diferencial "general" con coeficientes analíticos con datos de Cauchy analíticos admite una única solución (local) analítica.

Para ver cuál es la idea subyacente, tomemos el problema de valor inicial para la ODE

$$\frac{du}{dt} = B(u)\,, \qquad u(0) = 0\,,$$

con $u(t)$ una función escalar.

Paradigma actual: Existencia y unicidad mediante punto fijo

Teorema: Si $B \in C^1$, hay una única solución local $u : (-T, T) \to \mathbb{R}$, con cierto $T > 0$. Además, $u \in C^1$.

La **demostración** se hace mediante un teorema de punto fijo. Primero se pasa a una ecuación integral equivalente ("integrar es bueno, derivar es malo") y después se toma T suficientemente pequeño para probar que la integración define una aplicación contractiva.

Identificando la solución como una serie de potencias

CK parte de otro paradigma más antiguo: buscar soluciones analíticas

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,, \qquad a_n = \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \,,$$

a la ecuación $\frac{du}{dt} = B(u)$ con $u(0) = 0$. La idea es muy tonta: moralmente sabemos contruir u porque $u^{(n)}(0)$ se pueden leer directamente de la ecuación para todo n:

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \,, \\
u'(0) &= B(0) \,, \\
u''(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} B(u(t)) = B(0)B'(0) \,, \\
u^{(3)}(0) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} B(u(t)) = B''(0)B(0) + B'(0)^2 B(0) \,,
\end{aligned}$$

etc. *Si existe una solución analítica*, está entonces completamente determinada.

El problema de la convergencia

Posible problema: que la serie de potencias no converja, y por tanto no haya solución analítica. Esto no es únicamente un problema teórico:

- (Borel) Dada cualquier sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, hay una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ con $f^{(n)}(0) = a_n$. En general, la serie no converge (es decir, f no es analítica).
- La serie de Taylor de la función e^{-1/t^2} en $t = 0$ es 0.

"Hemos visto multitud de ejemplos cuyo único propósito es parecerse lo menos posible a funciones decentes y **útiles**" (Poincaré)

A los ojos de un matemático del siglo XXI, sabemos que este comportamiento es normal, útil (tiene que ver con las funciones C_0^{∞}) y que subyace dificultades reales importantes (por poner un ejemplo clásico, en el problema 16 de Hilbert).

Para ver que la solución existe, por tanto, es esencial probar la convergencia de la serie.

Convergencia de la serie

La expresión de la derivada de la solución de $\dfrac{du}{dt} = B(u)$ con $u(0) = 0$, en general, está dada por la fórmula de Faa di Bruno:

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(0) &= \frac{d^n}{dt^n}\bigg|_{t=0} B(u(t)) \\ &= \sum_{m_1+2m_2+\cdots nm_n=n} \frac{n!\, B^{(m_1+\cdots+m_n)}(0)\, u^{(1)}(0)^{m_1} \cdot u^{(n)}(0)^{m_n}}{m_1!1!^{m_1}\, m_2!2!^{m_2} \cdots m_n!n!^{m_n}} \end{aligned}$$

Ahora podemos reemplazar $u^{(j)}(0)$ con $j \leqslant n$ y obtener una fórmula del tipo

$$u^{(n+1)}(0) = p_{n+1}(B(0), B'(0), \ldots, B^{(n)}(0)) \, ,$$

siendo p_{n+1} un polinomio "universal".

La idea obvia ahora es estimar directamente estas derivadas empleando esta fórmula recursiva y las cotas para $B^{(j)}(0)$ (dadas por su analiticidad). En general, esto es relativamente complicado: se hace por primera vez a mediados del siglo XX (Lax '53, Friedman '61) tras una reducción adecuada de la ecuación. Una exposición excelente es Shinbrot–Welland '76.

Convergencia de la serie (II)

La idea clave de CK es no estimar la serie directamente sino emplear mayorantes. La observación básica es que, en la fórmula de Faa di Bruno, los polinomios con $u^{(n)}(0) = p_n(B(0), B'(0), \dots, B^{(n-1)}(0))$ tienen *coeficientes no negativos*. Luego si $G(\xi)$ es una función con $|B^{(j)}(0)| \leqslant G^{(j)}(0)$ para todo j y tal que hay una solución analítica v a la ODE

$$\frac{dv}{dt} = G(v)\,, \qquad v(0) = 0\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |u^{(n)}(0)| &\leqslant p_n(|B(0)|, |B'(0)|, \dots, |B^{(n-1)}(0)|) \\ &\leqslant p_n(G(0), G'(0), \dots, G^{(n-1)}(0)) \\ &= v^{(n)}(0)\,, \end{aligned}$$

lo que demuestra que el radio de convergencia de la serie de u es al menos tan grande como el de v.

Convergencia de la serie (III)

Para completar el argumento, como $|B^{(j)}(0)| \leqslant Cj!\,T^{-j}$ por analiticidad, para cierto $T > 0$, tenemos que la función

$$G(\xi) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi}{T}\right)^n = \frac{CT}{T - \xi}$$

acota las derivadas de B. La ecuación $\frac{dv}{dt} = G(v)$ se puede resolver exactamente:

$$v(t) = T - \sqrt{T^2 - CTt}\,.$$

Esto demuestra la siguiente versión sencilla de CK:

CK, versión de juguete:

Si la función B es analítica, la ODE

$$\frac{du}{dt} = B(u)\,, \qquad u(0) = 0\,,$$

admite una única solución local analítica.

CK para una ODE analítica general

Si tomamos ahora $u = (u_1, \ldots, u_N)$ con valores vectoriales (digamos en $\mathbb{R}^N$), el análisis es igual: de la ecuación

$$\frac{du}{dt} = B(u)\,, \qquad u(0) = 0\,,$$

podemos escribir

$$u_k^{(n)}(0) = p_{k,n}(B(0), B'(0), \ldots, B^{(n-1)}(0))$$

con polinomios universales $p_{k,n}$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$ con coeficientes no negativos y aplicar un argumento análogo.

Obviamente una condición inicial $u(0) = u_0$ puede absorberse definiendo $\tilde{u}(t) := u(t) - u_0$ y si B depende también de t (es decir, $B = B(u,t)$), uno puede ampliar el sistema tomando $\tilde{u} := (u, u_{N+1})$ y $\tilde{B}(\tilde{u}) := (B(u, u_{N+1}), 1)$. Esto equivale a decir que $u_{N+1} := t$.

Conclusión: CK se aplica a la ODE analítica general $\frac{du}{dt} = B(t,u)$ con $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^N$.

CK para PDEs

La verdadera potencia del teorema CK solo se manifiesta al estudiar PDEs, donde los teoremas de existencia y unicidad son mucho más complicados. La demostración es esencialmente igual, afortunadamente.

Al igual que en el caso de ODEs, es conveniente partir de una *forma sencilla de la ecuación* a la que podemos reducir el caso general:

$$\partial_t u = A(x,u)\,\partial_x u + B(x,u)\,, \qquad u(0,x) = 0\,.$$

Aquí $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u = (u_1, \dots, u_N)$ toma valores en $\mathbb{R}^N$, y las funciones A y B son analíticas.

La idea es que podemos escribir $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) t^n$, con $a_n(x) = \partial_t^n u(x,0)/n!$ determinado por la ecuación:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0\,, \\ \partial_t u(x,0) &= B(x,0)\,, \\ \partial_t^2 u(x,0) &= \partial_u B(x,0)\,B(x,0) + A(x,0)\,\partial_x B(x,0)\,, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Convergencia: nada nuevo bajo el sol

Estas fórmulas dependen de $A(x,0)$ y $B(x,0)$, que son funciones analíticas. Expandiendo en serie de x, esto dice que podemos escribir

$$u(x,t) = \sum_{n+|j|\geqslant 0} a_{n,j} t^n x^j\,, \qquad a_{n,j} := \frac{\partial_t^n \partial_x^j u(0,0)}{n!j!}\,,$$

y que hay polinomios "universales" con coeficientes $\geqslant 0$ tales que

$$\partial_t^n \partial_x^j u(0,0) = p_{n,j}(\text{derivadas de } A, B \text{ en } (0,0) \text{ hasta orden } \leqslant n+|j|-1)\,.$$

Como las derivadas están acotadas por $|\partial_x^j \partial_u^k A(0,0)| \leqslant Cj!k!R^{-|j|-|k|}$ (e igual B), un poco de trabajo conduce a una función mayorante esencialmente dada por

$$G(x_1,\dots,x_d,\xi_1,\dots,\xi_N) := \frac{CR}{R-x_1-\cdots-x_d-\xi_1-\cdots-\xi_N}\,,$$

cuya PDE asociada se puede resolver exactamente igual que antes.

Un enunciado más general

Teorema (CK, versión general)

Dada una ecuación con coeficientes y datos iniciales analíticos

$$\partial_t^m u = B(t, x, (\partial_t^j \partial_x^k u)_{j+|k|\leqslant m,\, j<m})\,, \qquad \partial_t^j u(x,0) = f_j(x) \quad \text{con } 0 \leqslant j \leqslant m-1\,,$$

existe una única solución local analítica.

- Influencia: revisado por Lax, Hadamard, Friedman, Nirenberg (y esencialmente Cartan–Kähler), ...
  - "CK abstracto" (Nirenberg '72) emplea estimaciones de tipo Nash–Moser para tratar el caso no local (p.ej., ecuación de las olas).
- La división (t, x) no es clave: se aplica a ecuaciones con datos prescritos en una *hipersuperficie superficie no característica*:
  - Para una ecuación como $\Delta u = 0$, cualquier hipersuperficie es no característica.
  - Para una ecuación como $\partial_{tt} u - \Delta u = 0$, una hipersuperficie es no característica si no contiene direcciones nulas.
  - Para una ecuación como $\partial_t u - \Delta u = 0$ o $i\partial_t u + \Delta u = 0$, una hipersuperficie es no característica si no es tangente a una hoja temporal $t = \text{const}$.

(Las direcciones características son importantes en PDEs. . .)

CK como mirador hacia matemáticas más profundas

Principio 1: CK como propagador caprichoso de datos iniciales

CK propaga a través de direcciones difíciles (donde se hace "mal"), pero a veces no lo hace a través de las direcciones fáciles (donde se puede hacer "bien").

1. Ejemplo de Kovalevskaya para el calor: $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$.
   - El problema de Cauchy con $u(0,x) = f(x)$ está **bien planteado** para $t > 0$. Pero CK **no** nos deja resolver esto, sino $u(t,0) = g(t)$.
   - El "motivo" es que el primero no es analítico en t, p.ej., cuando $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.
2. Ocurre lo mismo con Schrödinger: $i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0$.
   - El problema de Cauchy con $u(0,x) = f(x)$ está **bien planteado** para $t \in \mathbb{R}$. Pero CK **no** nos deja resolver esto, sino $u(t,0) = g(t)$.
   - La analicidad en x tampoco garantiza la analiticidad en t, como puede verse de la fórmula (en Fourier) $\hat{u}(t,\xi) = e^{it\xi^2} \hat{f}(\xi)$ al reemplazar $t \mapsto t - i\epsilon$.
3. Los problemas de CK están generalmente **mal planteados**: $\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0$ con $u(0,y) = 0$ y $\partial_x u(0,y) = \epsilon \sin \frac{y}{\epsilon}$. Entonces $u(x,y) = \epsilon \sinh \frac{x}{\epsilon} \sin \frac{y}{\epsilon}$:

$$\lim_{\epsilon \to 0} (|u(0,y)| + |\partial_x u(0,y)|) = 0 \,, \quad \lim_{\epsilon \to 0} |u(x,y)| = \infty \quad \text{a.e. } (x,y).$$

(Ejemplo de Hadamard; la estabilidad se puede recuperar con cotas a priori para ∇u)

CK como mirador hacia matemáticas más profundas (II)

Principio 2: Sin analiticidad, CK no funciona

Reemplazar CK para existencia y unicidad implica ideas nuevas.

1. **Existencia:** sin analiticidad, no hay esperanza de probar nada.
   - Contraejemplo sencillo: como toda función armónica es analítica, no podemos resolver $\Delta u = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $\partial_y u(x,0) = g(x)$ salvo si f y g son analíticas.
   - Contraejemplo "óptimo": Hay $B \in C^\infty$ tal que $\partial_x u + ix\partial_y u = B(x,y)$ no admite soluciones locales en ningún punto. (Lewy '56, Mizohata '62)
2. **Unicidad:** Sea $\Delta u = V(x)u$ en Ω y $u \equiv 0$ en un abierto $B \subset \Omega$.
   - Si u es analítica, $u \equiv 0$ en todo Ω (no hace falta la ecuación).
   - (Holmgren) Si V es analítica, también u lo es, luego $u \equiv 0$.
     Conclusión: CK da la única solución al problema con datos iniciales fijos.
   - Si V no es analítica, hace falta una idea nueva. Esta idea son las estimaciones de Carleman, que prueban (por ejemplo) que $u \equiv 0$ si $V \in L^\infty$ y se extienden a muchas otras ecuaciones.
   - En general no hay unicidad: Plis (1963) construye una ecuación elíptica con coeficientes Hölder con soluciones no triviales que se anulan en un abierto. Filonov (2001) la construye construye con autofunciones de soporte compacto.

Mi deuda personal con CK

Los usos que he dado a CK en mi investigación (con D. Peralta-Salas) van de trivialidades a aplicaciones bastante sofisticadas:

1. Conjuntos de nivel de funciones armónicas: $\Delta u = 0$.
2. Superficies mínimas ("pompas de jabón") con microoscilaciones:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \right) = 0 \,.$$

3. Soluciones estacionarias de 3D Euler ("fluidos en equilibrio") con líneas de vorticidad anudadas:

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla) v = \nabla p \,, \qquad \nabla \cdot v = 0 \,.$$

4. Soluciones a la ecuación de Gross–Pitaevskii ("condensados de Bose–Einstein") con reconexión de vórtices cuánticos:

$$i \partial_t \psi + \Delta \psi - |\psi|^2 \psi = 0 \,.$$

Para evitar complicaciones, vamos a considerar sólo el primer caso, que es un contexto muy clásico.

Conjuntos de nivel de funciones armónicas

Nos interesan los conjuntos de nivel de una función armónica en $\mathbb{R}^3$: $\Delta u = 0$.

Elijamos una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$: ¿puede ser (una componente conexa de) un conjunto de nivel regular $u^{-1}(0)$, módulo difeomorfismo?

- Σ compacta: NO, por el principio del máximo.
- Σ no compacta: ¡a saber, hay muchas posibilidades!
  - Planos, $\mathbb{R}^2$: aparecen con $u(x) := x_1$.
  - Cilindros, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$: aparecen con $u(x) := 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.
  - Toro de género g con h agujeros: ???
  - Toro de género infinito: ???
- Motivación:
  - En 2D, usando métodos de análisis complejo, trabajo clásico de Kaplan y Boothby ($\sim$ 1950). Nada de esto sirve en dimensión superior.
  - Diversas conjeturas sobre el tamaño relativo de ciertos conjuntos, incluso en el plano. Ejemplo (De Carli, Hudson, 2010): dados $r < R$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, ¿existe una función armónica con una componente conexa Z de su conjunto 0 tal que

$$|Z \cap B_r| > (1 - \epsilon)|Z \cap B_R|?$$

Conjuntos de nivel de funciones armónicas (II)

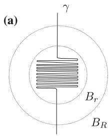
Para ilustrar CK, empezamos probando este último resultado:

Teorema

Dados $r < R$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, existe una función armónica u en $\mathbb{R}^2$ con una componente conexa Z de $u^{-1}(0)$ tal que

$$|Z \cap B_r| > (1-\epsilon)|Z \cap B_R| .$$

1. Empezamos tomando una curva analítica γ con $|\gamma \cap B_r| > (1 - \frac{\epsilon}{2})|\gamma \cap B_R|$.
2. CK garantiza la existencia de una función armónica v en un entorno U de γ con $v|_\gamma = 0$ y $\partial_\nu v|_\gamma = 1$.
3. (Runge y Thom) Dado cualquier $\delta > 0$, hay una función armónica u en $\mathbb{R}^2$ que aproxima v como $\sup_U |u - v| < \delta$. Esta mantiene la propiedad deseada.



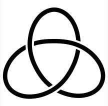
Conjuntos de nivel de funciones armónicas (III)

Teorema

Dada cualquier nudo L en $\mathbb{R}^3$ (es decir, una curva cerrada), existen dos funciones armónicas u_1, u_2 en $\mathbb{R}^3$ tal que una componente conexa de $u_1^{-1}(0) \cap u_2^{-1}(0)$ es difeomorfa ("topológicamente equivalente") a L.

1. Topología: podemos tomar $L = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, es decir como la intersección transversa de dos superficies analíticas Σ_j. En otras palabras, el fibrado normal de L es trivial.
2. Con CK construimos una función armónica v_j en un entorno de Σ_j tal que $v_j|_{\Sigma_j} = 0$ y $\partial_\nu v_j|_{\Sigma_j} = 1$.
3. Volvemos a usar Runge para aproximar v_j por una función armónica en todo $\mathbb{R}^3$, u_j.

Corolario de la construcción: existen siete funciones armónicas $u_1, \dots, u_7$ en $\mathbb{R}^{14}$ cuyo conjunto cero $u_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap u_7^{-1}(0)$ tiene una componente conexa difeomorfa a una 7-esfera exótica.



Conjuntos de nivel de funciones armónicas (IV)

Teorema (E. & Peralta-Salas, 2013)

Tomemos un número arbitrario de hipersuperficies algebraicas, suaves, no compactas $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ en $\mathbb{R}^d$. Existe una función armónica u en todo $\mathbb{R}^d$ y un difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $\Phi(\Sigma_1), \dots, \Phi(\Sigma_N)$ son componentes conexas de $u^{-1}(0)$.

- La demostración es bastante más complicada (CK, en particular, no sirve porque hace falta estimaciones de funciones armónicas en infinito).
- Los difeomorfismos son necesarios: un trozo de las curvas $y = x^s$ (todas ellas difeomorfas) es parte de un conjunto de nivel de una función armónica en el plano si y sólo si $s = 1, 2$.
- La condición de algebraicidad solo se usa para controlar la geometría de la hipersuperficie en infinito; la demostración se basa en métodos "diferenciables".
- Esto responde el caso del toro de género g con h agujeros. Para objetos como el toro de género infinito, también se puede hacer, pero hace falta un enunciado más sofisticado.

¡Muchas gracias!