Hilbert: la formación del genio (1888-1900)

J. M. Almira

Universidad de Murcia

Conferencia de clausura del año Hilbert.
FME, Universidad Politécnica de Cataluña. 16 de Mayo, 2017

Una forma cuadrática en las variables

$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$

es una combinación lineal de los términos

$$x_1^2, x_2^2, \cdots, x_m^2, x_1x_2, x_1x_3, \cdots, x_1x_m, x_2x_3, \cdots, x_2x_m, \cdots, x_{m-1}x_m$$

Es decir, es una expresión del tipo

$$q(x_1, \cdots, x_m) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{mm}x_m^2 \sum_{1\leq i<j\leq m} a_{ij}x_ix_j$$

O, de forma más compacta,

$$q(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Si hacemos un cambio lineal de variable $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

entonces

$$q'(y_1, \cdots, y_m) = q(x_1, \cdots, x_m) = (y_1, \cdots, y_m)P^tAP \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= (y_1, \cdots, y_m)A' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Donde $A' = P^tAP$. En particular, $\det(A') = \det(P)^2 \det(A)$

Ahora bien,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} = \varphi(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mm})$$

es un polinomio en los coeficientes de la forma $q(x_1, x_2, \cdots, x_m)$. Es, pues, posible distinguir como objetos especiales entre los polinomios de coeficientes reales en las variables

$$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mm}, a_{12}, \cdots, a_{1m}, a_{23}, \cdots, a_{2m}, \cdots a_{(m-1)m}$$

aquellos que tienen la propiedad especial de que

$$\varphi(a'_{11}, a'_{12}, \cdots, a'_{mm}) = \det(P)^2 \varphi(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mm})$$

Estos polinomios especiales son los invariantes algebraicos asociados a las formas cuadráticas de m variables.

Los invariantes algebraicos

Una n-forma m-aria es un polinomio homogéneo de grado n

$$f(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{i_1+\cdots+i_m=n} a_{i_1i_2\cdots i_m}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}$$

El concepto de invariante algebraico se generaliza de forma inmediata cuando se consideran n-formas m-arias. Además, dada una familia de formas m-arias existe un concepto de invariante algebraico simultáneo, que en el caso de dos formas está descrito por la ecuación

$$\varphi((a'_{i_1i_2\cdots i_m})_{i_1+\cdots+i_m=n},(b'_{j_1j_2\cdots j_m})_{j_1+\cdots+j_m=k}) =$$

$$\det(P)^n\varphi((a_{i_1i_2\cdots i_m})_{i_1+\cdots+i_m=n},(b_{j_1j_2\cdots j_m})_{j_1+\cdots+j_m=k})$$

Fijada una familia $\mathcal{F}$ de formas m-arias, el conjunto de los invariantes simultáneos asociados a dicha familia forma un anillo

$$J = J(\mathcal{F}).$$

Además, J es un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
Diremos que disponemos de un sistema completo y finito de invariantes para la familia $\mathcal{F}$ si $J(\mathcal{F})$ es un álgebra finitamente generada. Es decir, si existen invariantes $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_s\} \subseteq J$ tales que todo $\varphi \in J$ se escribe como

$$\varphi = F(\varphi_1, \cdots, \varphi_s)$$

para algún polinomio $F \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_s]$.

- Los invariantes algebraicos aparecieron de forma natural en el trabajo de Gauss en teoría de números.
- En la década de 1840, Cayley construye de forma explícita un sistema de invariantes completo (o base) para las formas cúbicas binarias y otro para las formas cuárticas binarias.
- P. Gordan (1837-1912) demuestra que las formas binarias de cualquier grado admiten siempre una base finita de invariantes. Su prueba es, además, constructiva. Dada una forma binaria cualquiera, es capaz de calcular explícitamente la base del anillo de invariantes asosiado.

  Además, extiende su teorema al probar que cualquier sistema finito de formas binarias admite una base finita de invariantes algebraicos simultáneos.

En 1888, Hilbert demuestra el siguiente resultado:

Teorema (Teorema fundamental de la Teoría de invariantes)

El álgebra J de los invariantes algebraicos simultáneos asociados a cualquier familia finita de formas m-arias está siempre finitamente generada.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Se basa en el siguiente resultado auxiliar:

Teorema (Teorema de la base)

Sea k un cuerpo arbitrario. Entonces todo ideal del anillo de polinomios $k[x_1, \cdots, x_n]$ *está finitamente generado. Es decir, si* $\mathbb{I}$ *es un ideal de* $k[x_1, \cdots, x_n]$*, existen* $f_1, \cdots, f_t \in \mathbb{I}$ *tales que todo elemento* $g \in \mathbb{I}$ *admite una representación del tipo*

$$g = h_1 f_1 + \cdots + h_t f_t$$

para ciertos polinomios $h_1, \cdots, h_t \in k[x_1, \cdots, x_n]$

(Recordemos que $I \subseteq A$ es un ideal del anillo A si I es un subanillo de A y además para cada $f \in I$ se tiene que $fg \in I$ para todo $g \in A$).

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

- Tomamos $J = J(\mathcal{F})$. Sea $\Delta \subseteq J$ el ideal de J generado por las formas de grado > 0 que pertenecen a J.
- Entonces $I = \Delta\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ está finitamente generado y $J \subseteq I$.
- Se puede asumir que $I = \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$ para ciertas formas f_i.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

- Veremos que $\{f_1, \cdots, f_s\}$ generan J como $\mathbb{C}$-álgebra.

Sea J' el álgebra generada por $\{f_1, \cdots, f_s\}$. Obviamente,

$$J' = \{F(f_1, f_2, \cdots, f_s) : F \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_s]\} \subseteq J$$

Veamos que $J = J'$.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Para ello, basta comprobar que toda forma $f \in J$ pertenece a J'. Hacemos la prueba por inducción sobre el grado de la forma f.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Las constantes están en J' obviamente. Tomemos $f \in J$ una forma de grado $N > 0$. Como $J \subseteq I$, es claro que

$$f = \sum_{i=1}^{s} g_i f_i$$

para ciertas formas g_i con $\deg(g_i) = \deg(f) - \deg(f_i) < \deg(f) = N$.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Siguiendo a Cayley, Hilbert construye un operador

$$\Omega : \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m] \to J$$

con las siguientes propiedades:

- $\deg(\Omega(f)) = \deg(f)$.
- Si $f \in J$, entonces $\Omega(f) = f$.
- Si $f_1, f_2 \in J$ y $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ entonces

$$\Omega(g_1 f_1 + g_2 f_2) = \Omega(g_1) f_1 + \Omega(g_2) f_2$$

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Se sigue que,

$$f = \Omega(f) = \sum_{i=1}^{s} \Omega(g_i) f_i$$

Y como $\deg(\Omega(g_i)) = \deg(g_i) < \deg(f) = N$ y $\Omega(g_i) \in J$, la hipótesis de inducción nos dice que $\Omega(g_i) \in J'$ para todo $i = 1, \cdots, s$ por lo que también $f \in J'$.

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Figura: Hilbert en 1886 -dos años antes de resolver el Problema de Gordan

La prueba del teorema de la base no es constructiva. (Se basa en un proceso de reducción al absurdo)

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Figura: Paul Gordan (1837-1912)

Hilbert fue duramente criticado por esto. En particular, Gordan se oponía a la publicación del manuscrito -fue el árbitro-, llegando a exclamar:

"Esto no son matemáticas. ¡Es teología!"

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

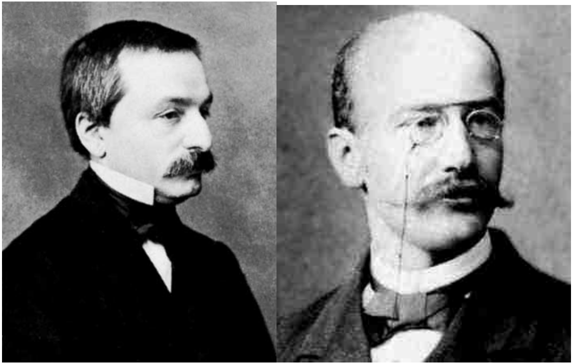


Figura: Leopold Kronecker en 1865 y Ferdinand von Lindemann

También contó con la oposición de Kronecker e incluso Lindemann -quien había sido su director de tesis-.

Pero Klein le apoyó (y, por supuesto, también Minkowski)

Y Gordan, cuando tomó conciencia de la importancia del trabajo de Hilbert, llegó a afirmar que
"a veces es necesario creer también en la Teología"

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

En 1893, Hilbert obtiene una demostración “constructiva”. Para ello, necesita probar antes:

Teorema (Nullstellensatz)

Sea I un ideal de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ y sea

$$V(I) = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m : \forall f \in I : f(\alpha) = 0\}$$

su variedad algebraica asociada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *$g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ se anula en todos los puntos de $V(I)$.*
- *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^k \in I$*

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

En otras palabras,

$$\mathbb{I}(V(I)) = \sqrt{I},$$

donde

$$V(I) = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m : \forall f \in I : f(\alpha) = 0\}$$

y, para cada $S \subseteq \mathbb{C}^m$,

$$\mathbb{I}(S) = \{g \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m] : g_{|S} = 0\}$$

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

Una versión equivalente, llamada versión débil del Nullstellensatz, afirma la equivalencia, para ideales I de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$, de las siguientes dos afirmaciones:

- I es un ideal propio de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$
- $V(I) \neq \emptyset$.

En particular, este resultado es una generalización importantísima del teorema fundamental del álgebra al caso multidimensional

Demostración de Hilbert del Teorema fundamental de la Teoría de Invariantes.

El mismo resultado se puede reformular del siguiente modo:

Teorema (Nullstellensatz, versión débil)

Los ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ son los ideales de la forma

$$I = \langle x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \cdots, x_m - \alpha_m \rangle$$

Una demostración sencilla del Nullstellensatz

Existen varias, pero a mi me gusta especialmente esta:

J. M. ALMIRA,

Nullstellensatz revisited, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **65** (3) (2007) 365-369.

Un orden monomial es un orden total $<$ sobre $\mathbb{N}^m$ que verifica, además, las siguientes propiedades:

O$_1$ Si $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ y $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^m$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{c} < \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

O$_2$ Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}^m$ posee un mínimo respecto del orden $<$ que estamos considerando.

Obviamente, todo orden monomial en $\mathbb{N}^m$ induce un orden total total sobre los monomios en las indeterminadas $\{x_1, \cdots, x_m\}$

Por ejemplo, podemos asociar al orden $x_m > \cdots > x_1$ de las indeterminadas el orden lexicográfico:

$$\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m) >_{lex} \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m) \text{ si y solo si } a_{k_0} - b_{k_0} > 0,$$

$$\text{donde } k_0 = max\{k \in \{1, \cdots, m\} : a_k - b_k \neq 0\}$$

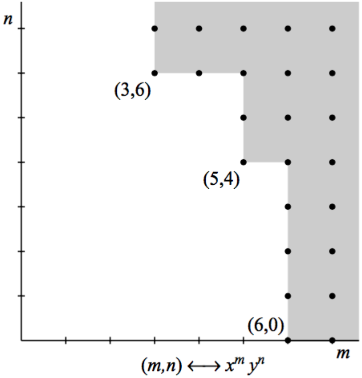
Fijamos un orden monomial $<$ en $\mathbb{N}^m$. A cada polinomio $f \neq 0$ le asociamos su término líder, $\mathbf{Lt}(f)$, que es el mayor de los monomios (respecto del orden $<$) que aparecen en su expresión como suma de monomios de distinto grado.

Una demostración sencilla del Nullstellensatz

Dado un ideal $I = \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$, el conjunto

$$\mathbf{Lt}(I) = \{\mathbf{Lt}(f) : 0 \neq f \in I\}$$

recibe el nombre de ideal monomial (o inicial) asociado a I. Estos ideales se pueden identificar con dibujos en forma de escalera como el siguiente:



- Una base del ideal I se llama base de Gröbner si los términos líder de sus elementos definen una base del ideal monomial $\mathbf{Lt}(I)$.
- En la década de 1960 Buchberger, un estudiante de Gröbner, construyó un algoritmo para el cálculo de una base de Gröbner de un ideal a partir de cualquiera de sus bases.

Teorema (Buchberger)

Dados I un ideal de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ *y* $\{g_1, \cdots, g_s\}$ *una base de Gröbner de I, se tiene que:*

(a) *Para todo polinomio* f *existen* $h_1, \cdots, h_s, r \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$ *tales que*

$$f = h_1 g_1 + \cdots + h_s g_s + r,$$

donde r queda unívocamente determinado por f *y por el hecho de que ningún monomio que aparezca efectivamente en la descripción de r es divisible por ninguno de los monomios* $\mathbf{Lt}(g_i)$*, para* $i = 1, \ldots, s$.

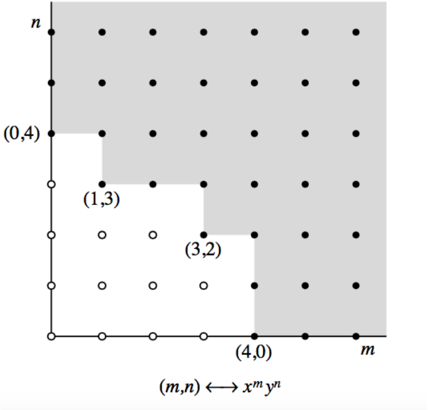
(b) *La descomposición anterior se puede calcular efectivamente.*

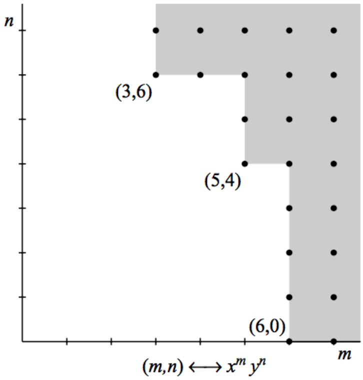
Una demostración sencilla del Nullstellensatz

Dado I ideal de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$, tenemos esencialmente dos casos:

Caso 1: La escalera asociada a $\mathbf{Lt}(I)$ toca todos los ejes

Caso 2: Alguno de los ejes no toca la escalera asociada a $\mathbf{Lt}(I)$.

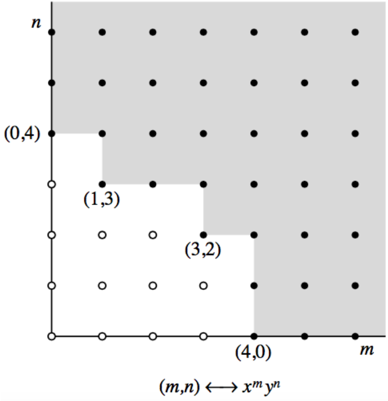




Una demostración sencilla del Nullstellensatz

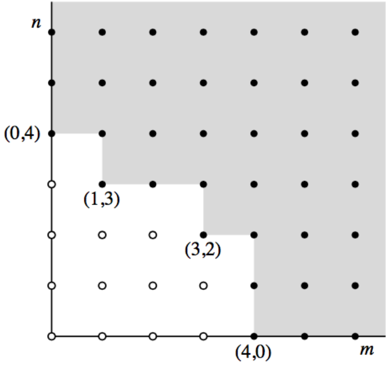
Como consecuencia de un resultado técnico, conocido como Lema de normalización de Noether en honor a E. Noether, pero demostrado originalmente por Hilbert en su artículo de 1893, se puede demostrar:

- Si I es un ideal maximal de $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]$, entonces estamos en el Caso 1 anterior.

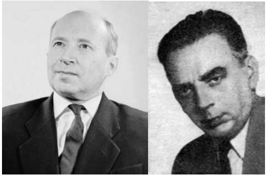


Una demostración sencilla del Nullstellensatz

- Se sigue, del teorema de Buchberger, que
$$K = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_m]/I \simeq \mathbb{C}^N,$$
donde $N = \#\{\alpha \in \mathbb{N}^m \setminus \mathbf{Esc}(I)\} < \infty$.
- Como I es maximal, K es un cuerpo y es una extensión finita de $\mathbb{C}$. Luego $N = 1$ (porque $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado).



- La prueba anterior funciona para polinomios con coeficientes en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado.



- En el caso de $\mathbb{C}$ podemos evitar utilizar el Teorema Fundamental del Álgebra del siguiente modo:

Teorema (Gelfand-Mazur)

Los únicos cuerpos normados que existen, salvo isometrías de álgebras de Banach, son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ equipados con sus respectivos valores absolutos usuales.

Nota: Este teorema fue anunciado por Mazur en 1938 y demostrado por Gelfand en 1941. Existen pruebas elementales que no dependen del TFA.

Consideremos la norma $\|\cdot\|_* : K \to \mathbb{R}^+$ deda por $\|a\|_* = \|L_a\|$, donde $L_a : K \to K$ es la aplicación lineal $L_a(b) = a \cdot b$ y $\|L_a\|$ denota la norma de L_a como operador
(Es decir, consideramos en $K \cong \mathbb{C}^N$ la norma Euclidea $\|\cdot\|$ y definimos $\|L_a\| = \sup_{\|x\|=1} \|L_a(x)\|$):
Es evidente que $(K, \|\cdot\|_*)$ es un cuerpo normado, pues

$$\|a \cdot b\|_* = \|L_{a \cdot b}\| = \|L_a L_b\| \leq \|L_a\|\|L_b\| = \|a\|_*\|b\|_*.$$

Por tanto, el Teorema de Gelfand-Mazur implica que existe una isometría de álgebras de Banach $\tau : K \to \mathbb{C}$. Esto conduce directamente a afirmar que $N = 1$ porque τ es también un isomorfismo of $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y $\dim_{\mathbb{C}} K = N$.

Teoría algebraica de números: el Zahlbericht

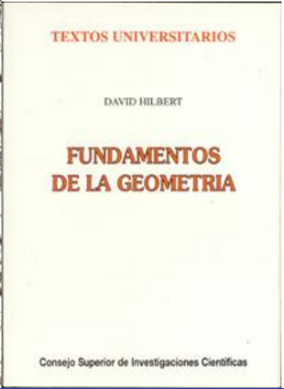
A petición de la Sociedad Matemática Alemana, Hilbert redactó a principios de la década de 1890 un informe sobre el estado del arte en teoría algebraica de números. Inicialmente, el trabajo se iba a repartir entre él y Minkowski, pero este decidió abandonar el proyecto relativamente pronto, dejando todo el peso en manos de Hilbert. Algunos de los méritos que hacían de Hilbert la persona apropiada para este trabajo a ojos de la DMV son:

- Su demostración de la trascendencia de π y e (mucho más sencilla que la ofrecida anteriormente por Lindemann)
- Su demostración independiente de un resultado muy técnico -debido originalmente a Dedekind y Kummer- sobre factorización de ideales

Sobre el informe, H. Weyl afirmó en 1944:
"(...) Lo que Hilbert logró era infinitamente más de lo que la DMV podía esperar. De hecho, su informe es una joya de la literatura matemática. Incluso hoy, casi cincuenta años después, un estudio de este libro es indispensable para cualquiera que desee manejar la teoría algebraica de números (...) Las demostraciones de todos los teoremas conocidos se sopesaron cuidadosamente, decidiendo siempre en favor de aquellas cuyos principios subyacentes se pueden utilizar para más investigaciones. Pero antes de poder realizar dicha selección, ¡había que llevar a cabo esas nuevas investigaciones!"

Los fundamentos de la Geometría

En 1898 Hilbert imparte un curso -en Gotinga- sobre Fundamentos de la Geometría y en 1899 publica un libro dedicado a dicho tema.



Durante el S. XIX los matemáticos lograron apartarse de la Geometría Euclídea, introduciendo diferentes tipos de Geometrías:

- Geometría Proyectiva
- Geometrías no-Euclídeas -de tipo hiperbólico y de tipo elíptico-
- Geometría diferencial, Geometrías Riemannianas, etc.

Además, se realizaron importantes esfuerzos por axiomatizar la Geometría Euclídea, y se investigaron los resultados que se pueden derivar evitando el axioma de las paralelas (Geometría Absoluta). Otro enfoque que se consideró también importante fue la distinción entre Geometría Sintética -sin coordenadas- y Geometría Analítica.

Por ejemplo, en Geometría Absoluta se demostró el siguiente importante resultado:

Teorema (de los tres mosqueteros, Legendre-Saccheri):
Denotemos, para cada triángulo ΔABC del plano, por:

$$\zeta = \zeta(\Delta ABC) = \alpha + \beta + \gamma$$

a la suma de sus ángulos internos. Entonces:

(a) Si para algún triángulo ΔABC se satisface que $\zeta(\Delta ABC) < \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.

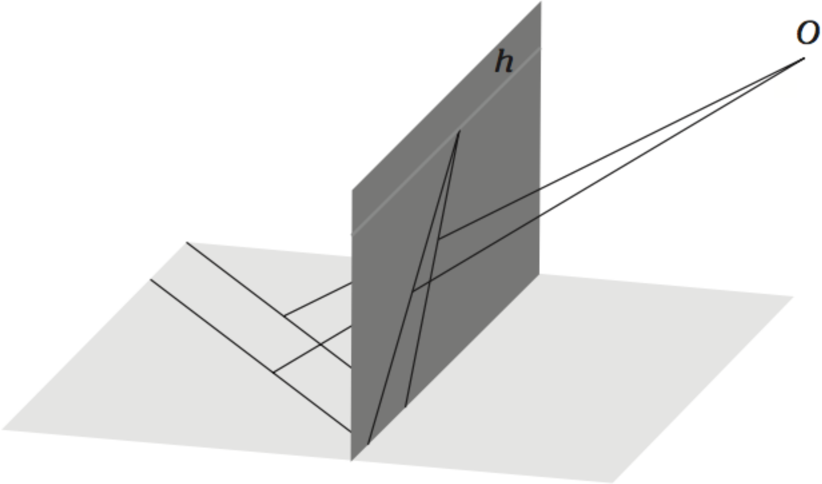
(b) Si para algún triángulo ΔABC se satisface que $\zeta(\Delta ABC) = \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.

(c) Si para algún triángulo ΔABC se satisface que $\zeta(\Delta ABC) > \pi$, lo mismo sucede para todo triángulo del plano.

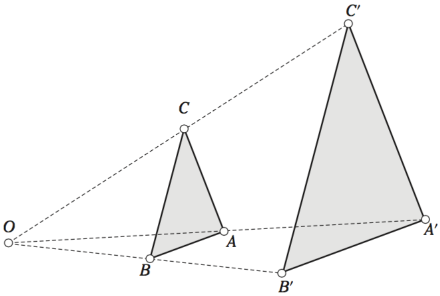
Otras contribuciones fundamentales para el desarrollo de la Geometría fueron:

- El programa Erlangen de F. Klein (y S. Lie).
- El trabajo fundacional de Riemann "Sobre las hipótesis que subyacen en los fundamentos de la Geometría".

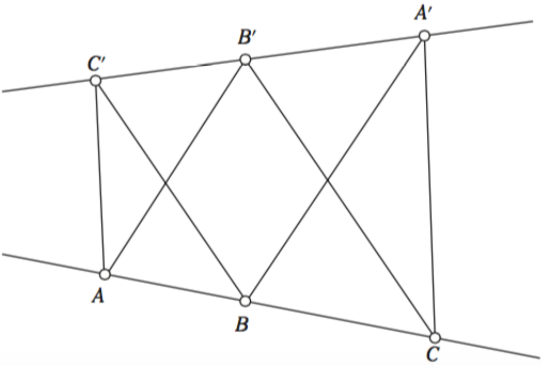
Nosotros vamos a prestar especial atención a la Geometría Proyectiva.



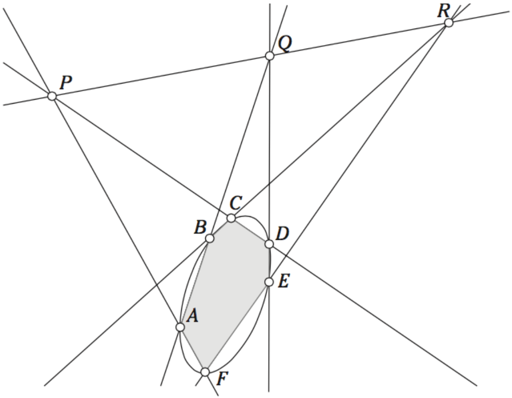
Teorema (Desargues):
Si dos triángulos están situados en un plano de modo que los lados correspondientes son paralelos dos a dos, entonces las rectas que unen los vértices correspondientes o bien son concurrentes en un punto o bien son paralelas. Además, si dos triángulos están situados en un plano de modo que las rectas que unen los vértices correspondientes concurren en un punto o son paralelas y, además, hay dos pares de lados correspondientes que son paralelos, entonces los lados del tercer par correspondiente son también paralelos.



Teorema (Pappus):
Sean r y r' dos rectas distintas que se cortan y supongamos que A, B, C son puntos de r, A', B', C' son puntos de r' y que ninguno de estos puntos está en la intersección de r y r'. Si CB' es paralela a BC' y CA' es paralela a AC' entonces AB' es paralela a BA'.



Teorema (Pascal):
Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están forzosamente alineados.



En 1891, en la reunión de la recién fundada Sociedad Matemática Alemana, que tuvo lugar en Halle, Hilbert escuchó una conferencia del geómetra Herman Wiener (1857-1939) que le impresionó:

Según relata Blumenthal, tras la charla y, de vuelta a Königsberg, Hilbert afirmó entusiasmado que uno debería poder hacer geometría sin necesidad de atarse a las ideas preconcebidas de punto, recta o plano "a la Euclides". Uno debería poder decir "mesas", "sillas" y "jarras de cerveza" en vez de "puntos", "rectas" y "planos" y no por ello los resultados perderían su validez o su interés. Además,Wiener había aafirmado en su conferencia, sin demostrarlo, que era posible probar los teoremas fundamentales de la geometría proyectiva y, en particular, los teoremas de Desargues, Pascal y Pappus, sin recurrir a argumentos de continuidad.

Cursos impartidos por Hilbert sobre Geometría antes de 1899

- 1891: Königsberg. Un curso sobre *Geometría Proyectiva*, sin coordenadas.
- 1893: Königsberg. Un curso sobre *Geometrías no Euclídeas*, basado en el enfoque axiomático de Pasch. (No se impartió porque solo se matriculó un alumno)
- 1894: Königsberg. Un curso sobre *Los fundamentos de la Geometría*. Esta vez resultó fundamental la monografía recién publicada por Hertz “Los principios de la mecánica presentados de una forma nueva”.
- 1898: Gotinga. Un curso sobre *Los fundamentos de la Geometría* -que daría lugar a la publicación de su famosa monografía de 1899.

Visión de Hertz de los principios de la mecánica

- Una teoría física es una imagen que nos formamos de cierto conjunto de fenómenos de la naturaleza. Como es obvio, podemos formar imágenes distintas de la misma cosa.
- Una imagen es permisible si no contradice las leyes del pensamiento (es decir, las leyes de la lógica).
- Una imagen permisible es correcta si sus relaciones internas no contradicen las relaciones que se observan en la naturaleza entre los objetos que describe dicha imagen.
- Finalmente, entre dos imágenes permisibles y correctas de la misma cosa, consideramos más adecuada aquella que es más simple.

Los conceptos de permisibilidad y corrección inspiraron a Hilbert, quien introdujo, en el contexto de los Fundamentos de la Geometría, los conceptos de consistencia y completitud de una teoría axiomática.

Los fundamentos de la Geometría

- Introduce la Axiomática definitiva para la Geometría de Euclides. (Supera no solo a Euclides sino también al resto de propuestas realizadas en el S. XIX por matemáticos como M. Pasch o G. Peano).
- Se incluyen demostraciones de consistencia e independencia
- Se analiza el papel desempeñado en Geometría por la propiedad Arquimediana y la propiedad de completitud
- Se proponen modelos de Geometrías no Arquimedianas, no Desarguesianas y no Pappusianas
- Para la construcción de los distintos modelos se crea un “cálculo de segmentos” y se utilizan ideas relacionadas con su trabajo anterior en teoría de números.

Axiomas para la Geometría Euclídea

- Axiomas de enlace (o incidencia)
- Axiomas de orden
- Axiomas de congruencia
- Axioma de las paralelas
- Axiomas de continuidad

Axiomas de Enlace o Incidencia

E.1 Dados dos puntos distintos, existe una única recta que incide sobre ambos puntos.

E.2 Dados dos puntos distintos, no existe más de una recta que incida sobre ambos puntos.

E.3 Sobre una recta existen al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no están alineados (es decir, que no están todos simultáneamente sobre la misma recta).

Axiomas de Enlace o Incidencia

E.4 Dados tres puntos no alineados, existe un plano π que incide sobre los tres puntos. Todo plano contiene al menos un punto.

E.5 Dados tres puntos no alineados no existe más de un plano que los contenga.

E.6 Cuando dos puntos de una recta r están en un plano π, todos los puntos de la recta r están en el plano π.

E.7 Si dos planos tienen un punto en común A, entonces también tienen al menos otro punto en común B.

E.8 Existen al menos cuatro puntos no situados en el mismo plano.

Axiomas de Orden

O.1 Cuando un punto B está situado entre un punto A y otro punto C, entonces A, B, C están alineados y B también está situado entre el punto C y el punto A.

O.2 Dados dos puntos A, C, siempre existe un punto B (sobre la recta AC determinada por A y C) que está entre los puntos A y C.

O.3 De tres puntos cualesquiera de una recta no existe más que uno que está entre los otros dos.

O.4 (Axioma de Pasch) Dados tres puntos A, B, C que no están alineados, y r una recta del plano ABC que determinan dichos puntos, si r pasa por el interior del segmento $\overline{AB}$ (es decir, por el conjunto de puntos que están entre A y B) entonces también pasa por un punto del segmento $\overline{BC}$ o del segmento $\overline{AC}$.

Axiomas de Congruencia

C.1 Si A, B son dos puntos de una recta r y A' es otro punto de una recta r' (que podría o no coincidir con r) entonces se puede encontrar sobre uno de los lados de r' determinados por A' un punto B' tal que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son congruentes o iguales, lo que se expresa n signos como $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$

C.2 Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$, entonces $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

C.3 Supongamos que el punto B está entre los puntos A y C y que el punto B' está entre los puntos A' y C'. Si $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

Axiomas de Congruencia

C4 Todo ángulo puede ser transportado de manera congruente a un plano dado, en un seminal dado del mismo, sobre una semirrecta dada de antemano, y de manera única.

C5 Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ satisfacen las congruencias $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, entonces también $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$

Axiomas de las Paralelas

P Dados un punto P y una recta r que no lo contenga, dentro del plano determinado por ambos existe una única recta r' que pasa por P y no corta a r.

Axiomas de continuidad

V.1 (Axioma de Arquímedes) Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ existen, sobre la recta determinada por A y B, un conjunto finito de puntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de modo que todos los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$ son congruentes con $\overline{CD}$ y el punto B queda entre los puntos A y A_n.

V.2 (Axioma de plenitud lineal) Los puntos de una recta forman un sistema que no es susceptible de ampliación alguna bajo la condición de conservar la ordenación lineal, el primer axioma de congruencia y el axioma de Arquímedes.

Capítulo 1

- Una vez introducidos todos los axiomas (organizados en torno a las diferentes formas como percibimos el espacio físico -incidencia, orden, congruencia, etc-), se analizan las consecuencias básicas de cada grupo de axiomas.

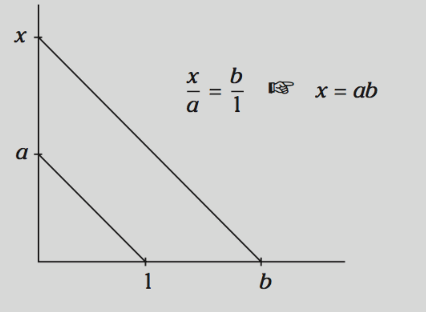
Capítulo 2

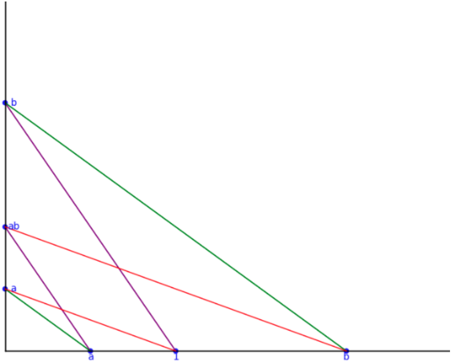
- Consistencia relativa de la Geometría -tal como queda determinada por los axiomas de Hilbert- respecto de la aritmética.
- Independencia mutua de los distintos grupos de axiomas.
- Se derivan algunos resultados de la Geometría Absoluta. En particular, se demuestra, en el caso arquimediano, el Teorema de los tres mosqueteros.
- Se proporciona un modelo de Geometría no Arquimediana (i.e. que verifica todos los grupos de axiomas excepto los de continuidad. (Esto se obtiene de forma independiente al trabajo de Veronese de 1891)

Capítulo 3

- Nueva exposición de la teoría de proporciones de Eudoxo, basada en un cálculo de segmentos que no requiere la propiedad Arquimediana ni la propiedad de plenitud lineal, pero sí el Teorema de Pappus.
- Gracias a la técnica anterior, demuestra el teorema de Tales y deduce que las ecuaciones de la recta y el plano se mantienen válidas en las geometrías no Arquimedianas.

Los fundamentos de la Geometría: Breve resumen por capítulos



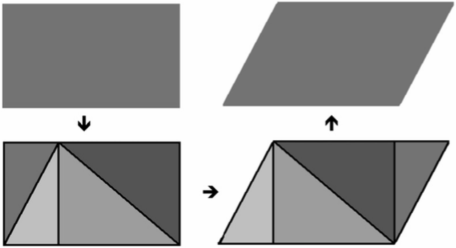


Capítulo 4

- Se introduce el concepto de area para polígonos del plano, sin hacer uso de los axiomas de continuidad (Arquímedes y completitud lineal).

Definición

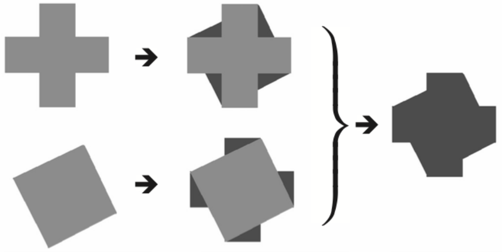
Se dice que dos polígonos Γ y Σ son equidescomponibles si se puede dividir cada uno de ellos en un número finito de triángulos $T_1, \cdots, T_s$ y $R_1, \cdots, R_s$, respectivamente, de modo que $T_i \equiv R_i$ para $i = 1, \cdots, s$.



polígonos equidescomponibles

Definición

Se dice que dos polígonos Γ y Σ son equicomplementarios si se puede añadir un número finito r de triángulos $T_1, \cdots, T_r$ al primero y otros r triangulos $R_1, \cdots, R_s$ al segundo de modo que los polígonos resultantes son equidescomponibles y, además, $T_i \equiv R_i$ para $i = 1, \cdots, r$.



polígonos equicomplementables

Teorema (caracterización de polígonos de áreas iguales): Sean Γ y Σ dos polígonos del plano. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Γ y Σ son equicomplementarios.

(b) Γ y Σ tienen igual área (ver las figuras).

Los fundamentos de la Geometría: Breve resumen por capítulos

Corolario:
Si descomponemos un rectángulo en un número finito de triángulos y separamos uno de los triángulos formados, es imposible reconstruir el rectángulo original mediante movimientos con los otros triángulos.

- Esta propiedad es importante porque había sido asumida en numerosas ocasiones como un nuevo axioma de la Geometría (e.g., Zolt en1881 y Stoltz en 1894).
- F. Schur en 1892 y Killing en 1898 la habían logrado probar en forma de teorema, pero asumiendo la propiedad Arquimediana.
- Hilbert la demuestra en su libro como un resultado de Geometría No Arquimediana -evitando los axiomas de continuidad.

Capítulo 5

- Estudio del teorema de Desargues en la geometría plana.
- Construye una Geometría no-Desarguesiana que satisface los axiomas de enlace, orden y las paralelas.
- En particular, lo anterior sirve para demostrar la necesidad de los axiomas de congruencia si se quiere probar el teorema de Desargues.
- Construye un cálculo de segmentos basado en el Teorema de Desargues. El producto no es conmutativo, pero se puede utilizar para construir una geometría analítica con escalares en un cuerpo no conmutativo (anillo con división)
- Si se satisface Pappus, el producto de segmentos es conmutativo.

Teorema (Hilbert)

Si una Geometría Plana verifica los axiomas de enlace planos (E.1,E.2,E.3), los axiomas de orden y el axioma de las paralelas, entonces la única forma de que dicha geometría se pueda interpretar como la geometría de un plano dentro de una geometría espacial que verifique los axiomas de enlace, orden y paralelas, es que dicha geometría verifique el teorema de Desargues.

Capítulo 6

- Estudio del teorema de Pappus.
- Lo deduce de los axiomas de enlace, orden, paralelas y continuidad -evitando los de congruencia.
- Construye una Geometría no Pappusiana que verifica los axiomas de orden, enlace y paralelas -pero no Arquímedes ni congruencia-
- Toda Geometría no Pappusiana debe ser también no Arquimediana.

Capítulo 7

- Estudio de construcciones con regla y patrón

Hay que decir que la axiomática de Hilbert, con la única modificación de cambiar el axioma de las paralelas por la afirmación de que por un punto exterior a una recta dada pasan varias paralelas, es también una axiomática para la Geometría hiperbólica -cosa que no sucede con axiomáticas anteriores, como la propuesta por Pasch. Por supuesto, para la Geometría elíptica, esto no es posible porque dicha Geometría no es Arquimediana.

1900 : La conferencia de París

- En 1900 Hilbert era ya un matemático consagrado. Había logrado resolver algunos de los problemas más importantes de la teoría de invariables, había puesto orden en la teoría algebraica de números y, además, había sentado las bases de la axiomática moderna aplicando sus ideas sobre consistencia relativa a las distintas geometría y dando un fundamento sólido para la geometría euclídea. A nadie se le escapaba que sus opiniones tenían un peso importante. Y no solo en Alemania....
- Ese año es llamado por Poincaré para que imparta una conferencia como ponente invitado el el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos, que coincidiría con la Exposición Universal de París.
- La conferencia de Hilbert, "Sobre los problemas futuros de la matemática", marcaría en buena medida el rumbo de las matemáticas del S. XX...