Sèries de potències (aleatòries)

Joaquim Ortega-Cerdà

FME, 8 d'octubre de 2014

UNIVERSITAT DE BARCELONA

The founding father
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897

Perquè és conegut Weierstrass?

The founding father
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897

Perquè és conegut Weierstrass?

- Fundacions rigoroses de l'anàlisi: Convergència uniforme, productes infinits,...

The founding father

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897

Perquè és conegut Weierstrass?

- Fundacions rigoroses de l'anàlisi: Convergència uniforme, productes infinits,...
- Teoria de funcions en base a sèries de potencies, teoria de l'aproximació.

The founding father
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897

Perquè és conegut Weierstrass?

- Fundacions rigoroses de l'anàlisi: Convergència uniforme, productes infinits,...
- Teoria de funcions en base a sèries de potencies, teoria de l'aproximació.
- Treballs en funcions el·líptiques.

The founding father
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897

Perquè és conegut Weierstrass?

- Fundacions rigoroses de l'anàlisi: Convergència uniforme, productes infinits,. . .
- Teoria de funcions en base a sèries de potencies, teoria de l'aproximació.
- Treballs en funcions el·líptiques.
- Uns estudiants excel·lents: Cantor, Frobenius, Fuchs, Kovalevskaya, Runge, Schur, ...

Anàlisi versus Síntesi

En *anàlisi* és freqüent descompondre una funció en superposició de funcions simples i aquesta descomposició s'utilitza per arribar a esbrinar propietats de les funcions. Això és la base de l'anàlisi de Fourier, sèries de potències, ondetes, sèries de Dirichlet,…

Anàlisi versus Síntesi

En *anàlisi* és freqüent descompondre una funció en superposició de funcions simples i aquesta descomposició s'utilitza per arribar a esbrinar propietats de les funcions. Això és la base de l'anàlisi de Fourier, sèries de potències, ondetes, sèries de Dirichlet,...
El procés invers, la *síntesi*, construeix funcions a partir de superposició de funcions simples per obtenir funcions amb propietats desitjades.

Anàlisi versus Síntesi

En *anàlisi* és freqüent descompondre una funció en superposició de funcions simples i aquesta descomposició s'utilitza per arribar a esbrinar propietats de les funcions. Això és la base de l'anàlisi de Fourier, sèries de potències, ondetes, sèries de Dirichlet,...

El procés invers, la *síntesi*, construeix funcions a partir de superposició de funcions simples per obtenir funcions amb propietats desitjades.

Un exemple canònic és la funció de Weierstrass:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} a^n \cos(b^n x)$$

amb $a < 1$ i $ab \geq 1$. Aquesta és una funció continua en $\mathbb{R}$ no derivable en cap punt.

De vegades no sabem com triar els coeficients per fer una combinació de funcions simples amb propietats desitjades i el que fem es triar a l'atzar!

De vegades no sabem com triar els coeficients per fer una combinació de funcions simples amb propietats desitjades i el que fem es triar a l'atzar!
Comencem amb un cas senzill. Considerem el polinomi aleatori:

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$.

De vegades no sabem com triar els coeficients per fer una combinació de funcions simples amb propietats desitjades i el que fem es triar a l'atzar!
Comencem amb un cas senzill. Considerem el polinomi aleatori:

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

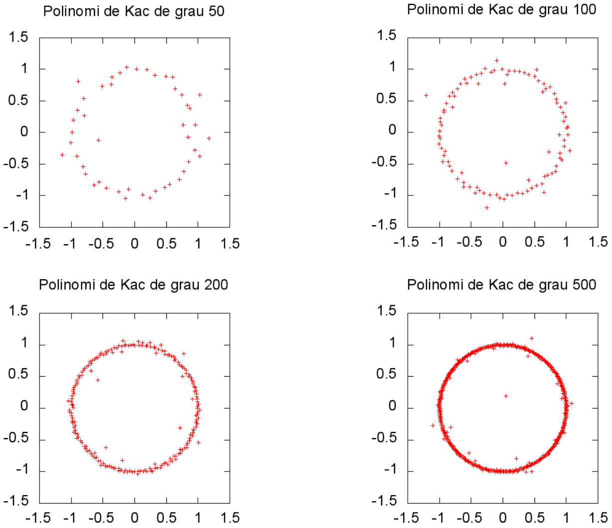
on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$.
Calculem els zeros de p_n: $z_1, \ldots, z_n$.

De vegades no sabem com triar els coeficients per fer una combinació de funcions simples amb propietats desitjades i el que fem es triar a l'atzar!
Comencem amb un cas senzill. Considerem el polinomi aleatori:

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$.
Calculem els zeros de p_n: $z_1, \ldots, z_n$.
Quina és la distribució?

Zeros del polinomis de Kac



Els polinomis de Weyl

Considerem ara els polinomis aleatoris:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$.

Els polinomis de Weyl

Considerem ara els polinomis aleatoris:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0,1)$.
Calculem els zeros de p_n: $z_1, \ldots, z_n$.

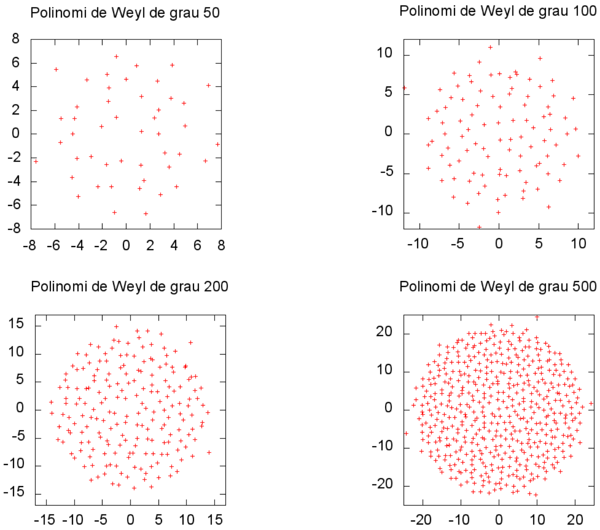
Els polinomis de Weyl

Considerem ara els polinomis aleatoris:

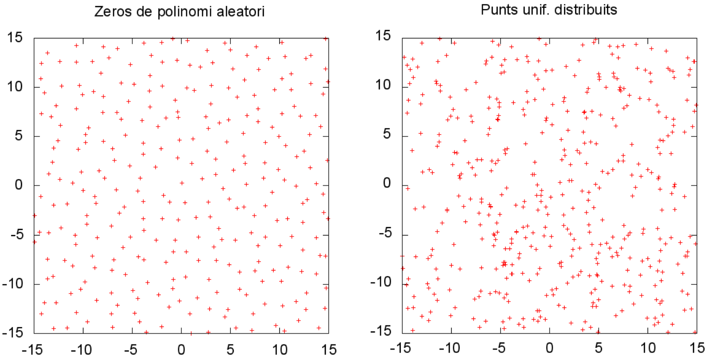
$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

on a_j, $j = 0, \ldots, n$ són variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $a_j \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$.
Calculem els zeros de p_n: $z_1, \ldots, z_n$.
Quina és la distribució?

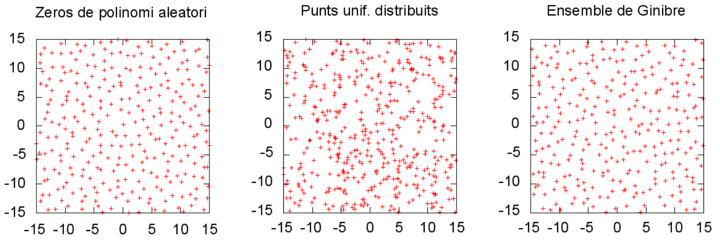
Zeros del polinomis de Weyl



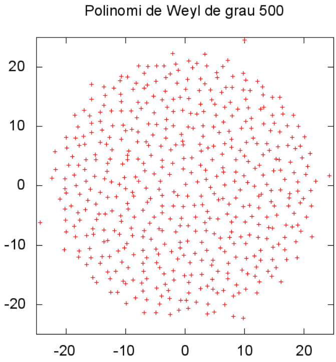
Una mirada microscòpica

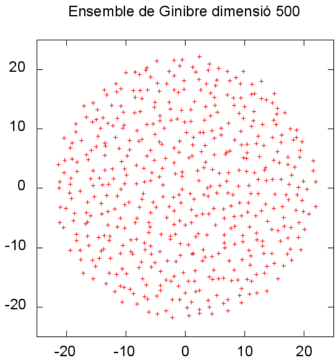


Les matrius aleatòries de prop



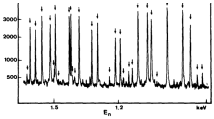
Les matrius aleatòries de lluny



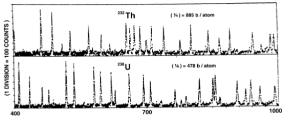


Un “detour” per les matrius aleatòries

La motivació per estudiar els valors propis de matrius aleatòries, ve del problema de la difusió “scattering” nuclear. Veiem alguns exemples de ressonàncies de difusió:



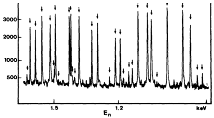
Gadolini 156



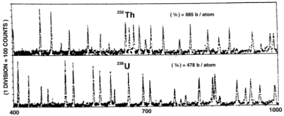
Tori 232 i Urani 238

Un “detour” per les matrius aleatòries

La motivació per estudiar els valors propis de matrius aleatòries, ve del problema de la difusió “scattering” nuclear. Veiem alguns exemples de ressonàncies de difusió:

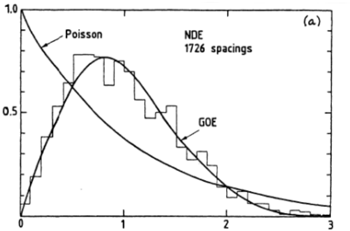


Gadolini 156



Tori 232 i Urani 238

i la separació normalitzada dels vaps del GOE:

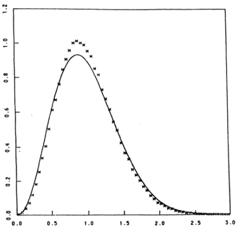


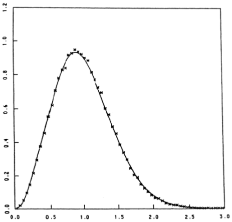
Montgomery es troba a Dyson

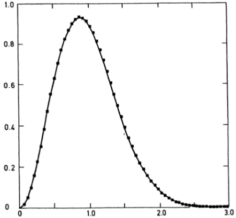
Estudiant la distribució dels zeros de la funció ζ de Riemann, Montgomery conjectura una certa repulsió local. És llegendària la trobada amb el famós físic nuclear Dyson que li fa notar la similitud amb la distribució dels espais entre els vaps de matrius aleatòries del GOE.

Montgomery es troba a Dyson

Estudiant la distribució dels zeros de la funció ζ de Riemann, Montgomery conjectura una certa repulsió local. És llegendària la trobada amb el famós físic nuclear Dyson que li fa notar la similitud amb la distribució dels espais entre els vaps de matrius aleatòries del GOE.







La repulsió local

Una explicació heurística del perquè de la repulsió local és la següent:

Proposició

Si $p(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$ *té coeficients* a_k*, i.e:*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

aleshores la aplicació $T(z_1, \ldots, z_n) = a_0, \ldots, a_{n-1}$ *té Jacobià* $\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2$*.*

La repulsió local

Una explicació heurística del perquè de la repulsió local és la següent:

Proposició

Si $p(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$ té coeficients a_k, i.e:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

aleshores la aplicació $T(z_1, \ldots, z_n) = a_0, \ldots, a_{n-1}$ té Jacobià $\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2$.

De manera que la mesura "uniforme" sobre els coeficients es transporta per T a una mesura sobre els zeros amb funció de densitat 0 si dos punts són iguals.

Funcions analítiques Gaussianes

Suposem que tenim una funció aleatòria de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k a_k z^k$$

on m_k són coeficients prefixats i a_k variables aleatòries independents $a_k \simeq N_{\mathbb{C}}(0, 1)$. La primera intensitat ρ és la mesura mitjana dels punts.

Funcions analítiques Gaussianes

Suposem que tenim una funció aleatòria de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k a_k z^k$$

on m_k són coeficients prefixats i a_k variables aleatòries independents $a_k \simeq N_{\mathbb{C}}(0,1)$. La primera intensitat ρ és la mesura mitjana dels punts.
Si diem μ a la mesura empírica dels zeros: $\mu = \sum_i \delta_{z_i}$, definim ρ com

$$\int h d\rho := \mathbb{E} \int h d\mu \quad \forall h \in \mathcal{C}_K(\mathbb{C}).$$

Funcions analítiques Gaussianes

Suposem que tenim una funció aleatòria de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k a_k z^k$$

on m_k són coeficients prefixats i a_k variables aleatòries independents $a_k \simeq N_{\mathbb{C}}(0,1)$. La primera intensitat ρ és la mesura mitjana dels punts.
Si diem μ a la mesura empírica dels zeros: $\mu = \sum_i \delta_{z_i}$, definim ρ com

$$\int h d\rho := \mathbb{E} \int h d\mu \quad \forall h \in \mathcal{C}_K(\mathbb{C}).$$

Volem calcular ρ que ens dona una primera aproximació de la distribució dels zeros.

Funcions analítiques Gaussianes

Prenem $f_n(z) = m_k z^k$ i definim

$$K(z,w) = \sum_n f_n(z)\overline{f_n(w)}.$$

Teorema (Fórmula de Edelman-Kostlan)

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\Delta \log K(z,z)$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log|f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log|f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

- Prenem ara f aleatòria $f(z) = \sum_n a_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\mu) = \mathbb{E}\left(\sum \delta_{z_i}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right)$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log|f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

- Prenem ara f aleatòria $f(z) = \sum_n a_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\mu) = \mathbb{E}\left(\sum \delta_{z_i}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right)$$

- $$\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right) =$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log |f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

- Prenem ara f aleatòria $f(z) = \sum_n a_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\mu) = \mathbb{E}\left(\sum \delta_{z_i}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\left(\Delta \log |f|^2\right)$$

- $$\mathbb{E}\left(\Delta \log |f|^2\right) = \Delta \mathbb{E} \log |f|^2$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \log|f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

- Prenem ara f aleatòria $f(z) = \sum_n a_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\mu) = \mathbb{E}\left(\sum \delta_{z_i}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right)$$

- $$\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right) = \Delta\mathbb{E}\log|f|^2 = \Delta \log \mathbb{E}|f|^2$$

“Prova” de la fórmula

- Sabem que per tota $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log|f| = \sum_{z_i:\ f(z_i)=0} \delta_{z_i}$$

- Prenem ara f aleatòria $f(z) = \sum_n a_n f_n(z)$.

$$\mathbb{E}(\mu) = \mathbb{E}\left(\sum \delta_{z_i}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right)$$

- $$\mathbb{E}\left(\Delta \log|f|^2\right) = \Delta \mathbb{E} \log|f|^2 = \Delta \log \mathbb{E}|f|^2$$

- Finalment

$$\mathbb{E}|f|^2 = \sum_n |f_n(z)|^2 = 4\pi K(z,z).$$

Polinomis de Weyl revisited

Recordem en aquest cas:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

Polinomis de Weyl revisited

Recordem en aquest cas:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

Per tant

$$K_n(z,z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^2}{k!} = \frac{\Gamma(n+1, |z|^2)}{\Gamma(n+1)} e^{|z|^2}.$$

Per la fórmula d'Edelman Kostlan:

$$\rho_n(z) = \frac{1}{4\pi} \Delta(\log|\Gamma(n+1, |z|^2)|) + \frac{1}{\pi}$$

Polinomis de Weyl revisited

Recordem en aquest cas:

$$p_n(z) = \frac{a_0}{\sqrt{0!}} + \frac{a_1}{\sqrt{1!}} z + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n!}} z^n,$$

Per tant

$$K_n(z,z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^2}{k!} = \frac{\Gamma(n+1, |z|^2)}{\Gamma(n+1)} e^{|z|^2}.$$

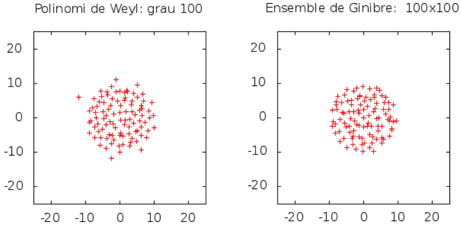
Per la fórmula d'Edelman Kostlan:

$$\rho_n(z) = \frac{1}{4\pi} \Delta(\log|\Gamma(n+1, |z|^2)|) + \frac{1}{\pi}$$

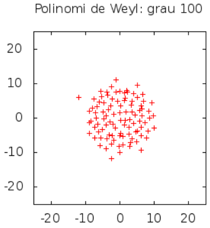
Si calculem la intensitat del ensemble de Ginibre (matrius amb entrades Gaussianes) resulta:

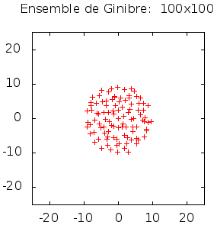
$$\tilde{\rho}_n(z) = \Gamma(n, |z|^2)/(\pi\Gamma(n)).$$

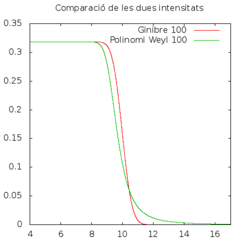
Dues intensitats per processos similars



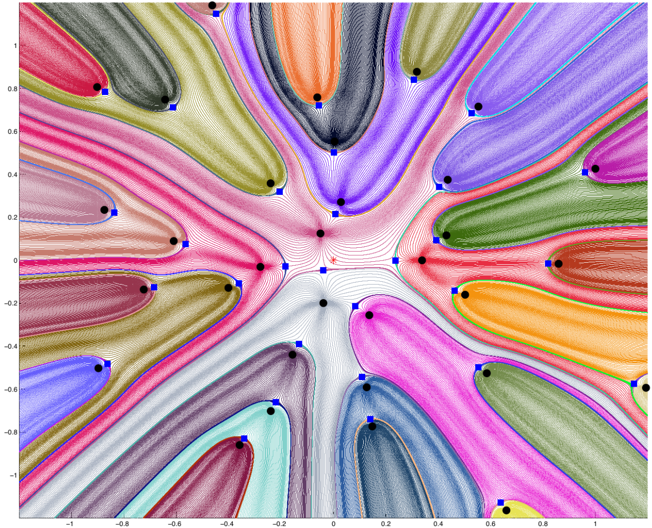
Dues intensitats per processos similars







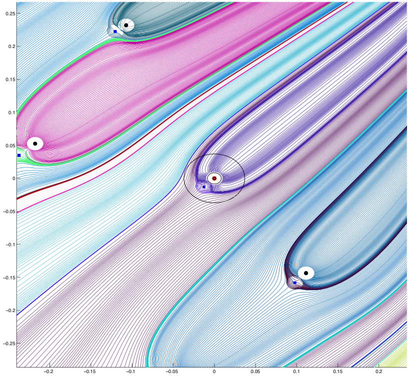
Punts crítics i zeros (segons B. Hanin)



Els polinomis el·líptics

$$p_n(z) = a_0\sqrt{\binom{n}{0}} + a_1\sqrt{\binom{n}{1}}z + \cdots + a_n\sqrt{\binom{n}{n}}z^n,$$

Els zeros es distribueixen uniformement en $\mathbb{C}P_1$ segons la mètrica de Fubini-Study. Comparem zeros i punts crítics:



Heurística electrostàtica

Donem una justificació de l'aparellament de zeros i punts crítics:

- Es pot veure que, amb probabilitat 1, els zeros són separats i la fórmula de E-K indica que es distribueixen uniformement en la esfera de Riemann.

Heurística electrostàtica

Donem una justificació de l'aparellament de zeros i punts crítics:

- Es pot veure que, amb probabilitat 1, els zeros són separats i la fórmula de E-K indica que es distribueixen uniformement en la esfera de Riemann.
- Considerem el potencial electrostàtic aleatori $u = \log |p_n|$. Es compleix $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \delta_{a_j} - n\delta_\infty$

Heurística electrostàtica

Donem una justificació de l'aparellament de zeros i punts crítics:

- Es pot veure que, amb probabilitat 1, els zeros són separats i la fórmula de E-K indica que es distribueixen uniformement en la esfera de Riemann.
- Considerem el potencial electrostàtic aleatori $u = \log |p_n|$. Es compleix $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \delta_{a_j} - n\delta_\infty$
- Un punt crític del polinomi correspon a un punt on el gradient del potencial electrostàtic s'anul·la, es a dir a un punt d'equilibri del camp elèctric.

Heurística electrostàtica

En un punt d'equilibri hi actuen 3 tipus de forces que s'han de compensar:

- La força de la carrega positiva del punt de l'infinit. És proporcional a n.

Heurística electrostàtica

En un punt d'equilibri hi actuen 3 tipus de forces que s'han de compensar:

- La força de la carrega positiva del punt de l'infinit. És proporcional a n.
- La força de la carrega negativa de la partícula aleatòria més propera. És proporcional a $1/r$ on r és la distància a la partícula.

Heurística electrostàtica

En un punt d'equilibri hi actuen 3 tipus de forces que s'han de compensar:

- La força de la carrega positiva del punt de l'infinit. És proporcional a n.
- La força de la carrega negativa de la partícula aleatòria més propera. És proporcional a $1/r$ on r és la distància a la partícula.
- La força de les altres carregues. Aquestes estan distribuïdes "uniformement" al voltant i una variant del teorema central del límit permet veure que aquesta força és proporcional a $\sqrt{n}$ (menyspreable).

Heurística electrostàtica

En un punt d'equilibri hi actuen 3 tipus de forces que s'han de compensar:

- La força de la carrega positiva del punt de l'infinit. És proporcional a n.
- La força de la carrega negativa de la partícula aleatòria més propera. És proporcional a $1/r$ on r és la distància a la partícula.
- La força de les altres carregues. Aquestes estan distribuïdes "uniformement" al voltant i una variant del teorema central del límit permet veure que aquesta força és proporcional a $\sqrt{n}$ (menyspreable).

Per tant per compensar totes les carregues cal que la carrega negativa més propera al punt crítica estigui a distància $1/n$.

Sèries de Dirichlet aleatòries

Considerem una variant:

$$f(s) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s}$$

On $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ és un caràcter aleatori. Un caràcter satisfà $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$. Per tant si prescrivim $\chi(2), \chi(3), \chi(5), \ldots$, determinem de forma única a χ.

Sèries de Dirichlet aleatòries

Considerem una variant:

$$f(s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}$$

On $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ és un caràcter aleatori. Un caràcter satisfà $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$. Per tant si prescrivim $\chi(2), \chi(3), \chi(5), \ldots$, determinem de forma única a χ.
La probabilitat que introduïm en l'espai de caràcters és la següent: Prenem $\chi(2)$ un punt de $\mathbb{T}$ amb distribució uniforme. Independentment $\chi(3)$ també amb distribució uniforme.

Sèries de Dirichlet aleatòries

Considerem una variant:

$$f(s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s}$$

On $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ és un caràcter aleatori. Un caràcter satisfà $\chi(n \cdot m) = \chi(n) \cdot \chi(m)$. Per tant si prescrivim $\chi(2), \chi(3), \chi(5), \ldots$, determinem de forma única a χ.
La probabilitat que introduïm en l'espai de caràcters és la següent: Prenem $\chi(2)$ un punt de $\mathbb{T}$ amb distribució uniforme. Independentment $\chi(3)$ també amb distribució uniforme. Identifiquem doncs els caràcters amb punts de $\mathbb{T}^\infty$ amb la mesura producte de probabilitat

10^6\$ quasi segurament

Proposició

Si a_n és totalment multiplicativa i en ℓ_2 aleshores $f_\chi(s) = \sum a_n \chi(n) n^{-s}$ és convergent quasi segurament cap a una funció sense zeros en $\mathbb{C}_0^+$.

10^6\$ quasi segurament

Proposició

Si a_n és totalment multiplicativa i en ℓ_2 aleshores $f_\chi(s) = \sum a_n \chi(n) n^{-s}$ és convergent quasi segurament cap a una funció sense zeros en $\mathbb{C}_0^+$.

Corol·lari (Helson)

Quasi segurament la funció de Riemann ζ

$$\zeta_\chi(s) = \sum \chi(n) n^{-s},$$

no té zeros en $\mathbb{C}_{1/2}^+$