

# imaginary

## una mirada matemàtica

Textos en valencià



Zitrus (*Lima*)

$$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)^3$$

## Crèdits

### **Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach-Imaginary**

Gert-Martin Greuel, Andreas Matt y Anna Hartkopf.

### **Comissió RSME-Imaginary**

Antonio Campillo (President), Sebastian Xambó (Coordinador general), Ignacio Ojeda (Secretari), Maria Alberich (U. Politècnica de Catalunya), Raúl Ibáñez (U. País Basc-EHU), M<sup>a</sup> Teresa Lozano (U. Saragossa), Juan J. Nuño (U. València), Ramón Piedra (U. Sevilla), Mercedes Siles (U. Màlaga)

### **Comissió Universitat de València-Imaginary**

(Facultat de Ciències Matemàtiques)

Juan J. Nuño, Oscar Blasco, Adolfo Ballester, Miguel Sanz, M. Teresa León, Luis López i Eva Primo

### **Coordinació tècnica Universitat de València**

Norberto Piqueras i Manuel Martínez

### **Coordinació visites guiades**

Pilar Pérez

### **Imatges**

Herwig Hauser i Oliver Labs

### **Textos**

Maria Alberich, Jordi Buendía, Capi Corrales, Anna Sabater, Emilio Sánchez, Raúl Ibáñez, Pedro Alegría i M<sup>a</sup> Teresa Lozano

### **Traducció dels textos al valencià**

Servei de Política lingüística de la Universitat de València

### **Disseny i maquetació dels elements de difusió en València**

Félix Fernández

### **Adaptació gràfica per a València**

Paco Mora

### **Impressió**

LAIMPRENTA CG [www.laimprentacg.com](http://www.laimprentacg.com)

### **Agraïments**

M<sup>a</sup> Teresa Lozano y Marta Macho Stadler

# imaginary

## una mirada matemàtica

**Sala Estudi General. La Nau, Centre Cultural de la Universitat de València**

20 desembre 2011 / 5 febrer 2012

---

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Real Sociedad  
Matemática Española



Mathematisches  
Forschungsinstitut  
Oberwolfach

(OV) Facultat de Ciències  
Matemàtiques

LA NAU

lafundación  
universitatdevalència



CÀTEDRA DE  
DIVULGACIÓ  
DE LA CIÈNCIA



FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA



$\sum_{j=1}^n a_j u_j'(x)$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim$   
 $(x_0) I_1 = \int_{x_0}^x \frac{1}{x^2}$   
 $\{x_n \pm \frac{1}{n}\}$   
 $(\sqrt[3]{n})^2$   
 $\sum_{k=0}^n a_k 2^k$   
 $(\sqrt[3]{n+2})$   
 $(a_n \neq 0)$   
 $n \rightarrow$   
 $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$   
 $a = \psi(9)$

*Allà on el món deixa de ser l'escena de les nostres esperances i desitjos personals, allà on l'afrontem com a éssers lliures admirant, preguntant i observant, entrem en el terreny de l'art i la ciència.*

Albert Einstein

La Universitat de València presenta el projecte expositiu *Imaginary*, una exposició interactiva organitzada per la Reial Societat Matemàtica Espanyola (RSME) amb motiu del seu centenari, en la qual es posen de relleu les diverses interrelacions entre les matemàtiques i l'art. Es tracta de l'adaptació d'un projecte, del mateix nom, desenvolupat per l'Institut d'Investigació Matemàtica d'Oberwolfach (MFO) a Alemanya, i és el fruit de la participació internacional tant de matemàtics com d'artistes. El seu *leitmotiv* és la imatge com a lloc d'encontre entre la realitat imaginada i la visualització concreta dels objectes matemàtics abstractes.

Molt sovint sentim tòpics sobre com són de complicades les matemàtiques, però la veritat és que ens ajuden a comprendre la complexitat del món que ens envolta de la manera més simple possible.

Per exemple, ens poden ajudar a classificar els objectes. La primera manera en què es van classificar els objectes del món va ser per la forma i la mida. Aquesta primera classificació depèn fortament de l'observador: la capacitat que tinga per a descriure una forma, on es col·loque i amb què compare l'objecte.

L'eina fonamental que va fer possible arribar a classificacions de les formes, de validesa universal, la van introduir els matemàtics Fermat i Descartes en el segle XVII, i consisteix a triar un conveni per a orientar-se en l'espai, és a dir, un sistema de coordenades que permet descriure les relacions geomètriques, ja estudiades pels grecs (Euclides s. III aC), en el llenguatge de l'àlgebra desenvolupat pels àrabs (Al-khwarizmi, s. IX).

Considera't invitat a mirar l'exposició "amb ull matemàtic" des de la perspectiva que més et seduïska: deixant-te captivar per les formes de les figures, atent als suggeriments que et desperten en la imaginació, participant en el diàleg entre geometria i àlgebra, aprenent a llegir propietats d'una forma, com les simetries, en la seua equació, o desafiant el món de les singularitats –punts especials en què les figures són rudes i tallants com el tall d'una navalla o la punta d'una agulla–, descobrint alguns dels misteris dels conceptes que involucren.

# **SUPERFÍCIES ALGEBRAIQUES**



### 1. Zitrus (*Llima*)

$$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)^3$$

#### **Això no és una llima**

##### *La traïció de les imatges*

En veure aquesta imatge, segurament tots hem pensat: "Això és una llima". Però si és una llima, per què no té olor ni sabor?, per què no té ni porus ni taques? És clar que això no pot ser una llima!

En efecte, aquesta figura no és una llima, sinó un model matemàtic d'una llima, que ens ajuda a entendre millor les propietats de la forma que té la llima. Les equacions ens permeten construir models matemàtics que s'assemblen a les coses, i estudiar aquests models matemàtics ens ajuda, al seu torn, a entendre millor la forma de les coses.

El mapa no és el territori  
Alfred H. S. Korzybski

Tot això forma part de la "poesia" de les matemàtiques. A partir d'equacions algebraïques podem generar belles superfícies que ens transporten els pensaments fins a racons insospitats de la ment.



### 2. Zeck (*Baldufa*)

$$x^2 + y^2 = z^3 (1 - z)$$

#### **L'equació, un nom inequívoc**

##### *Imagina un nom per a aquesta figura...*

Totes les figures que es mostren en l'exposició tenen nom. Si hagueres d'anomenar-les tu, quins noms hauries triat? Quin nom creus que deu haver posat una altra persona? Pregunta-ho!

Però, podem trobar una manera d'anomenar figures que no porte mai a confusió? Les matemàtiques han resolt aquest problema anomenant-les per la seua equació.

Una sola equació determina tota la figura, tots els seus punts i corbes, fins i tot tots els forats, tots els plecs i totes les puntes. Només falta aprendre a trobar-los en l'equació o saber dibuixar-la. És com quan t'ensenyen a escriure: una vegada que saps escriure una paraula sense faltes, tothom l'entén. A més, les equacions s'escriuen i s'interpreten igual pertot arreu, perquè el llenguatge de les matemàtiques és universal, com les partitures musicals.



### 3. Kolibri (*Colibrí*)

$$z^3 + y^2 z^2 = x^2$$

#### **Diàleg entre geometria i àlgebra**

*L'equació és el director dels punts*

Vet ací què ens diu l'àlgebra sobre Colibrí: està formada per totes les ternes  $(x, y, z)$  de nombres que satisfan  $x^2 = y^2 z^2 + z^3$ .

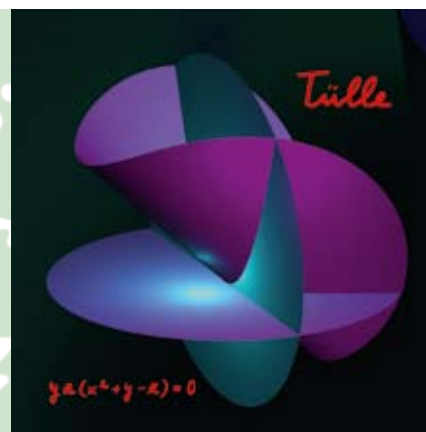
Per exemple,  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,1)$  i  $(3,-2,-3)$  són punts de Colibrí, mentre que  $(0,1,1)$  no ho és.

En general, l'equació descriu exactament la figura: a cada punt li correspon una terna de nombres  $(x, y, z)$  que és solució de l'equació, i a l'inrevés.

Però Colibrí és una figura geomètrica que veiem en l'espai! Com sorgeix la figura de Colibrí a partir d'aquests nombres?

Això ens ho diu la geometria: per a interpretar  $x, y, z$  necessites triar un conveni per a orientar-te en l'espai, és a dir, un sistema de coordenades. Aquest consta de tres eixos que passen per un punt, anomenat origen, i que determinen les tres direccions: arrere-avant, dreta-esquerra i baix-dalt.

Així, les coordenades  $(x, y, z)$  indiquen quant s'ha recorregut en cada una de les tres direccions des de l'origen fins a arribar al punt en qüestió.



### 4. Tülle (*Embull*)

$$y z (x^2 + y - z) = 0$$

#### **Infinits punts en una paraula**

*Els "polzets" de les matemàtiques*

Així com els impressionistes pintaven cases i prats amb milers de punts de pintura, les superfícies també estan formades per milers de punts. De fet, una infinitat, i tots solucions d'una equació!

Una manera de pensar en l'infinit és començar a comptar 1, 2, 3...

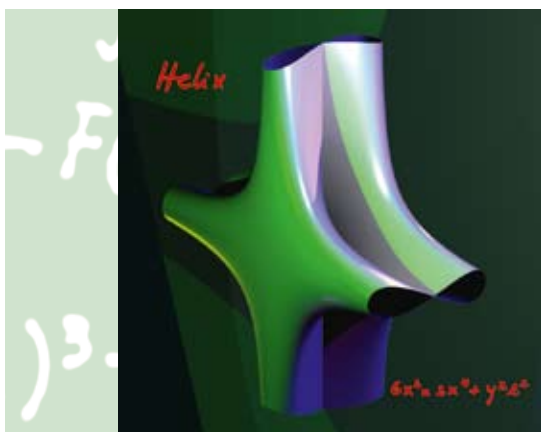
Sempre hi ha un nombre més gran, i no acabem mai d'anomenar tots els nombres naturals.

Fixa't en l'equació d'Embull: els factors  $yz$  multipliquen tota l'equació. Per tant, tots els punts dels plans  $z=0$  (horitzontal) i  $y=0$  (vertical) formen part de Tülle.

Però no solament figures com Tülle, que conté dos plans, estan formades per una infinitat de punts. Un quadrat, sense anar gaire lluny, també.

Sembla impossible que infinits punts càpiguen en un quadrat, que és una porció finita, veritat? Pensa que els punts són tan petits que se'ls considera adimensionals, i si en poguérem dibuixar realment un, no seria perceptible a l'ull humà.





## 5. Helix (*Hèlix*)

$$6x^2 = 2x^4 + y^2 z^2$$

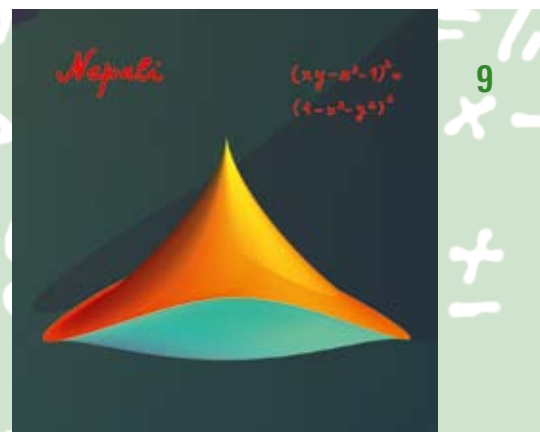
### Més fines que una bombolla de sabó

*No es poden esculpir de tan fines com són*

Les bombolles de sabó són extremadament delicades, tant que a vegades sembla que esclaten pel simple fet de mirar-les. Tanmateix, la seua superfície està formada per una capa d'aigua atrapada entre dues capes de sabó. Quan són massa fines —per exemple, quan la bombolla de sabó creix—, l'aigua de la capa interior fa esclatar la bombolla.

Les superfícies algebraiques són moltíssim més fines que les bombolles de sabó, ja que estan fetes d'una sola capa de punts. I com que només fem servir la imaginació per a produir els punts, sense gruix ni massa, les superfícies no esclaten, tot i tenir puntes o plecs tan marcats com els d'Hèlix.

Així, si volem tocar la superfície d'Hèlix en un model tridimensional, hem de crear una escultura més gruixuda que hèlix en realitat, engrossint la superfície per un dels costats. L'escultura d'Hèlix que es mostra a la vitrina s'ha engrossit pel costat interior.



## 6. Nepali (*Nepalès*)

$$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$$

### Caben en una bola o s'estenen fins a l'infinit?

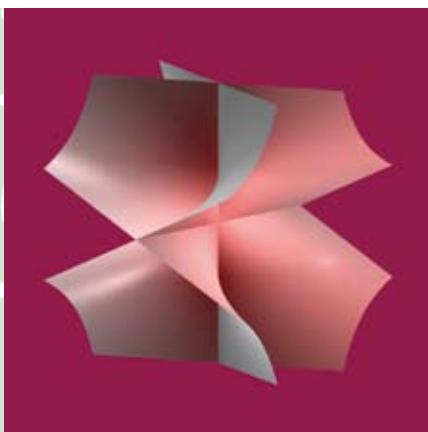
*Un món sens fi*

Potser alguna superfície et sembla francament bella i et vénen ganes de ficar-la en una bola de vidre plena de neu, per poder-la sacsejar i jugar-hi. Però no et penses que pots triar qualsevol superfície i ficar-te-la dins l'habitació!

Hi ha superfícies que s'estenen fins a l'infinit i, per molt boniques que siguin, mai no les podràs ficar dins d'una bola de vidre, ni que siga immensa. Si passa això, es diu que no són fitades i per a dibuixar-les hem de triar-ne una porció: per això sembla que algunes estan tallades, com Embull, de la qual només veiem la porció continguda en una esfera. En canvi Nepalès està fitada.

T'atreveixes a deduir-ho de l'equació?

La propietat de ser fitada no és fàcil de percebre empíricament, fins i tot amb l'ajuda de SURFER. És com esbrinar si l'univers és tancat; malgrat que no en conegues els límits, pot ser que en tinga o que no en tinga.



### 7. Himmel und Hölle (*Dia i Nit*)

$$x^2 - y^2z^2 = 0$$

#### Creant noves formes

*La simplicitat sorprenent de l'àlgebra*

Per a crear noves formes cal conèixer-ne les equacions. Les peces bàsiques són els monomis, expressions algebraiques amb lletres i nombres.

En un monomi es distingeixen aquests elements:

signe, coeficient, variables, exponents i grau.

Per exemple:

$$2xy^2z = +2x^1y^2z^1$$

El grau del monomi és la suma dels exponents de les variables que el componen: grau =  $1+2+1 = 4$

Per a formar equacions només s'usen les operacions de suma, resta i multiplicació, que coneixem des que som molt menuts.

Malgrat això, amb operacions tan simples s'aconsegueix obtenir superfícies molt especials: les superfícies algebraiques.

T'atreveixes a crear formes amb puntes o forats només sumant i multiplicant?



### 8. Quaste (*Encenall*)

$$8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0$$

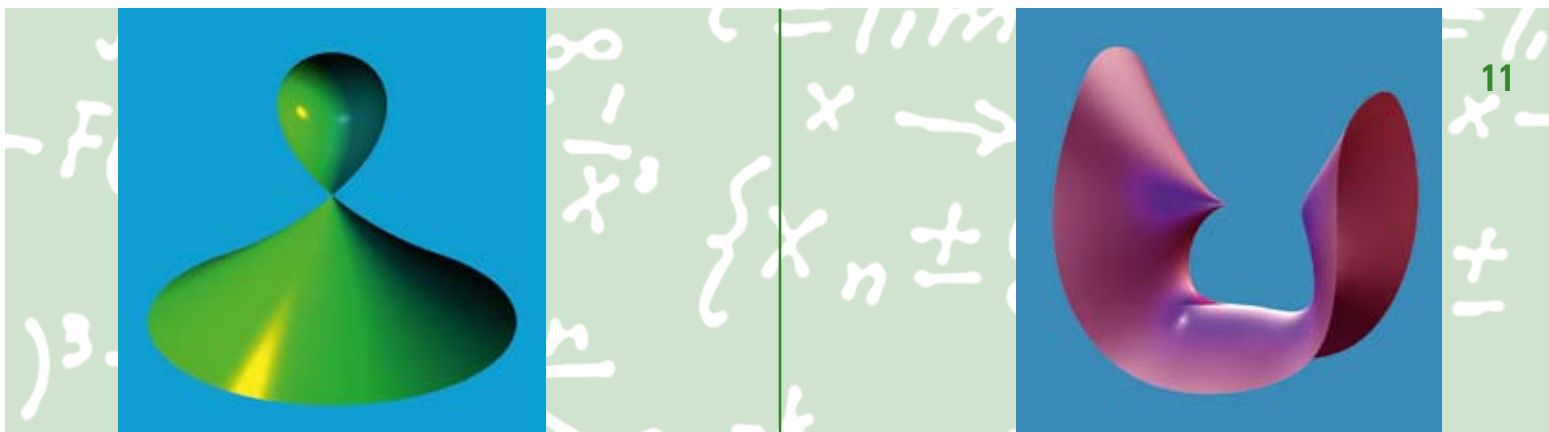
#### L'abecedari de les equacions

*Com més grau, més lletres*

T'has fixat en l'equació d'Encenall? Sembla enormement complicada.

En canvi, la figura és fàcil de descriure: la vora superior té la forma de la lletra grega alfa,  $\alpha$ ; la vora dreta té la forma d'una corba amb una punta, anomenada cúspide; si fas lliscar aquesta corba cuspidal paral·lelament al llarg de la corba en forma d'alfa, obtens Encenall. Les superfícies que posseeixen aquesta propietat reben el nom de productes cartesianes, en honor del matemàtic René Descartes.

Combinant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  podem construir monomis de grau 1, que coincideixen amb les mateixes variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; grau 2:  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$ ,  $xz$ ,  $yz$ ,  $z^2$ ; i així successivament. Com més elevat és el grau, més monomis tenim, i això ens dóna joc per a crear formes més complicades. És com un abecedari: si disposem de més lletres, podrem escriure paraules més complicades.



11

### 9. Ding-dong (*Llàgrima*)

$$x^2 + y^2 + z^3 = z^2$$

#### Deformar la figura deformant l'equació

*L'equilibri de les estalactites*

L'equació i la forma de Llàgrima són molt simples. La figura s'ha obtingut girant la forma de la lletra grega alfa al voltant d'un eix. Mirant-la al revés sembla una gota d'aigua. Gairebé es podria dir que la veiem caure!

Afegint paràmetres a l'equació, i modificant-los de manera contínua, podem crear una seqüència d'imatges en què podríem veure com es genera la gota, com es va acostant a la posició límit i, finalment, com es desprèn. És com crear una seqüència de fotogrames d'una pel·lícula.

A cada instant, la gota es troba en una situació d'equilibri, en què la força de la gravetat compensa la tensió superficial del líquid.

Però l'equilibri de Llàgrima és clarament inestable i les gotes hi passen tremolant fins que es desprenen. La teoria de catàstrofes del matemàtic René Thom estudia com canvis petits dels paràmetres poden portar a canvis d'equilibri sobtats.

### 10. Vis à vis (*Tu i Jo*)

$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

#### Singular *versus* llis

*Amics o enemics*

Els punts singulars, o singularitats, sovint s'identifiquen fàcilment de forma visual perquè són punts en què la superfície no és llisa ni suau, com ara un pic o un plec.

La superfície Tu i Jo il·lustra força bé què és una singularitat, el pic de l'esquerra, i què no ho és, el tossal llis de la dreta.

Les singularitats són interessants entre altres coses perquè, contràriament al que passa amb els punts llisos que són estables, petits canvis en l'equació poden canviar-ne l'aspecte de forma sorprenent.

Saps que hi ha gent que es dedica especialment a l'estudi d'aquests punts? Els forats negres i el principi de l'univers, Big Bang, són singularitats de les equacions dels models cosmològics.

Sense anar gaire lluny, les singularitats de les nostres empremtes digitals ens identifiquen!



### 11. Süss (*Passió*)

$$(x^2 + 9/4y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 9/80y^2z^3 = 0$$

#### Singularitat al cor

*Imagines un cor sense punxa?*

Voldria, ni molt ni poc:  
ésser lliure com una ala,  
i no mudar-me del lloc  
platejat d'aquesta cala;  
i encendre el foc  
del pensament que vibra,  
i llegir només un llibre  
antic,  
sense dubte, ni enveja, ni  
enemic.

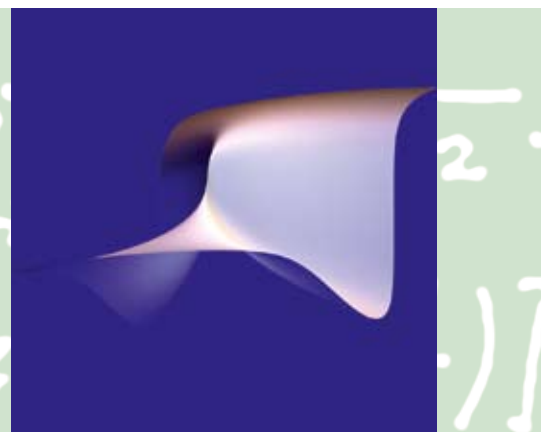
I no saber on anirem,  
quan la mort ens cridi al tàlem:  
creure en la fusta del rem,  
i en la fusta de l'escàlem.

I fer tot el que fem,  
oberts de cor i de parpelles,  
i amb tots els cinc sentits;  
sense la por de jeure  
avergonyits  
quan surtin les estrelles.

Comprendre indistintament  
rosa i espina;  
i estimar aquest moment,  
i aquesta mica de vent,  
i el teu amor, transparent  
com una aigua-marina.

“Aigua-marina” de Josep  
Maria de Segarra, d'*Àncores i  
estrelles*

La passió amorosa acostuma  
a identificar-se amb la força  
emotiva d'alguna “singularitat”  
dolorosa i per això aquesta  
associació ha estat àmpliament  
utilitzada en el món de l'art, no  
solament arquitectònic i pictòric,  
sinó també en el narratiu i  
interpretatiu.



### 12. Sofa (*Sofà*)

$$x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

#### Controlar el que és imprevisible

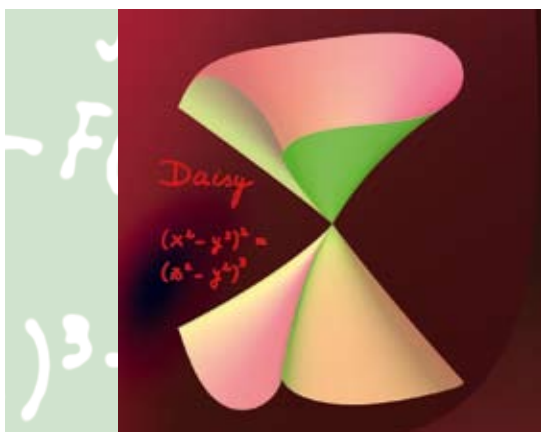
*Singularitats amb suspens*

Encara que Sofà té la forma d'una butaca moderna, no sembla gens còmode!

Si se situa una boleta al plec de Sofà, no podem preveure cap on caurà; en canvi, és fàcil imaginar la trajectòria de la boleta si se situa en qualsevol altre punt.

Aquesta impredecibilitat es manifesta en informàtica: per a dibuixar una superfície, esculpir-la o calcular la trajectòria d'una boleta que hi llisca damunt, cal trobar una malla prou atapeïda de punts solució, i per a aquest fi les singularitats són un obstacle, ja que els errors d'arredoniment poden superar la distància entre els dos vessants del plec.

Una estratègia per a resoldre aquest inconvenient és aproximar prèviament l'equació prop dels punts singulars. I sol tenir èxit, ja que la forma d'una superfície prop d'un punt es pot aproximar força bé!



### 13. Daisy (Campaneta)

$$(x^2 - y^2)^2 = (z^2 - y^2)^3$$

#### Amb ull matemàtic

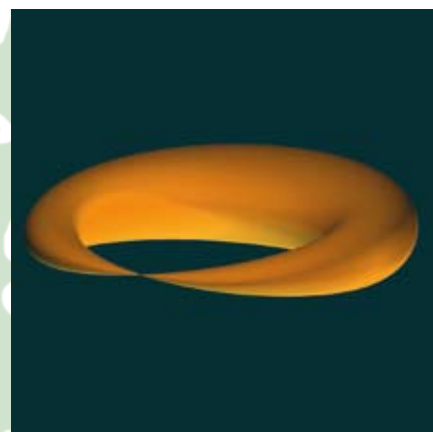
##### *Reconèixer les singularitats*

Has après que puntes i plecs són singularitats, si bé n'hi ha més tipus. Però imagina't ara que et tapen els ulls i t'impedeixen tocar la superfície. Com podries trobar-ne les singularitats?

Les singularitats es defineixen com tots aquells punts de la superfície que són solució de les derivades parcials de l'equació. Aquest mètode permet trobar les singularitats amb paper i llapis, sense necessitat de tenir la superfície prop, tan sols mitjançant l'equació.

Per exemple, derivant l'equació  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , que representa un con, respecte de  $x$ , obtenim  $2x$ ; respecte de  $y$ ,  $2y$ ; i respecte de  $z$ ,  $-2z$ . Aquestes tres derivades s'anul·len alhora només en el punt  $(0,0,0)$ . Com que  $(0,0,0)$  és un punt del con, hem trobat l'únic punt singular del con, que, com podíem esperar, és la punta del con!

Si segueixes aquest mètode amb Campaneta, trobaràs que els punts singulars formen dues corbes planes que es tallen transversalment en el punt singular comú.



### 14. Croissant (Croissant)

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 7\sqrt{5}/2 - 11/2)^2 - ((1 + \sqrt{5})x - 7 + 3\sqrt{5})^2 - (1 + \sqrt{5})^2 y^2 = 0$$

#### Resoldre per comprendre

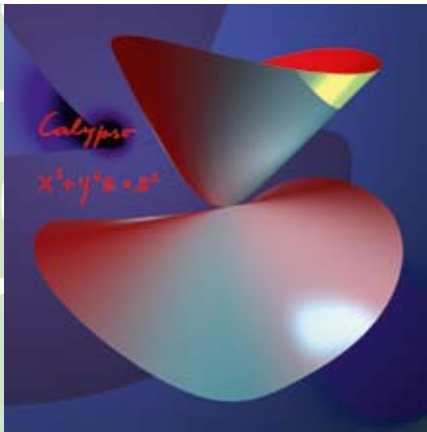
##### *Quan els punts exploten*

Per a comprendre millor les singularitats, s'utilitzen tècniques que permeten transformar, en un nombre finit de passos, superfícies singulars en superfícies llises.

Una manera d'entendre això és mitjançant globoflèxia: amb globus allargats podem obtenir figures girant i estrangulant la goma. Croissant té una estrangulació en el punt singular; si la desfem obtenim un "dònut", una forma que rep el nom de tor.

Concretament, el punt de Croissant explota i es transforma en una circumferència del tor.

Tot el procés s'anomena resolució de singularitats. Per exemple, donat un gos salsitxa amb diverses estrangulacions (singularitats), podem desfer-les fins a obtenir el globus original ben llis. Però, compte!, per a tornar a muntar el gosset, haurem de recordar els passos: resoldre i recordar.



### 15. Calypso (*Calipso*)

$$x^2 + y^2 z = z^2$$

#### L'estètica de la inestabilitat

##### *Equacions de la creativitat*

Les singularitats són delicades o inestables, com Calipso. Petites modificacions en l'equació transformen la superfície radicalment. La inestabilitat de les singularitats és l'essència de la seua bellesa.

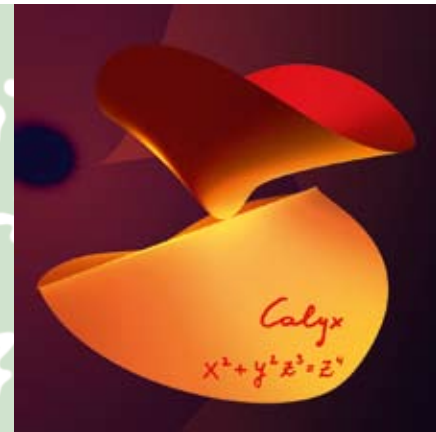
Això també passa en arquitectura, per exemple amb les superfícies plegables: la inestabilitat permet el moviment de l'estructura i doncs el canvi de forma.

Sabies que els arquitectes fan servir equacions per a saber quina forma presentarà l'obra a cada moment durant el desplegament?

Els grans arquitectes són també grans coneixedors de les matemàtiques, i les equacions els permeten experimentar amb les formes somiades.

El plegado, como un medio para cambiar la forma de un armazón, contradice el principio de estabilidad en tanto que esta última es la capacidad de retener la forma. Así, una estructura plegable debe necesariamente ser inestable.

Olga Gil Medrano, *Un mundo en el bolsillo, la geometría plegable de Santiago Calatrava*.



### 16. Calyx (*Calze*)

$$x^2 + y^2 z^3 = z^4$$

#### Elevar-se a dimensions superiors

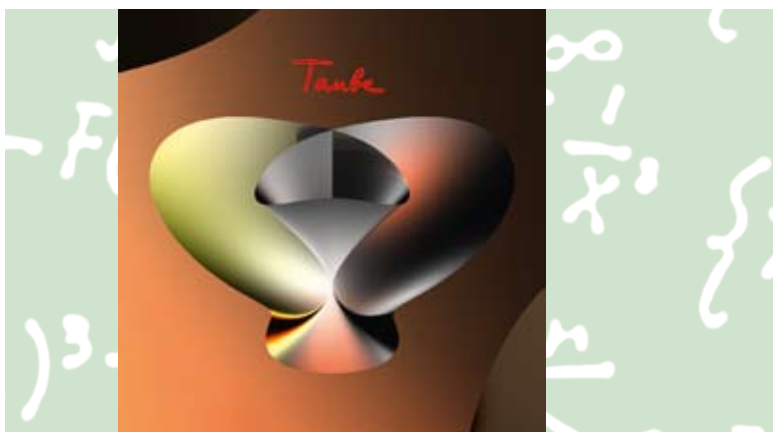
##### *Atrapades a la caverna de les ombres*

Els punts singulars de Calze són tots els punts de l'eix Y. Si explotem aquesta recta, com hem fet amb el punt singular de Croissant, obtenim un cilindre, i Calze es transforma en Calipso! Si tornes a contemplar Calipso no veuràs aquest cilindre perquè habita en dimensions superiors, i només comparteix amb Calipso i el seu món tridimensional una recta.

Una altra manera d'entendre això és imaginar el procés invers: mitjançant una projecció adequada en un espai 5-dimensional, la superfície del cilindre es contrau a la recta singular de Calze, i d'aquesta manera Calze és l'ombra de Calipso!

Un resultat sorprenent del matemàtic Heisuke Hironaka afirma que qualsevol superfície amb alguna singularitat és l'ombra d'alguna superfície llisa, és a dir, sense singularitats, que pot habitar en un espai de dimensió superior a tres.

Podem imaginar que el món tridimensional és una caverna que atrapa les ombres de realitats de dimensió superior...



### 17. Taube (*Ocellet*)

$$256z^3 - 128x^2z^2 + 16x^4z + 144xy^2z - 4x^3y^2 - 27y^4 = 0$$

#### Origami multidimensional

*La ubiqüitat de les cúspides*

Si ens cauen unes estovalles a terra, queden plenes de plecs. La caiguda determina una assignació, o projecció, dels punts de les estovalles en els punts del terra, i els punts dels plecs formen una corba anomenada discriminant.

La manera de saber si un punt és del discriminant, és a dir, d'un plec, és travessar amb un agulla de cap les estovalles al voltant del punt: si el nombre de capes travessades no és el mateix en un entorn petit del punt, podem assegurar que està situat sobre un plec.

Hassler Whitney va observar que, en general, hi ha dos tipus de punts en un plec: els que componen la corba del plec i el punt extrem. Aquests punts extrems s'anomenen cúspides.

Imagina que, en comptes de superfícies, manipules objectes algebraics de dimensió superior i que pots fer projeccions entre aquests. Aleshores el discriminant, o els plecs, ja no serien corbes sinó superfícies o varietats de dimensió superior. Així és com apareix la figura de Taube: és una superfície discriminant.



### 18. Seepferdchen (*Cavall de Mar*)

$$(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$$

#### Singularitats delicades

*Contactes subtils*

La superfície Cavall de Mar es replega i s'autointerseca en un únic punt, que és singular. El suau contacte tangencial entre les dues porcions és molt difícil d'aconseguir jugant amb equacions.

Es tracta d'una singularitat molt delicada, i qualsevol petita modificació de l'equació destrueix aquest contacte subtil. Canvia l'equació mitjançant SURFER i observa el resultat!

Potser aquesta bella superfície es diu així perquè els cavalls de mar també són animals molt delicats. Només viuen en praderies de posidònia i zones arenoses.

Però la delicadesa d'aquesta singularitat potser és més comparable a la que presenta la sensitiva. Aquesta és una planta que no permet que la toquen sense canviar de forma: si algú intenta fer-ho, ella, a manera de protecció, tanca les fulles i es col·loca en una posició en què no permet que li miren l'interior.





### 19. Dullo (Poma)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$$

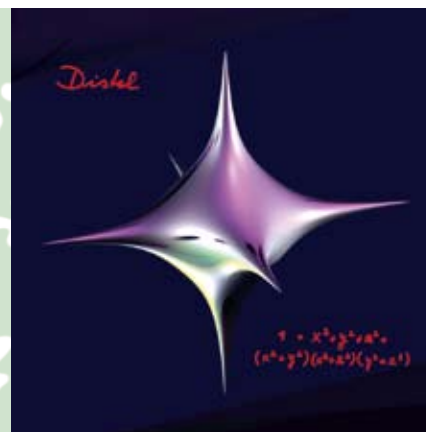
#### Fenòmens singulars a la natura

*Comprendre les singularitats per planificar*

Les matemàtiques estan molt estretament relacionades amb altres camps del coneixement, com la física, la química o la tecnologia. Proporcionen eines potents per a entendre el món que ens envolta.

Molts fenòmens que trobem estudiant la natura originen models amb singularitats, i conèixer-les ajuda a evitar-les o a planificar estratègies per a travessar-les. Així s'esdevé amb el disseny i funcionament de robots.

Un altre exemple és la propagació de les ones de so produïdes per l'ovació del públic en un estadi, que pren la forma de la superfície Poma, amb una singularitat al centre. Per aquesta raó, i per protegir-se les orelles, l'àrbitre de futbol evita posar-se al centre del camp quan se celebra un gol.



### 20. Distel (*Espurna*)

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) = 1$$

#### Formes capritxoses?

*Encaixos singulars*

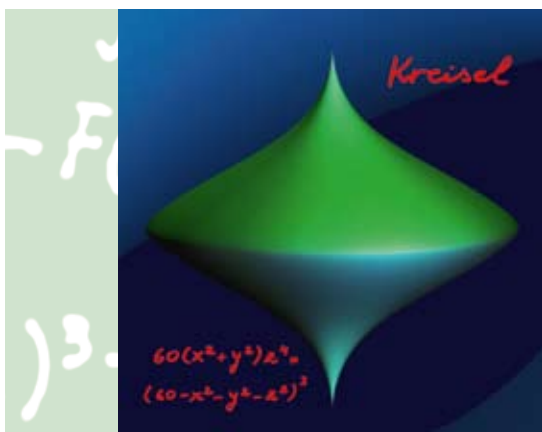
La imatge en blanc i negre sembla una fotografia d'Espurna, però en realitat és la d'un virus.

Els virus utilitzen les seues punxes, les singularitats, a manera de claus per a entrar en les cèl·lules, on es poden dividir i créixer.

Una figura és simètrica si hi ha una transformació que la deixa igual. Les simetries d'una figura es poden reconèixer per mitjà de la seua equació. En Espurna, per exemple, qualsevol permutació de les variables de l'equació dóna la mateixa equació i per tant té el mateix aspecte siga quina siga la punta que tenim davant.

Estudiant les simetries dels taulells, els matemàtics van demostrar que només hi ha 17 maneres de recobrir una superfície plana amb taulells. Totes ja es troben als murs de l'Alhambra de Granada. Aquest mateix tipus d'investigacions en tres dimensions permeten classificar els cristalls i les molècules.





## 21. Kreisel (*Giroscopi*)

$$60(x^2 + y^2)z^4 = (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3$$

### A través de l'espill

*El meu altre jo*

Una de les simetries més usades en el món literari i místic és l'especular. El nom fa referència als reflexos, per exemple en un llac o en un espill.

Giroscopi n'és un exemple.

Si a sota de la part verda hi haguera un llac, la part blava semblaria el seu reflex. Així és com funciona la simetria especular! Fixa't que en l'equació la variable  $z$  només posseeix exponents parells.

Per a molts autors, aquesta simetria ha inspirat un món on esquerra és dreta, els infants són adults i la gent rejoyeneix.

Aquesta idea ve de la propietat matemàtica de la simetria especular d'invertir l'orientació. Això ens ho explica la conversa

entre l'escriptor L. Carroll, autor d'*Alicia a través del mirall*, i una xiqueta, Alicia:

—De primer vull que em digues a quina mà tens la taronja.

—A la dreta —va contestar Alicia.

—Ara —va dir Carroll— fixa't en el mirall i digues a quina mà té la taronja la xiqueta que hi veus.

—A l'esquerra —va dir Alicia.

—I com s'explica això? —li va preguntar Carroll. La xiqueta va dubtar una estona, però a la fi va dir:

—Si em trobara a l'altre costat del mirall, la taronja la tindria encara a la mà dreta, veritat?

—Bravo, petita Alicia! —va exclamar Carroll— És la millor resposta que he rebut fins ara!



17

## 22. Diàbolo (*Diàbolo*)

$$x^2 = (y^2 + z^2)^2$$

### La revolució de la revolució

*Les superfícies del terrissaire*

La porció de la dreta de Diàbolo és simètrica de la porció esquerra.

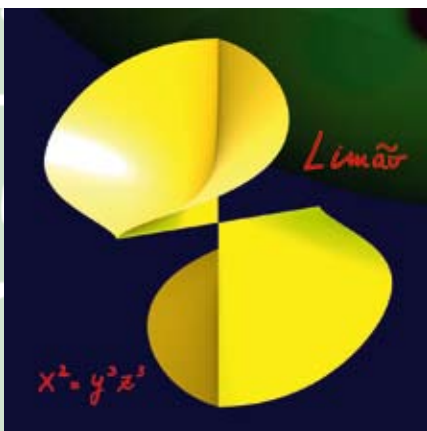
A més a més, sembla que cada porció s'haja obtingut usant un torn de ceràmica, fent girar una corba parabòlica. Les superfícies que s'obtenen fent girar una corba s'anomenen superfícies de revolució, i la corba que hem fet girar es diu generatriu.

Això mateix li passa al volcà Rangitoto, situat a Auckland, Nova Zelanda, a uns 19.000 km d'ací: per moltes voltes que faces entorn seu, el paisatge et semblarà sempre igual.

Conec Rangitoto. La gent d'Auckland es girava per veure'l, assenyalar-lo i dir: Té una forma peculiar; siga quin siga l'angle des del qual es mire és igual; és el lloc més emblemàtic d'Auckland, el seu fenomen. L'observaven i observaven, i no el coneixien, i Grace no el coneixia, però sí que havia après a assignar-li atributs poètics; la seua uniformitat exterior amaga una sorpresa interior.

Janet Frame, *Towards another Summer*.

Cada una de les dues superfícies que formen Diàbolo amaga una sorpresa interior: és un espill parabòlic i els reflexos, els raigs de llum paral·lels a l'eix de revolució, es tallen en un punt.



### 23. Limao (*Llima*)

$$x^2 - y^2z^2 = 0$$

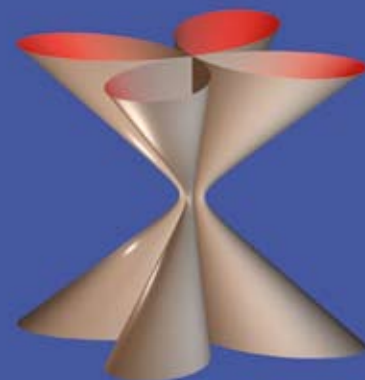
#### En el punt d'equilibri

##### *L'egocentrisme de les figures*

Una figura té simetria central quan tots els seus punts estan disposats regularment respecte d'un punt, anomenat centre de simetria: cada punt té un punt simètric en la figura a la mateixa distància del centre, en la mateixa direcció però en sentit oposat.

En Llima pots detectar fàcilment quin n'és el centre de simetria. Encara que en aquest cas el centre pertany a la figura, no sempre és així. Si el centre és l'origen de coordenades, la simetria central es descobreix fàcilment en l'equació: substituint  $(x,y,z)$  per  $(-x,-y,-z)$  ens dona la mateixa equació.

El concepte de simetria central fa referència a ordre, equilibri i al fet que hi ha un únic punt que coordina tots els altres. Per això moltes vegades s'utilitza per a simbolitzar l'origen de la vida, el centre de gravetat o dipositari de l'energia, qui és l'amo d'un conjunt de coses, etc. Pots trobar exemples d'aquestes connotacions en molts símbols religiosos.



### 24. Eistüte (*Cucurutxo*)

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2(z^2 + 1)$$

#### Seccionar per investigar

##### *Talls reveladors*

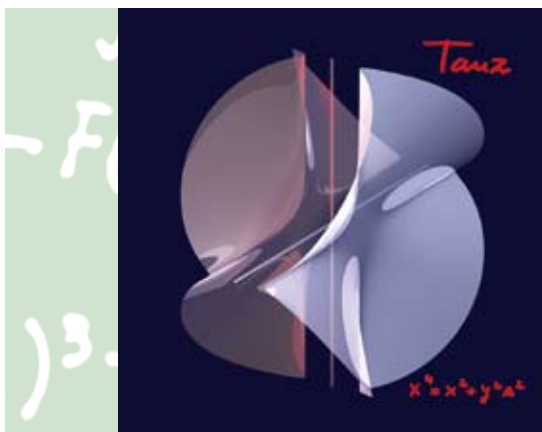
Quan volem investigar un objecte, sovint el tallem per la meitat. Una poma sencera té forma redona i color rogenc, verd o groc, però si volem saber quina forma tenen les llavors i de quin color és per dins, l'haurem de tallar per descobrir-ne l'interior.

Si vols estudiar una figura també la pots tallar i observar quina informació aporten les corbes que obtens. Per exemple, tallant una esfera per qualsevol pla obtens una circumferència. D'aquesta acció de "tallar" se'n diu seccionar.

La mateixa tècnica utilitzen els metges per a fer tomografies, seccionant el cervell per plans paral·lels.

Fixa't que la secció superior de Cucurutxo és en forma de flor. I atesa la semblança que té amb un cucurutxo, si hi poses una bola de gelat damunt, com pots saber si el gelat fos el travessarà i cauran gotes per sota?

Seccionant...



## 25. Tanz (*Dansa*)

$$x^4 - x^2 - y^2z^2 = 0$$

### Recta que et vull ben recta

#### *Superfícies reglades*

Les superfícies reglades són les que es poden generar mitjançant el moviment d'una recta que segueix un recorregut determinat.

Tot i que *Dansa* no és reglada, conté rectes. Fixa't en dues d'aquestes rectes que ixen en la figura aïllades de les restants: els eixos Y, Z. El programa SURFER no permet visualitzar rectes o corbes aïllades. Per veure la corba donada per  $f=0$  i  $g=0$ , es considera l'equació  $f^2+g^2=0$ , que té les mateixes solucions reals, i s'engrosseix un tub fi modificant un poc l'equació,  $f^2 + g^2 - a = 0$ , per a un valor petit de  $a$ .

Molts arquitectes i enginyers decideixen treballar amb superfícies reglades, no solament pel disseny, sinó també pels avantatges de la construcció: proporcionen rigidesa i faciliten l'ús del formigó.

Perquè un objecte siga altament bell cal que en la forma no hi haja res de superflu, només les condicions materials que el fan útil; cal tenir en compte el material de què es disposa i els usos que ha de prestar; i d'ací en naixerà la forma general. Quan les formes són més perfectes exigeixen menys ornamentació.

Antoni Gaudí



19

## 26. Herz (*Cor*)

$$y^2 + z^3 - z^4 - x^2z^2 = 0$$

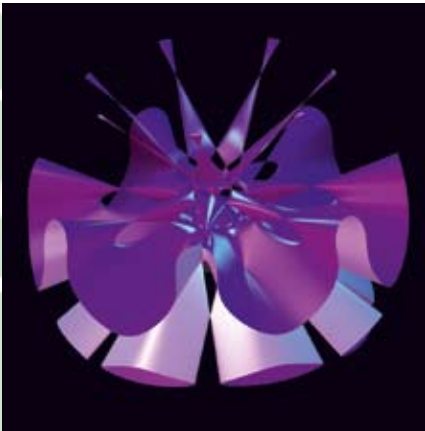
### Mirar els arbres sense deixar de veure el bosc

#### *Estudi local i global de les superfícies*

Has vist el pingüi i la tulipa que alguns visitants com tu han dibuixat amb SURFER? Per a aconseguir-ho han hagut de multiplicar diverses equacions, ja que determinar tots els detalls d'una superfície algebraica amb una sola equació, com en *Cor*, és molt difícil. La unió del "local", el detall, de tots els punts forma el "global", la forma, de la superfície.

Aspectes globals d'una superfície són per exemple el grau, el tipus de corbes de les seccions, o saber com està construïda. Aquest és el cas del teorema egregium de Gauss, que afirma que no es pot construir una esfera amb un full de paper sense arrugar-lo o esquinçar-lo.

En canvi, aspectes locals d'una superfície són per exemple saber si hi ha una singularitat en un punt o si el contacte d'una superfície amb una altra al voltant d'un punt és intens o més aviat superficial.



## 27. La sèptica de Labs

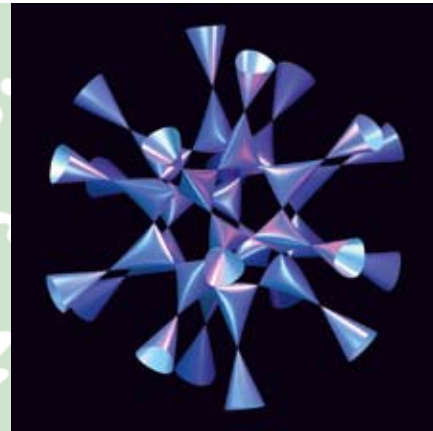
### Les matemàtiques són reptes

#### *Problema obert*

Imagines quin és el màxim nombre de singularitats que pot arribar a tenir una superfície? Segons el grau de l'equació, el nombre màxim de singularitats que es pot aconseguir és diferent.

Aquesta figura, la "sèptica de Labs", va ser construïda en 2004 per Oliver Labs. Té grau set i és important perquè el seu nombre de singularitats, 99, és el més pròxim al màxim possible conegut fins avui.

En efecte, l'any 1982 A. N. Varchenko va demostrar que no es poden obtenir superfícies de grau set amb més de 104 singularitats i, fins ara, ningú ha arribat més lluny que Labs. Per això la construcció de sèptiques amb 100, 101, 102, 103 o 104 singularitats continua sent un problema obert.



## 28. La sèxtica de Barth

### Els Guinness de les singularitats

#### *Rècord per sorpresa*

La sèxtica de Barth és una superfície de grau sis construïda en 1996 per Wolf Barth. És remarcable perquè conté el màxim nombre de singularitats que pot haver-hi en un polinomi de grau sis, 65. Però això no es va demostrar fins a 1997! Per a molts geomètres va significar una gran sorpresa, perquè es pensaven que el màxim era 64.

Hi ha diferents famílies de superfícies amb la propietat de ser un polinomi de grau sis i tenir 65 singularitats. Però la sèxtica de Barth destaca per la seua simetria en forma d'icosaedre.

La forma de la sèxtica de Barth recorda la d'una molècula anomenada ful·lerè. Aquesta molècula és la tercera forma més estable del carboni, junt amb el grafit i el diamant, i s'anomena així en memòria de Buckminster Fuller, el primer matematicoarquitecte a "imaginar" aquesta forma.



### 29. Miau

$$x^2yz + x^2z^2 + 2y^3z + 3y^3 = 0$$

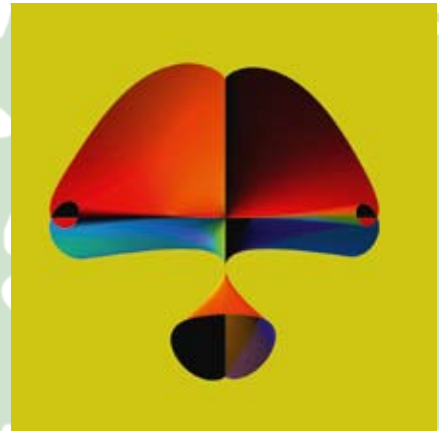
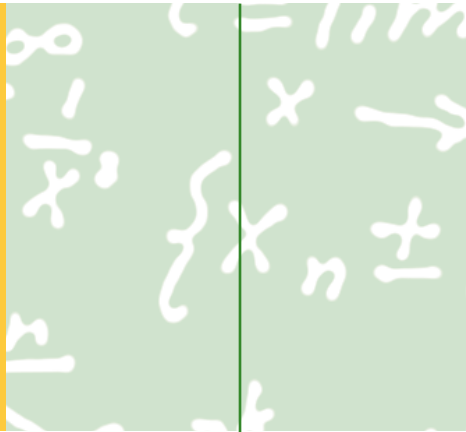
#### Tantes superfícies com forats

*Són buits, però són importants*

En Miau hi ha un enorme forat doble al centre, a través del qual en veiem una de les singularitats. Pot semblar que els forats, com que són buits, no tenen gens d'importància, però de fet ens ajuden a conèixer millor la superfície.

En el cas de superfícies llises fitades i d'una sola peça, el nombre de forats, com el del dònut, fins i tot les classifica. Això és així en l'àmbit de la topologia, on es permet deformar elàsticament la superfície, però no esquinçar-la, enganxar-la o estrangular-la. Així, la superfície d'una tassa de cafè és la mateixa que la d'una rosquilla!

Els forats també tenen importància en altres casos. Segons que hi haja bombolles –forats– o no n'hi haja a la cambra magmàtica d'un volcà, l'erupció podrà ser explosiva o només efusiva. El mateix passa amb les bombolles de gas que alliberen els bacteris de la fermentació del formatge Emmental: produeixen un formatge ple de forats.



### 30. Geisha

$$x^2yz + x^2z^2 = y^3z + y^3$$

#### Transforma la imaginació en equacions

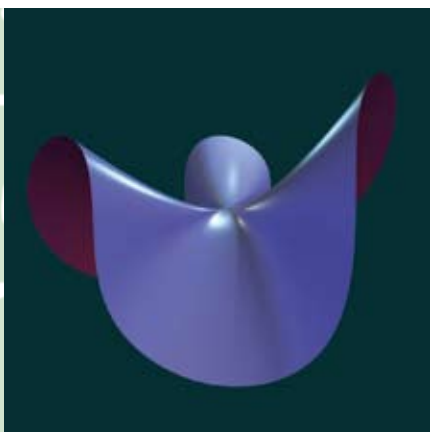
*Art matemàtic*

Moltes vegades no és fàcil descobrir les simetries, proporcions, raons àuries... que s'amaguen darrere d'una obra d'art. Això no obstant, hi ha corrents matemàtics que busquen l'art de les matemàtiques, i no l'art amb les matemàtiques.

N'és un exemple l'"art matemàtic", en què els autors fan servir les matemàtiques en les seues obres com un mitjà mateix, sense donar peu a la casualitat, i nombroses vegades juguen amb paradoxes impossibles, com Maurits C. Escher. Un altre artista destacat és Jared Tarbell.

Sabies que les obres les realitza amb clics, amb el ratolí, i estan basades en equacions i logaritmes?

I no ho oblidis: tu tens l'última paraula per a decidir si una obra et sembla bella. Si, com fèiem referència al començament de l'exposició, cada persona reconeix objectes diferents en veure la mateixa forma, encara és més subjectiu reconèixer la bellesa en allò que observem.



### 31. Schneeflocke (*Volva de Neu*)

$$x^3 + y^2 z^3 + y z^4 = 0$$

#### Els equacions poden ser belles

*Buscar la mateixa bellesa de diferents maneres*

Segurament, tenim més ganes de dibuixar quan hem vist alguna cosa que ens sembla bella. A vegades és difícil que el dibuix ens deixi satisfets, perquè ja no és tan bell com allò que hem vist. I és que la bellesa sap ocultar-se molt bé!

En matemàtiques, a la nostra manera, també busquem la bellesa allà on s'amaga. I resulta que un d'aquests llocs són les equacions. A vegades per a trobar una equació que produísca una superfície bella cal buscar molt, assajant amb equacions

semblants i entenent quin efecte té cada part de la equació en el dibuix.

Això passa també amb els fotògrafs, que fan milers de captures abans de tenir un bon enfocament, i amb els pintors, que a vegades omplien un museu amb assajos abans de començar el quadre definitiu. Pintors, fotògrafs, matemàtics... tots fan el mateix de diferents maneres.

## LA GEOMETRIA DE LES SUPERFÍCIES "SUAUS"

## Superfícies regulars

Una superfície és un objecte geomètric de dimensió 2 (amb dos graus de llibertat). S'hi pot pensar com un element pla que es deforma per dotar-la d'una determinada configuració. Alguns exemples són el pla, el cilindre, l'esfera, el tor (així s'anomena en matemàtiques la superfície del flotador), l'el·lipsoide (el baló de rugbi)... Aquests exemples són superfícies "suaus" (en matemàtiques, regulars), en particular, sense vores ni pics.

La geometria diferencial és la branca de les matemàtiques que estudia les superfícies regulars (i també els espais geomètrics de qualsevol dimensió) i aplica aquest estudi en altres parts de les matemàtiques i en altres ciències.

Les seues eines bàsiques són el càlcul diferencial i integral, l'àlgebra lineal i, per descomptat, la geometria.

Groucho: Quina forma té la Terra?

Harpo: Doncs no ho sé.

Groucho: Vejam, quina forma tenen els meus botons de puny?

Harpo: Quadrada.

Groucho: No, els de cada dia no; els que em pose els diumenges.

Harpo: Ah, redona.

Groucho: Molt bé, i ara: quina forma té la Terra?

Harpo: Quadrada entre setmana i redona els diumenges.

Els Germans Marx, *Fun in High Skule* (1910)

## La curvatura

Un element important en l'estudi de les superfícies regulars és la curvatura, és a dir, la forma en què les superfícies es corben en l'espai.

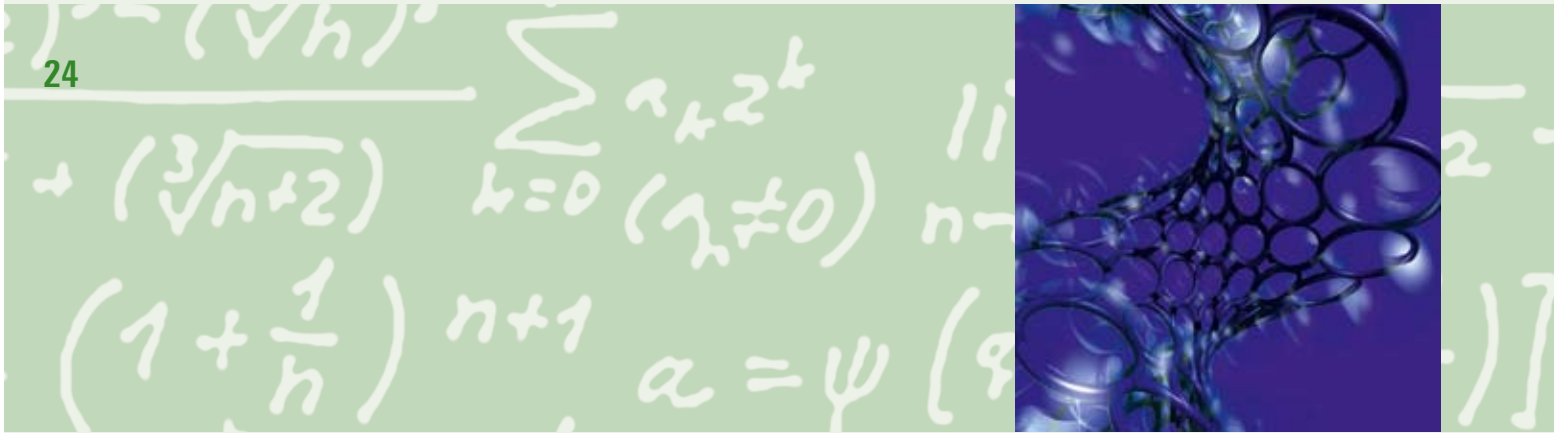
En el segle XIX, els matemàtics van descobrir que es podien definir dues curvatures, que conjuntament mesuraven com es corben les superfícies, les conegudes com a "curvatura de Gauss"  $K$  i "curvatura mitjana"  $H$ . El matemàtic alemany Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va demostrar que la curvatura que porta el seu nom mesura la curvatura intrínseca de la superfície (és a dir, la curvatura que un habitant seu pot percebre des de dins, sense mirar a l'espai exterior).

Tanmateix, la curvatura mitjana és extrínseca, ofereix una mesura de la relació de la superfície amb l'espai exterior. Així, l'ondulació que percebem en mirar una superfície és donada per ambdues curvatures. Per exemple, en una superfície de curvatura mitjana nul·la,  $H=0$ , és conseqüència de la curvatura interna.

*Després d'això, modestament vaig presentar la solució que havíem trobat per al sorprenent problema que la suma dels tres angles d'un triangle en el nostre espai superava els 180°. ... si ho entenc bé, el nostre espai és corbat, corbat del tot... una superfície esfèrica de dues dimensions.*

Dionys Burger, *Esferalàndia* (1965).





## Superfícies no orientables

De forma intuïtiva, l'orientabilitat d'una superfície es pot veure segons que aquesta tinga una cara o dues. Si s'enganxen els extrems d'una cinta allargada (per exemple de paper) s'obté una banda normal. És una superfície que té dues cares, l'exterior i la interior, com la majoria de les superfícies, i per tant és orientable.

Tot i així, si abans d'enganxar els extrems es fa mitja volta a un extrem s'obté una banda de Möbius (figura), que és una superfície no orientable (només té una cara) i no tancada (que té vora). Per a comprovar que només té una cara es pot recórrer la banda de paper amb un llapis i quan es torne al punt inicial es comprovarà que s'ha recorregut la banda sencera.

Dos exemples de superfícies no orientables tancades (sense vora) són el pla projectiu i la botella de Klein (la figura és una representació d'aquesta superfície en l'espai tridimensional).

*Desitjós d'atraure la seua atenció, m'havia proposat alçar en dos temps una barra equivalent en pes a un parell de Steinways, però de sobte la columna vertebral em va adoptar la forma d'una banda de Möbius, i bona part del cartílag es va separar audiblement.*

Woody Allen, *Pura anarquia* (2007)

## 32. Superfícies minimalis

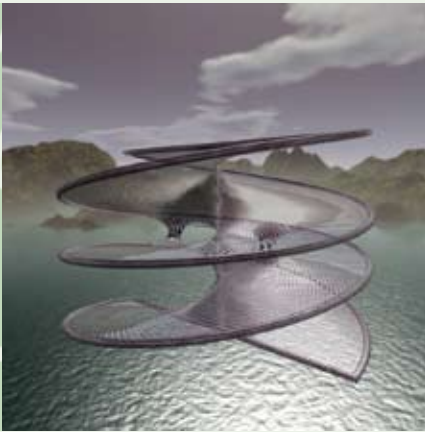
### Pel·lícules de sabó

Si s'introdueix un filferro corbat i tancat en un líquid sabonós, en traure'l s'obté una pel·lícula. A causa de la tensió superficial del líquid, aquesta pel·lícula és una superfície en equilibri, la qual cosa implica també que és una superfície d'àrea mínima, entre les que tenen la mateixa vora (el filferro). Geomètricament, aquesta propietat és equivalent al fet que la curvatura mitjana  $H$  siga nul·la. Les superfícies amb aquesta propietat s'anomenen superfícies minimalis.

Primers exemples: l'helicoide (escala de caragol) i el catenoide (superfície de revolució de la catenària). A més, aquestes poden ser deformades l'una en l'altra mitjançant una família de superfícies que continuen sent minimalis.

En aquesta imatge (del matemàtic Tim Hoffman) es mostra la discretització d'una superfície minimal intermèdia d'aquesta família. La representació o el dibuix de superfícies "suau" utilitzant cercles o discos plans (discretització) és una eina potent en visualització, arquitectura i disseny.





### 33. Helicoide

#### ... amb anses

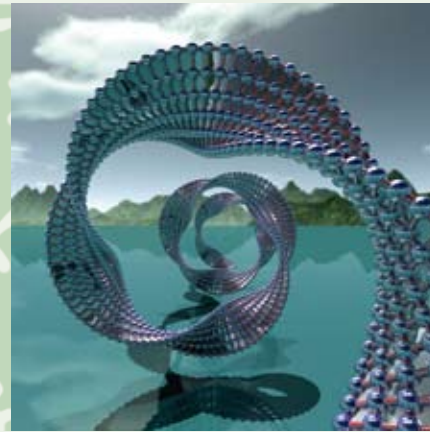
L'helicoide és la superfície formada per les infinites rectes que uneixen els punts d'una hèlice circular amb els punts de l'eix central i són perpendiculars a aquest eix.

És molt habitual en la nostra vida: escales de caragol, femelles, caragols, mòbils de vent o els "caragols d'Arquimedes".

Aquest mecanisme, format per un helicoide que gira dins d'un cilindre, s'ha fet servir des de l'antiguitat per a dissenyar màquines destinades a desplaçar líquids (pujar aigua a un nivell més alt) i sòlids (arena, farina, cereals o cremes). Aquesta forma s'ha usat profusament en arquitectura.

Es pot obtenir com una pel·lícula sabonosa amb un filferro format per una hèlice tancada en unir-la al seu eix. Aquesta imatge, disseny d'Ulrich Pinkall, mostra un helicoide en què s'ha aconseguit connectar els diferents nivells sense trencar la minimalitat de la superfície, ni provocar que la nova superfície es talle a si mateixa.

La peça de connexió s'anomena, en matemàtiques, "ansa" i segons on es trobe semblarà un forat al terra o al sostre, o una columna que connecta els diversos nivells.



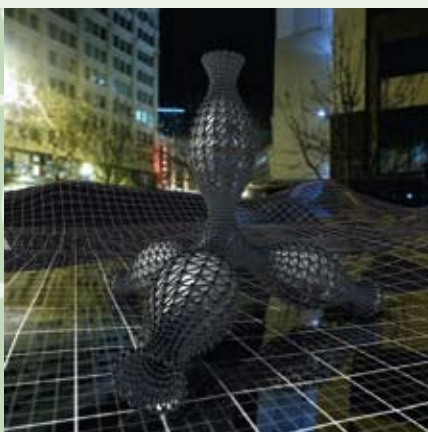
### 34. Superfície de Björling

#### Explorant nous territoris

Les superfícies minimals són un model geomètric per a les pel·lícules de sabó i es caracteritzen perquè tenen curvatura mitjana  $H$  nul·la en tot punt de la superfície. Aquesta família de superfícies és un camp actiu d'investigació dins la geometria diferencial, amb moltes aplicacions industrials i tecnològiques, i fins i tot artístiques.

Un problema obert és la construcció de nous exemples de superfícies minimals, com també l'obtenció de noves tècniques per a generar-los. L'any 1844 el matemàtic suec E. G. Björling va demostrar que per a cada corba bombada espacial, suficientment bona, es podria construir una banda de superfície minimal al voltant de la corba.

La superfície mostrada ací (disseny d'Ulrich Pinkall fent ús del programa jReality, a partir de les fórmules matemàtiques de Mathias Weber) és una superfície minimal de Björling generada a partir d'una hèlice.



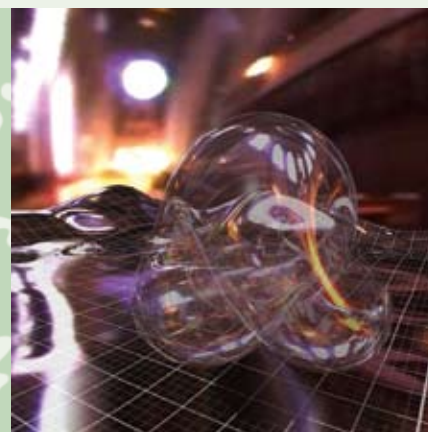
## 35. Tetraoide

### Bombolles de sabó

El tetraoide pertany a la família de les superfícies amb curvatura mitjana  $H$  constant, que són el model geomètric de les bombolles de sabó. Igual que les superfícies minimal, són superfícies en posició d'equilibri, però ara la pressió a un costat i a l'altre no és necessàriament igual (per exemple, una gota d'oli en aigua). De la mateixa manera, aquestes superfícies són d'àrea mínima, però entre "les que tanquen un mateix volum".

L'exemple per antonomàsia de superfície amb curvatura mitjana constant és l'esfera (la forma estable de la bombolla de sabó). Un altre exemple és la superfície d'una gota de líquid sobre una superfície plana, que en equilibri tindrà curvatura mitjana constant. L'estudi d'aquestes superfícies (minimal i de curvatura mitjana constant) és important en camps en què hi haja contacte entre dos medis (en microbiologia, mescla o separació de substàncies, prospeccions petrolíferes...).

El tetraoide és un nou exemple de superfície de curvatura mitjana constant, que ha estat construït per tenir simetria basada en el tetraedre (la piràmide de base triangular).



## 36. Superfície de Boy

### Ombres des de la 4D

L'exemple per antonomàsia de superfície no orientable tancada (sense vora) és l'anomenat pla projectiu. Aquest sorgeix, amb la geometria projectiva, en el Renaixement, en l'estudi de la perspectiva en pintura, i es pot pensar com l'espai de totes les direccions en què els raigs paral·lels de llum poden crear ombres. El pla projectiu és una superfície molt important en matemàtiques, però difícil d'imaginar, ja que només es pot visualitzar en la quarta dimensió (4D).

La superfície de Boy és un model en el nostre espai tridimensional del pla projectiu, que es genera enganxant, a través de les seues vores, un disc i una banda de Möbius. La superfície de Boy es talla a si mateixa, però és suau en cada un dels punts. La versió que es mostra ací es caracteritza perquè té una curvatura mitjana  $H$  tan petita com ha estat possible, és a dir, "no té protuberàncies innecessàries", cosa que en realça la bellesa.



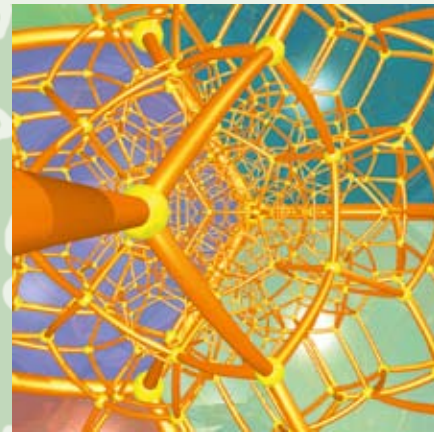
## 37. Projectió estereogràfica

### L'art de la cartografia

Durant segles, cartògrafs i matemàtics han buscat la manera de projectar la superfície terrestre sobre un pla per obtenir mapes correctes. És a dir, mapes sobre els quals es puga mesurar correctament la longitud d'un riu, la distància entre dues ciutats, l'abast d'un míssil, la superfície d'un bosc o el rumb de viatge en navegació marítima o aèria.

Malauradament, això no és possible: la curvatura de Gauss  $K$  de l'esfera és una constant positiva, la del pla és nul·la i, malgrat això,  $K$  s'ha de preservar per transformacions "isomètriques" (les que generen mapes correctes). Així, si s'intenta aplanar la meitat d'una pilota de goma, aquesta es deformarà i esquinçarà, i se'n modificaran les distàncies, la geometria interna de l'esfera. En conclusió, tots els mapes són fal·laços en algun sentit.

La transformació mostrada en la imatge (una entre centenars de les imatges existents) és la projectió estereogràfica, que projecta els punts de la superfície terrestre des del pol nord sobre un pla tangent al pol sud. Aquesta preserva els rumbos i transforma els meridians en rectes que passen pel pol sud i els paral·lels, en circumferències concèntriques.



27

## 38. La 120 cel·la

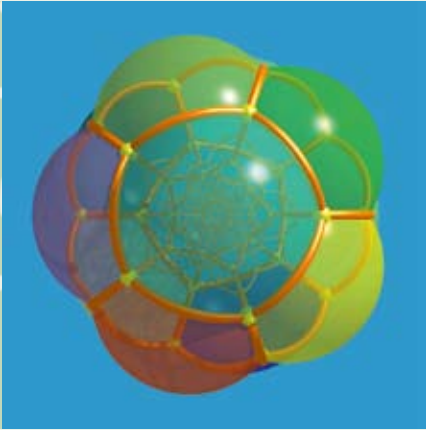
### 4D en 3D

La 120 cel·la és un polítop regular en dimensió quatre. La 120 cel·la està formada per 120 dodecaedres iguals adossats per les cares (720 pentàgons). Té 600 vèrtexs i 1.200 costats.

Aquest polítop és, en dimensió quatre, l'anàleg al dodecaedre en dimensió tres, que té 12 pentàgons regulars iguals adossats pels costats. Té 20 vèrtexs i 30 costats.

El dodecaedre el podem veure projectat en l'esfera  $S^2$  (recordeu un baló de futbol), o mitjançant projectió estereogràfica en un pla, com en la figura.

Les imatges d'aquest panell i del següent mostren diferents punts de vista de la representació de la 120 cel·la (continguda en l'esfera  $S^3$ ) en l'espai tridimensional usual. Aquesta imatge és la seua projectió estereogràfica. S'observa que els dodecaedres estan corbats de manera que els pentàgons són trossos d'esferes i les arestes, trossos de circumferències.



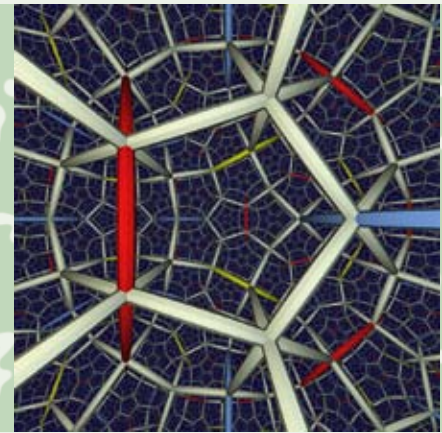
### 39. Una altra perspectiva

#### Futbol en 4D

En la imatge, la 120 cel·la s'ha projectat primerament des del centre sobre l'esfera  $S^3$  que la circumscriu (que podria ser, per analogia amb la figura del text anterior, el baló de futbol dels habitants de la quarta dimensió), i després se n'ha pres l'ombra en l'espai il·luminant-lo des d'un punt situat a certa distància, en direcció perpendicular, del centre d'una de les 'cares'. La 'cara' més pròxima al punt d'il·luminació queda visualitzada com el dodecaedre exterior. La 'cara' oposada correspon al dodecaedre més petit al centre de la imatge.

Com en la imatge anterior, els dodecaedres estan corbats de manera que els pentàgons són trossos d'esferes i les arestes, trossos de circumferències.

La il·lustració mostra com seria l'ombra de la 120 cel·la il·luminant-la directament (sense projectar abans sobre l'esfera) des d'un punt situat perpendicularment sobre el centre d'una de les 'cares'.



### 40. Possibilitats hiperbòliques

#### On es pot recobrir l'espai amb dodecaedres

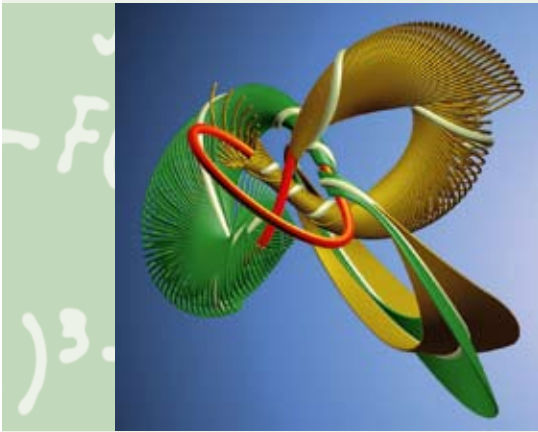
L'espai euclidià ordinari no es pot recobrir (la paraula usada pels matemàtics és tessellar) amb dodecaedres regulars.

Per les mateixes raons, és impossible que un pla euclidià es pugui tessellar amb triangles, quadrats i hexàgons regulars, però no amb pentàgons regulars (l'angle interior en un vèrtex del pentàgon regular és  $108^\circ$ , que no divideix  $360^\circ$ ).

Però hi ha plans i espais anomenats hiperbòlics que es poden tessellar amb pentàgons i dodecaedres regulars, respectivament.

Això és possible perquè aquests espais tenen 'curvatura', cosa que comporta, per exemple, que hi ha pentàgons regulars els angles interiors dels quals són rectes, i aquests pentàgons 's'enganxen' tan bé en el pla hiperbòlic com els quadrats en el pla euclidià.

La figura representa la tessellació amb dodecaedres regulars de l'espai hiperbòlic, que 's'enganxen' tan bé com els cubs en l'espai euclidià.



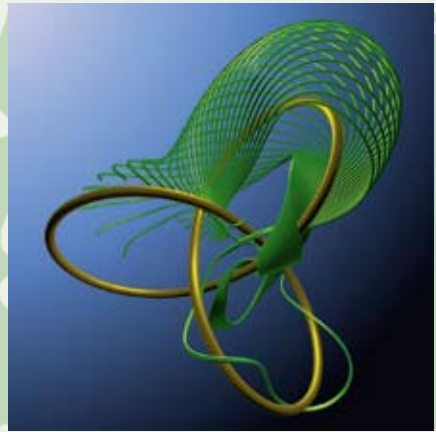
## 41. Connexions inesperades

### Pot l'aritmètica prescindir dels sistemes dinàmics?

L'aritmètica estudia els nombres, la geometria i la topologia estudien les formes, la dinàmica estudia el moviment, el canvi de les configuracions amb el pas del temps.

Una descripció d'aquest estil podria fer pensar que les fronteres entre aquests dominis estan ben definides i que entre l'un i l'altre hi ha poca interacció. Això no obstant, de fet es constata tot al contrari, és a dir, entre els diferents dominis de les matemàtiques hi ha profundes interconnexions.

La imatge il·lustra un cas eloqüent. Aquesta topologia embullada és una visualització d'un flux d'Anosov. Més concretament, és el flux d'un dels sistemes dinàmics 'modulars', que resulten fonamentals per a l'estudi dels nombres enters, i en particular dels nombres primers.



## 42. Filant més prim

### Matemàtica... no n'hi ha més que una!

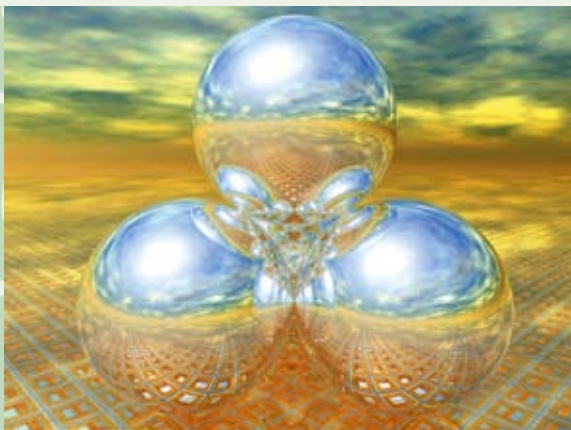
Una altra imatge bella d'un flux modular relacionat amb el nus Trèvol. Per a una introducció als sistemes dinàmics modulars i la seua relació amb la teoria de les corbes el·líptiques i la teoria de nombres, es pot consultar el magnífic article [+].

El seu subtítol, A tangled tale linking lattices, knots, templates, and strange attractors . . . [Una història en què s'entrellacen reticles, nusos, plantilles i atractors estranys...] apunta al fet, com una més entre mostres inenarrables, que en la 'realitat matemàtica' tot està íntimament interconnectat, i que en gran manera l'ofici matemàtic, per no dir-ne art, té per objectiu posar de manifest noves connexions, nous camins que uneixen inesperadament els conceptes.

[+] Étienne Ghys, Jos Leys: Lorenz and Modular Flows: A Visual Introduction.

Monthly Essays on Mathematical Topics, American Mathematical Society, 2006.





### 43. Conques de Wada

#### ... o les esferes del Guggenheim

Aquesta bella imatge, creada per Richard Palais i Luc Benard, és una reproducció a l'ordinador dels resultats de certs experiments de "dispersió caòtica". Aquesta consisteix en la iteració d'una partícula amb un sistema que es dispersa i el seu estudi té aplicacions en dinàmica de fluids, cosmologia, termodinàmica, mecànica celeste i física de partícules.

La configuració bàsica està composta per quatre boles idèntiques i molt reflectants col·locades formant un tetraedre i de manera que cada bola toque les altres tres, és a dir, a la manera en què el fruiter col·loca les taronges. Si es mira en el buit entre tres boles, les imatges reflectides que es veuen formen un fractal tridimensional. Aquest experiment es pot efectuar a casa amb quatre boles de Nadal reflectants.

L'obra "El gran arbre i l'ull" (2009) de l'escultor Anish Kapoor, que es troba a l'exterior del Museu Guggenheim de Bilbao, és una versió lliure –i amb múltiples esferes lluents que es reflecteixen les unes en les altres– de l'efecte de les conques de Wada.



### 44. Natura morta

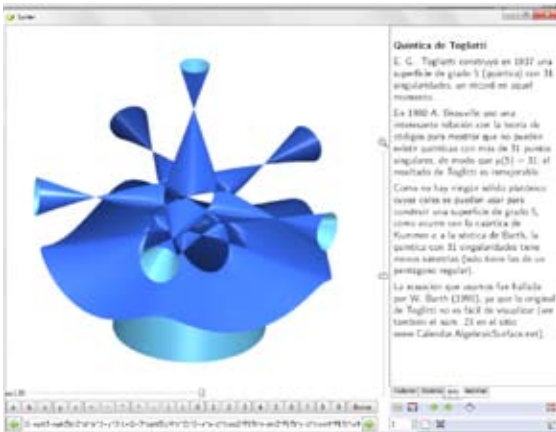
#### Cinc superfícies de vidre sobre una taula

Seguint la tradició de les "natures mortes" (bodegons) de la història de l'art, el matemàtic Richard Palais i l'artista gràfic Luc Benard han creat aquesta obra en què els objectes són superfícies matemàtiques.

Les superfícies d'aquest bodegó tenen propietats geomètriques destacables i interès històric, però han estat escollides sobretot per la seua bellesa. Són, de baix a esquerra i en el sentit de les agulles del rellotge: la botella de Klein (superfície no orientable, d'una sola cara), el 4-noide simètric (superfície minimal), la superfície pseudoesfèrica de tipus polsant (exemple de superfície amb una geometria no euclidiana, de tipus hiperbòlic,  $K < 0$ ), la superfície de Boy (superfície no orientable) i la superfície de Siervert-Enneper (exemple de superfície amb una geometria no euclidiana, de tipus el·líptic,  $K > 0$ ).

Aquesta composició va ser guardonada amb el primer premi del Concurs de Visualització en Ciència i Enginyeria de la revista *Science* i la National Science Foundation dels EUA.

## **Programes Interactius**



## Surfer Visualització de superfícies algebraiques

### Resum

SURFER és un programa de visualització de superfícies algebraiques reals, és a dir, les que es generen igualant a 0 un polinomi real en els variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Es basa en el programa SURF i va ser desenvolupat per a l'exposició IMAGINARY creada per l'Institut d'Investigació Matemàtica d'Oberwolfach per a l'Any Alemany de les Matemàtiques (2008).

#### 1. Entrada d'un polinomi

El polinomi es pot introduir en la línia de comandaments situada a la part inferior esquerra. Si SURFER interpreta que l'expressió és un polinomi en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , la superfície que representa la mostra immediatament, de primer en baixa resolució i, després d'una estona de càlcul, en alta resolució. Altrament, apareix un signe d'exclamació en roig (!) a la part dreta de la línia de comandaments.

#### 2. Rotacions

La superfície es pot girar sobre el seu centre fent lliscar sobre la pissarra el tou d'un dit (és com arrossegat amb el ratolí, amb el botó dret pulsat, quan el control es fa des de l'ordinador). Durant la rotació, la superfície es mostra en baixa resolució i després, al cap d'uns instants de càlcul, en alta resolució.

#### 3. Lupa

Surfer només mostra la part de la superfície continguda en una esfera invisible. El radi d'aquesta esfera es pot canviar amb el cursor de la lupa (part dreta de la finestra en què es mostren les superfícies). Com que la grandària d'aquesta esfera en la finestra és sempre la mateixa, l'efecte és acostar o allunyar la superfície.

#### 4. Paràmetres

Els paràmetres  $a$  i  $b$  es poden usar en la línia de comandaments. En aquest cas, apareix un cursor per a cada un que permet canviar el seu valor entre 0 i 1. També es poden usar els paràmetres  $c$  (entre 0 i 1) i  $d$  (entre 1 i 10).

#### 5. Colors

La pestanya "Colors" permet triar un color per a cada una de les dues cares de la superfície.



## 6. Galeries i informació

La pestanya "Galeria" permet accedir a 88 superfícies agrupades en cinc sèries. Per a tres de les sèries, les superfícies van acompanyades d'informació addicional, accessible mitjançant l'opció "Informació", que d'altra banda és l'opció per defecte. Les dues petites fletxes verdes serveixen per a mostrar les superfícies següent o anterior, respectivament, de la sèrie seleccionada.

## 7. Pantalla completa

La icona a la dreta de les fletxes verdes permet passar del mode normal al de pantalla completa, i viceversa.

## 8. Guardar imatges

La icona a l'esquerra de les fletxes verdes permet guardar la superfície com una imatge en format .png o .pic, que es pot recarregar mitjançant la icona que hi ha a l'esquerra de "Guardar". El format .png s'usa per a enviar imatges al concurs IMAGINARY (per a més detalls, vegeu la pàgina web [rsme-imaginary.es](http://rsme-imaginary.es)).

## 9. Temes avançats

Unes quantes superfícies: L'equació  $f \cdot g = 0$  representa la unió de les superfícies  $f=0$  i  $g=0$ . Per exemple,  $x^2(x^2+y^2+z^2-1)=0$  és la unió del pla  $x=0$  amb l'esfera  $x^2+y^2+z^2-1=0$  i la seua visualització és com Saturn amb un anell. Els punts de la corba intersecció ( $f=0$  i  $g=0$ ) són singularitats de la superfície unió.

**Allisament:** Si  $f=0$  representa una superfície i  $a$  és una constant no nul·la, la superfície  $f-a=0$  és generalment llisa. Per exemple, si la unió de dues superfícies donada pel producte  $f \cdot g$  es modifica en  $f \cdot g - a$ , la corba de singularitats de la unió,  $f=g=0$ , desapareix i les dues superfícies  $f=0$  i  $g=0$  es fonen en una sola peça.

**Intersecció de dues superfícies:** Si  $f=0$  i  $g=0$  són les fórmules de dues superfícies, aleshores la fórmula  $f^2+g^2=0$  dona la corba intersecció, ja que sobre els nombres reals equival a  $f=g=0$ . Però aquesta corba no la pot mostrar Surfer, perquè és unidimensional. Un truc per a fer-la visible és considerar la superfície  $f^2+g^2-a=0$ , per a un valor petit de  $a$ , perquè aquesta operació eixampla la corba en una superfície tubular.

## 10. Descàrrega i instal·lació

El programa SURFER es pot descarregar gratuïtament de la web [www.rsme-imaginary.es/surfer](http://www.rsme-imaginary.es/surfer) i es pot usar per a fins educatius o de treball personal.

### Equipo SURFER

Direcció: Gert-Martin Greuel

Programació: Henning Meyer (versió Linux, Surf) i Christian Stussak (conversió Windows, versió Java, Surf)

Concepte/galeries: Oliver Labs

Galeries: Herwig Hauser

Suport: Felix Riemann

Concepte/coordinació: Andreas Matt

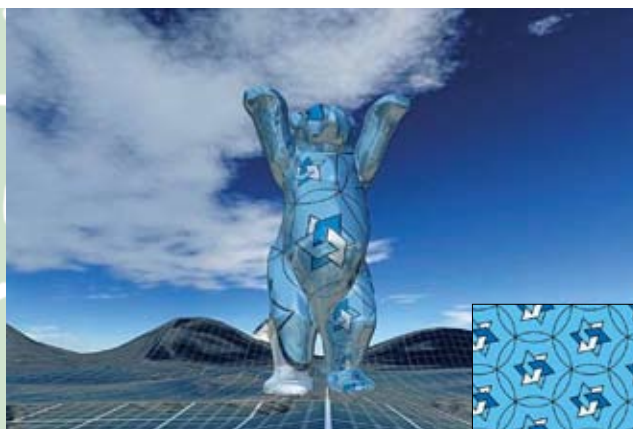
SURFER està basat en el programa SURF de Stephan

Endrass i altres ([surf.sourceforge.net](http://surf.sourceforge.net))

Un projecte de l'Institut d'Investigació Matemàtica d'Oberwolfach i la Universitat Tècnica de Kaiserslautern, 2008-2010

### Adaptació a l'espanyol

Promoguda per la Real Sociedad Matemática Española, en ocasió de la celebració del seu centenari, ha estat realitzada per Sebastià Xambó, amb la col·laboració d'Ignacio Ojeda i Félix Delgado.



### L'ós Matheon

L'escultura de L'ós Matheon es troba davant l'edifici del Centre d'Investigació Matemàtica Matheon a Berlín. L'ós és interessant des d'un punt de vista matemàtic pel patró pintat a sobre. Un patró periòdic de circumferències i logotips de l'Institut formen el pla base i el repte matemàtic va consistir a aplicar-lo sobre la superfície de l'ós de manera que la distorsió de les formes fóra mínima. Els angles en el patró són els mateixos que els angles corresponents en l'ós (una transformació d'aquest tipus rep el nom de "conforme"), i això implica geomètricament una deformació petita en les formes.

### Superfície de Boy

La superfície de Boy es genera enganxant, a través de les seues vores, un disc i una banda de Möbius. Aquesta superfície, introduïda per W. Boy l'any 1903, és un model en el nostre espai tridimensional d'una superfície no orientable tancada important en matemàtiques: el pla projectiu. La superfície de Boy es talla a si mateixa, però és suau en cada punt. La versió que es mostra ací es caracteritza perquè té una curvatura mitjana mínima, és a dir, "no té protuberàncies innecessàries". Per tant, és la més "bella" realització possible des d'un punt de vista matemàtic.

### Superfície minimal de Schwarz

Va ser trobada per Hermann Schwarz en el segle XIX i, afegint-ne còpies de forma periòdica, s'estén per les tres direccions de l'espai, i fins i tot el divideix en dues meitats iguals. La versió que veiem ací no és, estrictament parlant, una superfície diferenciable (suau), sinó que es compon de molts discos circulars en contacte d'una forma determinada. Aquestes "discretitzacions" de superfícies diferenciables han tingut recentment un paper important en l'arquitectura per a crear superfícies corbes amb elements plans.

### Lloc de superfícies minimals

L'art de crear superfícies minimals consisteix a construir-les de manera que, sense tenir vora, s'estenguen cap a l'infinit, però sense tallar-se. La superfície d'Enneper mostrada ací pot ser continuada indefinidament però, si es fa, de seguida es produeixen autointerseccions. En aquest sentit, aquesta superfície es podria eliminar del taller d'un constructor de superfícies minimals, però de tota manera és bella. Podem pensar en la superfície d'Enneper com un disc doblegat fins a prendre forma de sella de muntar i de manera que siga una superfície minimal.

## J Reality

### Mons matemàtics virtuals

### Tor de Willmore

Les pel·lícules de sabó oposen resistència a ser estirades, però es dobleguen sense gens d'esforç. Les superfícies de Willmore, en canvi, no oposen resistència si se les estira, però produeixen una força elàstica contrària a la flexió. Són un model matemàtic per a les membranes fluides (presentes en camps tan variats com les indústries química i farmacològica, la petrolífera, la cosmètica, la medicina, etc.) i les vesícules (cèl·lules animals, glòbuls rojos...). La imatge és d'una porció d'un tor amb la propietat de Willmore (trobat per Matthias Heil usant resultats de Babich i Babenko).

### Tetranoid

El Tetranoid pertany a la classe de superfícies amb una curvatura de les mateixes característiques que presenten les bombolles de sabó. En terminologia matemàtica es diu que el Tetranoid és una superfície de curvatura mitjana constant (la curvatura mitjana quantifica la relació de la superfície amb l'espai exterior). Les quatre "potes" del Tetranoid, en realitat, continuen fins a l'infinit. L'existència i construcció del Tetranoid (i de superfícies semblants amb simetria arbitrària basada en els cossos platònics), la va demostrar Nicholas Schmitt en 2007.

### Helicoides amb anses

Una de les superfícies minimals més conegudes és l'helicoide, fàcilment identificable perquè és la forma que tenen les escales de caragol i les rampes per a cotxes dels aparcaments. De fet, és possible connectar els diferents nivells de l'helicoide l'un amb l'altre sense trencar la minimalitat de la superfície, ni provocar que la nova superfície es talle a si mateixa. En terminologia matemàtica, aquesta peça de connexió s'anomena "ansa". Depenent d'on es trobe, l'ansa s'assemblarà a un forat al terra o al sostre, o a una columna que connecta els diferents nivells.

### Orientació i control

Explorar les figures per buscar-hi punts particulars com cantons, interseccions, cavitats o forats. Fins es poden llançar petites pilotes a les figures!

Els botons permeten intercanviar les figures i llançar pilotes.

Moure avant/arrere Moure lateralment Girar esquerra/dreta Veure dalt/baix Saltar/volar

**Concepte i disseny:** Ulrich Pinkall / Steffen Weissmann

**Creació:** www.jreality.de

**Traducció i adaptació:** Raúl Ibáñez / Sebastià Xambó

## Morenaments generació de mosaics plans

**Classificació de mosaics en el pla.** Hi ha exactament 17 formes diferents de construir mosaics plans, cada una de les quals correspon a un grup de simetries o de moviments del pla. En la taula es mostra un exemple de cada grup, la seua notació cristal·logràfica i les característiques que presenta.

**Àrea de dibuix.** El dibuix que realitzeu en qualsevol part de l'àrea gràfica de la pantalla interactiva es repetirà per crear un mosaic que depèn del grup seleccionat. Experimenta canviant el grup i els colors dels elements. L'autor de Morenaments és Martin von Gagern (<http://www.morenaments.de/>).

**p1.** Conté només translacions. No hi ha ni reflexions ni rotacions. Els dos eixos de translació poden formar qualsevol angle.

**pg.** Conté reflexions amb lliscament. La direcció d'aquesta reflexió amb lliscament és paral·lela a un dels eixos de translació i perpendicular a l'altre. No hi ha ni rotacions ni reflexions pures.

**pm.** Conté reflexions. Els eixos de reflexió són paral·lels a un dels eixos de translació i perpendiculars a l'altre. La xarxa és rectangular. No hi ha rotacions ni reflexions amb lliscament.

**cm.** Conté reflexions i reflexions amb lliscament amb eixos paral·lels. No hi ha rotacions. Les translacions poden formar qualsevol angle.

**p2.** Aquest grup es diferencia de p1 en el fet que conté rotacions de  $180^\circ$ , és a dir, d'ordre 2.

**pgg.** No conté reflexions, però té reflexions amb lliscament en dues direccions perpendiculars i rotacions de  $180^\circ$ . Els centres de rotació no pertanyen als eixos.

**pmg.** Conté reflexions pures i amb lliscament en eixos perpendiculars. Té rotacions d'ordre 2 en els eixos de la reflexió amb lliscament.

**pmm.** Conté reflexions pures i amb lliscament amb eixos perpendiculars, i també rotacions d'ordre 2 en els punts d'intersecció.

**cmm.** Conté eixos perpendiculars de reflexió i rotacions d'ordre 2, els centres de les quals no es troben en els eixos de reflexió.

**p3.** Conté rotacions d'ordre 3. No conté reflexions pures ni amb lliscament.

**p3m.** Conté reflexions (els eixos formen un angle de  $60^\circ$ ) i rotacions d'ordre 3. Alguns dels centres de rotació es troben en els eixos de reflexió, i altres no. Hi ha reflexions amb lliscament.

**p3m1.** Conté reflexions (els eixos formen un angle de  $60^\circ$ ) i rotacions d'ordre 3. Els centres de rotació es troben en els eixos de reflexió. Hi ha reflexions amb lliscament.

**p4.** Conté rotacions de  $90^\circ$ , és a dir, d'ordre 4, i rotacions d'ordre 2. No hi ha reflexions.

**p4g.** Conté reflexions pures i amb lliscament, i rotacions d'ordres 2 i 4. Hi ha dos eixos de reflexions pures perpendiculars que passen pels centres d'ordre 2.

**p4m.** Conté rotacions d'ordre 2 i 4. Per cada centre de rotació d'ordre 4 passen quatre eixos de reflexió. Hi ha dos eixos de reflexions amb lliscament passant per cada centre de rotació d'ordre 2.

**p6.** Conté rotacions d'ordre 2, 3 i 6. No hi ha reflexions.

**p6m.** Conté rotacions d'ordre 2, 3 i 6, i reflexions. Pels centres de rotació d'ordre 6 passen sis eixos de reflexió. Hi ha reflexions amb lliscament.

Significat dels símbols:

p=cel·la primitiva (regió mínima repetida per translacions)

m=reflexió (*mirror*)

g=reflexió amb lliscament (*glide reflection*)

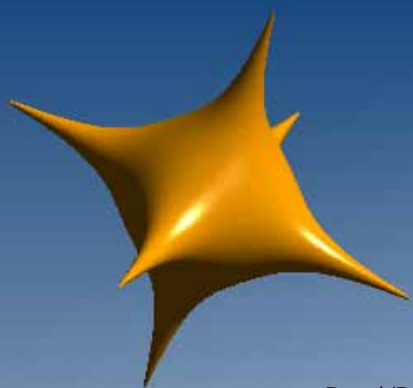
c=hi ha centre de rotació que no pertany a cap eix de reflexió

r=ordre de rotació mínima (1, 2, 3, 4 o 6)

**Textos:** M. Teresa Lozano

**Composició:** Sebastià Xambó

[www.jreality.de](http://www.jreality.de)



Distel/Destello

## Escultures Impressió 3D de superfícies algebraiques De la fórmula a l'escultura

### Els diversos llenguatges de les superfícies algebraiques i les impressores 3D

Encara que les superfícies algebraiques estan formades per una infinitat de punts, es poden descriure de forma concisa i elegant com els zeros d'un polinomi. Però una impressora 3D necessita altres dades per a produir un model, com una xarxa de petits triangles –sovint centenars de milers–, que en conjunt aproximem la superfície. Les escultures que es poden veure a la vitrina van ser obtingudes amb impressió 3D fent servir dades calculades per FORWISS (Institut de Sistemes Informàtics per a Aplicacions Tècniques del Departament de Tecnologies de la Informació de la Universitat de Passau) per a IMAGINARY.

### Més fines que una bombolla de sabó

Les escultures han de ser fitades i tancar un volum. Tanmateix, les superfícies algebraiques són infinitament primes i ben sovint s'estenen fins a l'infinit. Algunes superfícies, com Nepalès, són fitades i tanquen un volum, i això permet representar en l'ordinador la superfície que tanca aquest volum. Altres superfícies, com Vis-à-Vis/Tu i Jo, són no fitades (no tenen interior ni exterior) i, doncs, no són la superfície de cap objecte físic. La materialització d'aquestes superfícies en una escultura és una tasca força més delicada.

### La recerca (in)finita de la superfície

Per a determinar (aproximadament) els punts d'una superfície es pot usar el mètode dels cubs. L'espai es divideix en una malla de milions de petites caixes, totes iguals. Aleshores, el polinomi que dona l'equació de la superfície és avaluat als vèrtexs d'aquestes caixes. Si els valors per a una caixa donada tenen el mateix signe, l'algorítme suposa que aquesta caixa no conté punts de la superfície. En cas contrari, la caixa ha de contenir punts d'aquella i es pot construir una xarxa de triangles dins la caixa que separa els valors positius i negatius. Aquestes xarxes, en conjunt, proporcionen una bona aproximació de la superfície i es poden utilitzar per a obtenir impressions 3D d'algunes superfícies algebraiques, com Dullo, Zitrus/Llima o Kreisel/Baldafa. Però el mètode dels cubs no és apropiat per a totes les superfícies, ja que dobles canvis de signe en punts molt pròxims poden fàcilment passar in advertits i això dona resultats espuris.

### Com es forma una muntanya amb un tros de goma

En el cas d'algunes superfícies algebraiques es pot fer servir un mètode diferent. A vegades, com en el cas de Nepalès, l'equació  $f(x, y, z)=0$  es pot resoldre respecte de  $z$ . En comptes de l'equació implícita tindrem diverses funcions explícites  $z = \phi_i(x, y)$ . En el cas de Nepalès, n'hi ha prou amb dues funcions,  $\phi_1$  i  $\phi_2$ . Imaginem ara un tros de goma circular pla al terra. En cada punt  $(x, y)$  de la goma podem alçar-la fins a l'altura  $z = \phi_1(x, y)$ . D'aquesta manera sorgeix la muntanya de Nepalès. Un segon tros de goma, estirat fins a  $z = \phi_2(x, y)$ , ens dona la vall o part inferior de Nepalès.

### Com es pot veure una superfície que no tanca volum: un model a partir d'un gra d'arena

Les superfícies Helix/Hèlix i Vis-à-Vis / Tu i Jo tenen una característica comuna: no són fitades, no tenen interior ni exterior i no tanquen volum. El truc explicat anteriorment per a "veure" la forma de la superfície d'un sòlid no funciona en aquests casos: la impressora 3D hauria de produir un model amb menys material que un gra d'arena... Per aquesta raó les dades per a construir aquests models es van calcular, de nou amb el mètode dels cubs, després d'engrossir les superfícies originals per un dels costats.

La mesura de distàncies és important quan es tracta de comprovar si un objecte difereix de la seua reconstrucció. Utilitzant 'tisoires digitals', la superfície original i l'òfset de la superfície "engrossida" es poden fer correspondre coordinadament, i els espais entre les vores de totes dues es poden tancar inserint triangles. Adonem-nos que mentre Vis-à-Vis / Tu i Jo té una sola vora, Helix / Hèlix té vuit parells de contorns que han de ser tancats amb triangles. Després d'aquestes operacions, la superfície òfset, els vorells i la superfície original queden representats per una xarxa de triangles que inclou un volum prim; és aquesta xarxa la que s'envia a la impressora 3D.

**Socis/patrocïnadors:** Alphaform i Voxeljet Technology van crear les escultures per a l'exposició. Les dades 3D van ser compilades per l'Institut FORWISS de la Universitat de Passau.

## COL·LECCIÓ DE MODELS GEOMÈTRICS “GARCÍA DE GALDEANO”. UNIVERSITAT DE SARAGOSSA

### Zoel García de Galdeano (1846-1924)

Zoel García Galdeano va ser professor a la Facultat de Ciències de la Universitat de Saragossa des del 1889 fins que es va jubilar el 1918. A més de guanyar i ocupar les càtedres de Geometria Analítica i Càlcul Infinitesimal va escriure prop de dos-cents treballs, de caràcter didàctic i divulgatiu, i diversos tractats de matemàtiques; també va presentar comunicacions als dos primers congressos internacionals de matemàtics. Va fundar *El Progreso Matemático*, primera revista matemàtica espanyola; i va ser el primer president de la Real Sociedad Matemática Española, de 1916 a 1922.

En el seu testament va llegar a la Facultat de Ciències la seua magnífica biblioteca i la seua col·lecció de models geomètrics que ací s'exposen.

### La col·lecció

Els models geomètrics de la col·lecció que s'hi esposa apareixen cap al 1870 gràcies als geòmetres alemanys Alexander von Brill i Felix Klein. En la major part van ser creats pels seus estudiants en relació amb la tesi doctoral sobre superfícies.

Van ser distribuïts amb gran èxit per les companyies de Ludwig Brill (entre el 1880 i el 1899) i Martin Schilling (entre el 1899 i el 1935). El catàleg Schilling del 1911 conté 41 sèries amb un total de 377 models. Hi ha col·leccions en universitats i museus d'Alemanya, Estats Units, Holanda, Anglaterra, Itàlia, França, Japó...

Quaranta d'aquests models van arribar a Espanya adquirits per Zoel García de Galdeano.

Els models van ser creats per poder visualitzar superfícies i corbes descobertes en la segona meitat del segle XIX, i representen superfícies i corbes algebraïques, així com objectes de la geometria diferencial i de la física.

Van ser utilitzats en docència per a “reduir ... la dificultat de l'estudi de les matemàtiques ... i l'excessiva abstracció de la formació universitària” (F. Klein).

L'any 2011, el Vicerectorat de Projecció Cultural i Social de la Universitat de Saragossa va inventariar i va encarregar la neteja de la col·lecció García de Galdeano a l'Escuela Superior de Conservación y Restauración de Bienes Culturales de Aragón, amb seu a Osca

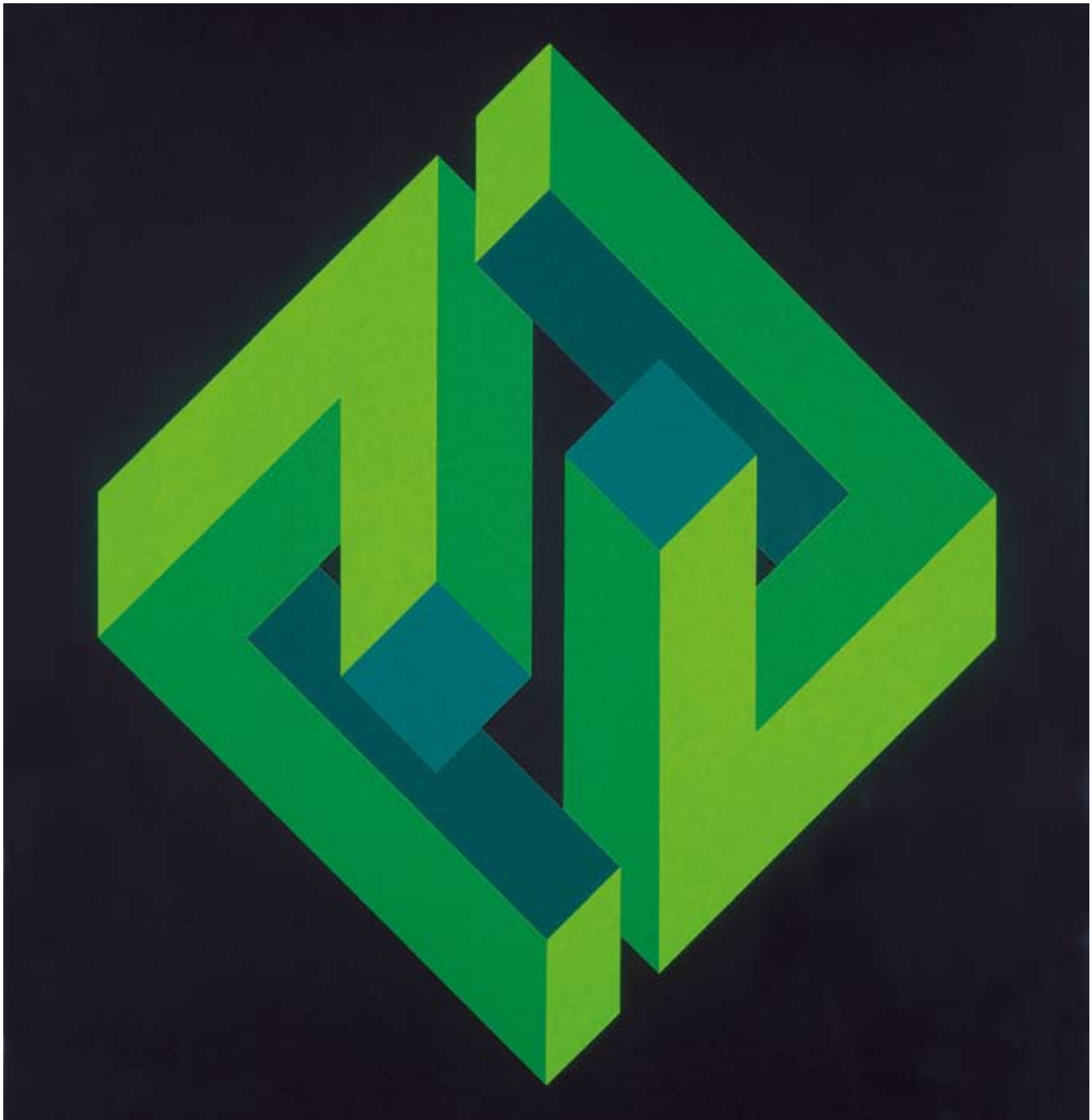
## COL·LECCIÓ MARTÍNEZ GUERRICABEITIA. UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

*Mentre la ciència tranquil·litza, l'art pertorba.*

George Braque

En aquesta part de l'exposició presentem una acurada selecció de diverses obres d'art contemporani, de la col·lecció Martínez Guericabeitia de la Universitat de València. Els autors escollits són Lucio del Pezzo, Amadeo Gabino, Joaquín Michavila, Eusebi Sempere i José María Yturralde, tots ells amb un fort lligam amb el País Valencià. Les obres que hem seleccionat tenen com a característica comuna l'abstracció geomètrica. En aquests casos, els autors intenten que ni l'obra en si ni cap de les seues parts representen objectes del món visible. D'aquesta manera, la geometria i l'àritmètica, no sols apareixen com a eines matemàtiques fonamentals en el procés de creació, sinó que també ajuden l'artista a descobrir un univers propi de dimensions infinites. Hi trobarem des de combinacions subtils de formes geomètriques i colors fins a figures impossibles que desafien les lleis de la percepció. Esperem que gaudireu d'aquestes obres, vistes amb una mirada matemàtica.

José María Yturralde. Sense Títol, 1976. Serigrafia, 252 x 500 mm.  
Col·lecció Martínez Guericabeitia de la Universitat de València



100 REAL SOCIEDAD  
MATEMÁTICA ESPAÑOLA  
CENTENARIO 1911/2011

VNIVERSITAT  
E VALÈNCIA



Real Sociedad  
Matemática Española



Mathematisches  
Forschungsinstitut  
Oberwolfach

[OV] Facultat de Ciències  
Matemàtiques

LA NAU

lafundació  
universitatdevalència



CÁTEDRA DE  
DIVULGACIÓN  
DE LA CIENCIA

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA • FUNDACIÓ CAIBLACH



GOBIERNO  
DE ESPAÑA

MINISTERIO  
DE CIENCIA  
E INNOVACIÓN

FECYT  
FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

