Surfer

Manual d'utilització

Índex

0. Presentació

El SURFER és un programa per a la visualització de geometria algebraica real en temps real. Les superfícies visualitzades venen donades pels zeros d'un polinomi en tres variables. SURFER està basat en el programa SURF i va ser desenvolupat per a l'exposició IMAGINARY i creat pel Mathematishes Forschungsinstitut Oberwolfach el 2008, l'Any de les Matemàtiques a Alemanya.

El programa SURFER és una eina excel·lent per a experimentar la connexió entre l'Àlgebra i la Geometria a l'aula. Facilita la percepció visual d'objectes geomètrics afavorint el desenvolupament de la intel·ligència visual-espacial. Depenent dels coneixements previs dels alumnes es poden generar objectes simples i modificar-los, o bé a atrevir-se amb construccions més complexes. A continuació s'ha reunit una col·lecció d'idees per a una o més lliçons. És interessant que els estudiants puguin provar i usar el programa SURFER ells mateixos. El programa es pot descarregar gratuïtament.

1. Instruccions

a. **Introducció del polinomi**

El polinomi es pot introduir en la línia de comandes a la cantonada inferior a l'esquerra, en tres variables x, y i z. Si la fórmula és sintàcticament incorrecte, és a dir, que l'ordinador pensa que l'expressió no és un polinomi, apareixerà un signe d'exclamació (!) vermell a la banda dreta de la línia de comandes. La superfície (el conjunt de zeros del polinomi) apareix en pantalla immediatament. Cada superfície es mostra primer en baixa resolució i, després d'una breu estona de càlcul, en alta resolució.

b. **Rotació de la superfície**

Mentre premem el botó esquerre del ratolí, la superfície es pot rotar al voltant del seu centre en la finestra de visualització. Durant la rotació la superfície es mostra en baixa resolució. Després de finalitzar la rotació la superfície es mostra de nou en alta resolució, després d'una breu estona de càlcul.

c. **Zoom**

Amb la barra de zoom (lupa) a l'extrem dret de la finestra de visualització es pot apropar o allunyar la imatge canviant el radi de l'esfera invisible que interseca la superfície. L'aspecte en pantalla del tros de superfície mostrat sempre té la mateixa mida.

d. **Introducció de paràmetres**

Els paràmetres a i b es poden utilitzar en la línia de comandes. Una barra apareix automàticament i et permet modificar els paràmetres entre 0 i 1. Els paràmetres poden ser fàcilment modificats amb el ratolí. El canvi en la superfície es mostra immediatament.

e. **Colors**

Prement la pestanya "Colores" (Colours) del menú es poden escollir colors específics per als costats interior i exterior de la superfície. Els colors es poden seleccionar d'un quadre de colors.

f. **Galeria i informació**

Prement la pestanya "Galería" (Gallery) del menú es troba disponible una gran varietat de superfícies per poder estudiar-les o per poder modificar-les a partir dels paràmetres. Moltes superfícies disposen d'informació addicional, que s'indica en la icona "Info" del menú en fer clic sobre una de les superfícies. Les dues petites fletxes verdes serveixen per seleccionar la superfície anterior o següent de la galeria que s'hagi triat.

g. **Pantalla completa**

La icona "Full Screen" (a la dreta de les fletxes verdes) ens permet canviar de visió en pantalla completa. Aquest mode de visualització permet fer zoom, canviar paràmetres i també tornar al mode de visualització normal, fent clic al botó de la cantonada inferior a la dreta.

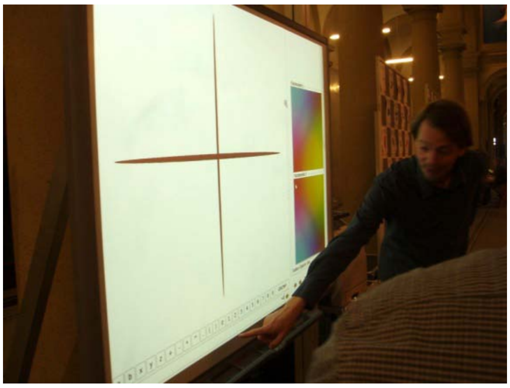
h. **Guardar imatges**

El botó "Guardar" (Save) permet guardar la superfície com una imatge (en format .png). Es publicaran imatges interessants a la pàgina web de IMAGINARY i us convidem a enviar la vostra visualització al nostre concurs. Per a més detalls, vegeu **www.imaginary-exhibition.com**.

2. Comencem a treballar

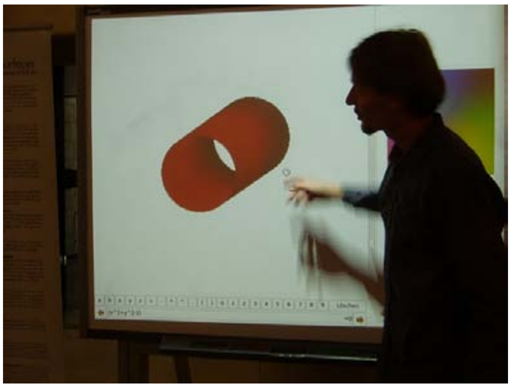
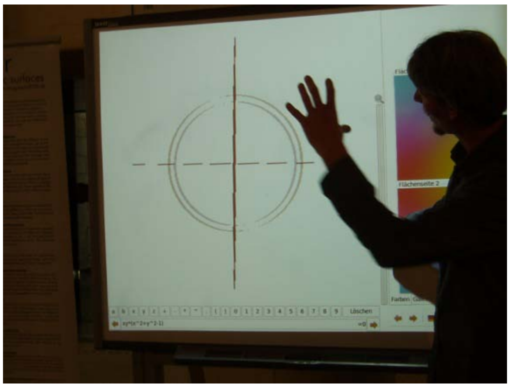
a. Per començar treballem en 2 dimensions

Gira la imatge de manera que l'eix z sigui invisible, és a dir, fins que quedi perpendicular a la pantalla. D'aquesta forma pots començar a treballar en un sistema de coordenades de dues dimensions (que correspon a la fórmula $xy = 0$). A continuació, pots dibuixar una línea recta o una paràbola (per exemple, la fórmula de la recta $y = x$ s'escriu $y - x = 0$, i la de la paràbola $y - x^2 = 0$ s'escriu $y - x\text{^}2 = 0$). En ambdós casos, caldrà que multipliquis l'expressió per $x * y$ per a visualitzar els eixos de coordenades.



b. La circumferència i el cilindre

Dibuixa la circumferència de centre l'origen i radi 1 escrivint $x\text{^}2 + y\text{^}2 - 1 = 0$ (l'equació de la circumferència es pot justificar mitjançant el Teorema de Pitàgoras). A continuació, gira el sistema de coordenades. En girar la vista, entren en joc els valors de z que en ser arbitraris (doncs z no intervé en l'equació) donen lloc a un tub (cilindre). Tingues present que la imatge s'ajusta a l'esfera visible amb radi ajustable amb la lupa, justa al costat dret de la imatge.

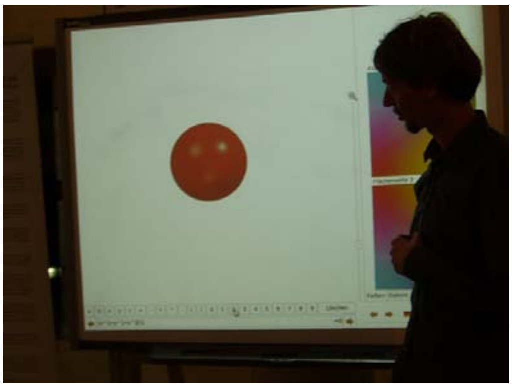



c. L'esfera

Considera ara l'esfera $x\text{^}2 + y\text{^}2 + z\text{^}2 - 1 = 0$. Pots analitzar l'equació de l'esfera, i intentar esbrinar, a partir de l'equació, quina forma té. Recorda que en el pla $x\text{^}2 + y\text{^}2 = R\text{^}2$ és l'equació d'una circumferència de radi R. Ara talla l'esfera amb plans horitzontals substituint, per exemple, z=0, z=0,5, z=1 o z=-1 en l'equació, i analitza quina corba n'obtens. Comenta els noms de les seccions resultants en tallar amb z=0, z=1 i z=-1 (equador, Pol Nord, Pol Sud). Observa que la superfície de l'esfera està formada per circumferències apilades.

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

Empra ara el SURFER per a visualtizar aquest mateix raonament: multiplica l'equació de l'esfera per l'expressió $z - 2 * b + 1$ (sense donar cap valor a b) i mostra les diferents seccions utilitzant la barra de desplaçament. Podràs observar que la intersecció d'un pla i una esfera és sempre una circumferència.



d. El con quadràtic i la seva singularitat

Entra a la galeria; a la galeria "Singularidades simples" es troba el con quadràtic. Selecciona'l. Apareix

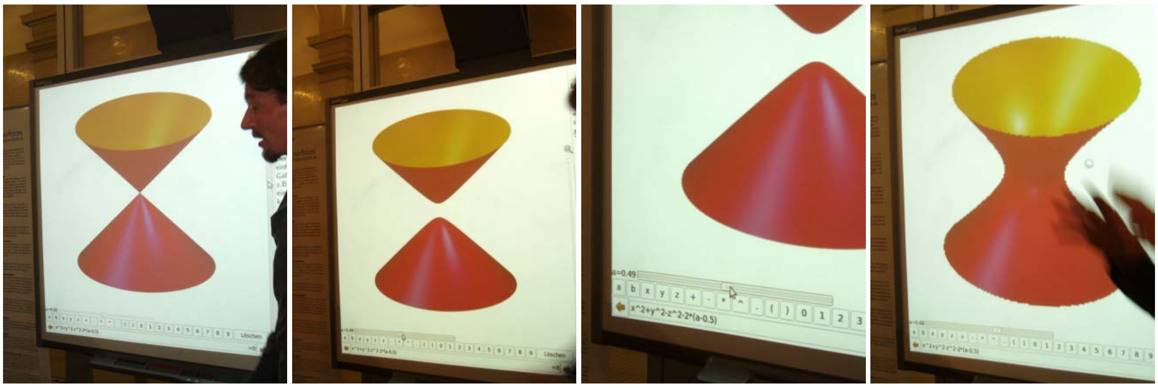
x^2 + y^2 - z^2 - (a - 0.5) = 0,

amb a = 0.5.

Fixa't que passa quan varies el valor de a:

- Si esculls un valor de a més petit que 0.5 veuràs que tens dues superfícies separades és el que s'anomena hiperboloide de dos fulls.
- Si esculls un valor de a més gran que 0.5 tindràs, en canvi, una sola superfície, és el que s'anomena hiperboloide d'un full.

T'has fixat que passa? Una petita variació en l'equació permet que tinguis tres superfícies completament diferents, i el pas intermedi és una superfície singular!



e. Atreveix-te a fer canvis

Com ja saps, si escrius una equació del tipus $ax + by + cz + d = 0$ tens un pla; què passa quan poses una superfície de grau 2? Per exemple $y - 2xz = 0$. Fixa't en el resultat; és una superfície encorbada. Prova ara d'escriure $y - 200xz = 0$; què passa amb la superfície? I si poses $100y - 2xz = 0$? Com t'hauràs adonat hi ha un monomi que la fa encorbar i un altre que fa l'efecte d'aplanar-la. Posant uns coeficients elevats a una part de l'equació potenciem els efectes d'uns monomis o d'altres.

Tria qualsevol superfície de les galeries "Superficies Notables" i transforma-la. Per exemple, què pots canviar en Espurna (Distel):

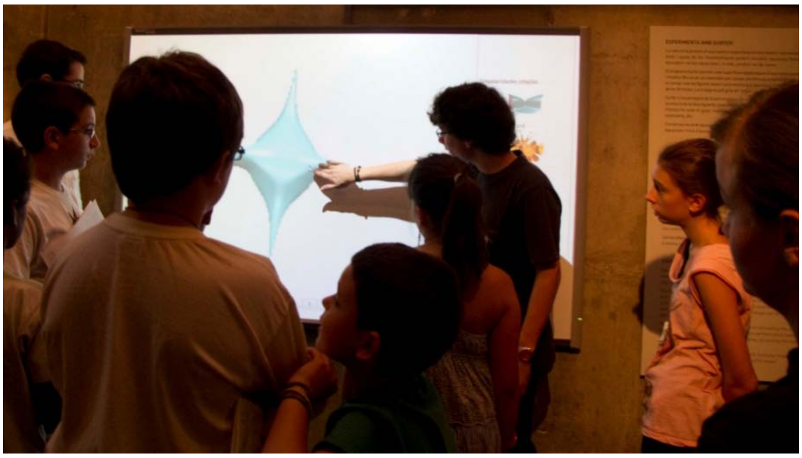
$$x^2+y^2+z^2+1500(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)-1=0$$

per obtenir només quatre punxes? Quin coeficient has d'augmentar o quin has d'eliminar? Per eliminar les dues punxes et proposem dues opcions: la primera es augmentar el coeficient d'una de les variables al quadrat, per exemple:

$$100x^2+y^2+z^2+1500(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)-1=0;$$

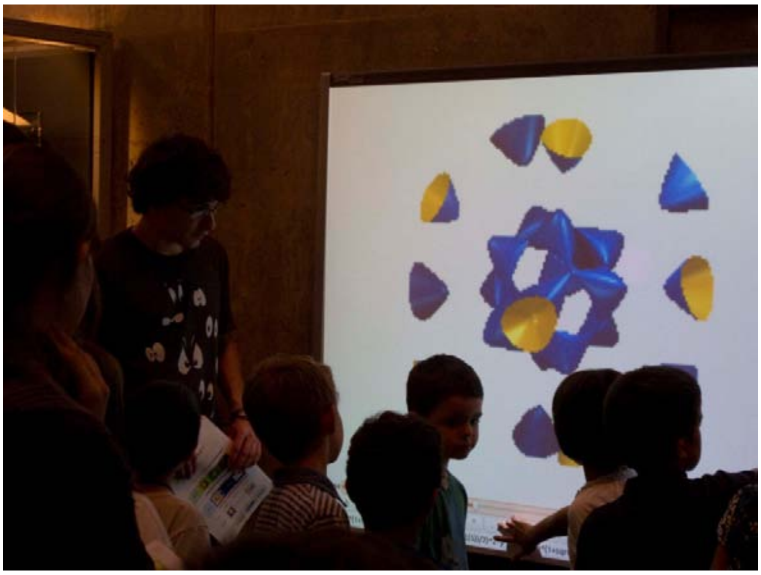
la segona és eliminar un dels parèntesis conjugats que tenim:

$$x^2+y^2+z^2+1500(x^2+y^2)(y^2+z^2)-1=0.$$



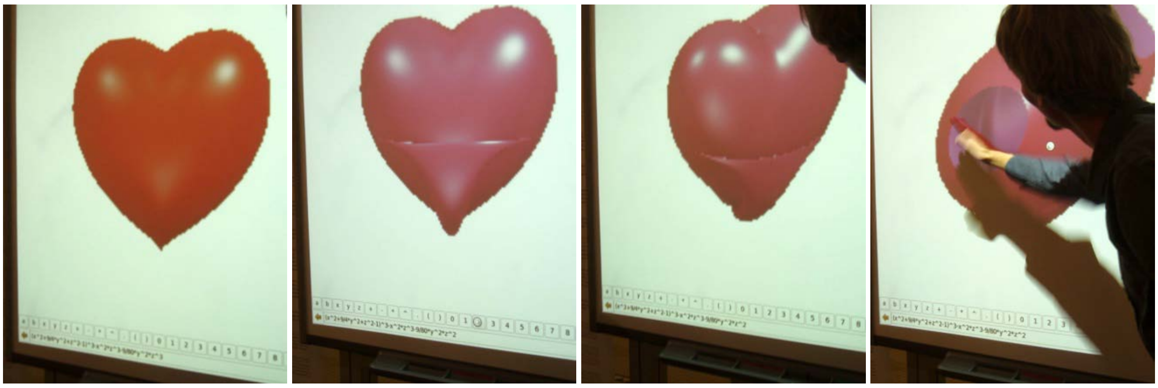
f. Superfícies rècord

La galeria "Superficies récord" ens aproxima a la recerca matemàtica d'actualitat. Es tracta del problema de determinar el nombre de singularitats (punts singulars) que pot tenir una superfície d'un grau determinat (l'exponent més alt de la seva equació). Quan el grau és 6 la sèxtica de Barth té el rècord insuperable de 65 singularitats. En grau 7 encara no es coneix quin és exactament el nombre màxim. El rècord del món el té Oliver Labs amb una superfície amb 99 singularitats. A la secció de matemàtiques de la pàgina de RSME-Imaginary pots trobar més informació sobre les superfícies d'aquesta categoria.



g. Un truc divertit: el cor amb banyador

Prova de canviar l'últim factor z^3 de l'equació de Süss que trobaràs a la galeria de "Superfícies notables II" per un z^2. Què ha passat?



3. Consells per a experts

a. Diverses superfícies:

Si es multipliquen dues fórmules f i g s'obté $f \cdot g = 0$, la unió de les dues superfícies $f = 0$ i $g = 0$. La nova superfície és singular al llarg de la corba secció $f = g = 0$. Per exemple, $x \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$ és la unió del pla amb l'esfera i això s'assembla a Saturn amb un anell.

b. Fusió de components

Si es resta d'una fórmula f una constant, anomenem-la a, la superfície $f(x, y, z) = 0$ s'altera i s'obté la superfície $f(x, y, z) - a = 0$. En particular, les singularitats de $f(x, y, z)$ es suavitzen. Si, per exemple, la unió de dues superfícies donada com un producte $f \cdot g$ s'altera en $f \cdot g - a$, la superfície al llarg de la corba secció es converteix en llisa (o regular).

c. Les corbes secció

Si $f = 0$ i $g = 0$ són les fórmules de dues superfícies, llavors $f^2 + g^2 = 0$ és la fórmula de la corba secció, ja que la part real d'aquesta equació és igual a $f = g = 0$. La corba secció no es veurà perquè és 1-dimensional i el software de visualització no ho permet. El truc està en el fet d' "engreixar" la corba secció considerant $f^2 + g^2 - a$ per a un valor petit de a per tal que sigui visible.

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

4. Descàrrega i instal.lació

El programa SURFER està disponible de forma gratuïta a la pàgina web **www.imaginary-exhibition.com/surfer?lang=es**. Pot ser utilitzat per a propòsits personals o educatius.

5. Bibliografia

- www.imaginary-exhibition.com
- Pancarta sobre SURFER de l'exposició RSME-Imaginary
- "Surfer en el aula", que es pot descarregar de la plana web http://www.imaginary-exhibition.com/unterricht.php

Recomanem també:

- Enllaç al bloc "Surfering", on professors de matemàtiques de secundària comparteixen experiències sobre el SURFER (en basc), iniciativa de l'Institut de secundària Arrigorriaga BHI (Biscaia): http://surfering.blogspot.com/
- Capítols 3 i 4 de la "Guia didàctica de RSME-Imaginary" dels autors Alexander Aginagalde Nafarrate, Pedro Alegría Ezquerra, Raúl Ibáñez Torres, Álvaro Lozano Rojo, Marta Macho Stadler; es pot descarregar de la plana web http://www.imaginary-exhibition.com/unterricht.php