Cinderella

Manual d'utilització

Índex

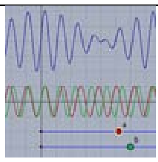
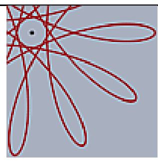
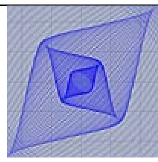
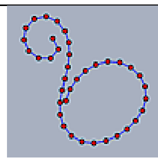
0. Presentació

Cinderella en l'exposició *Imaginary* està representat per un conjunt de programes interactius que permeten manipular interactivament diferents objectes matemàtics al web: **www.imaginary-exhibition.com/cinderella/new/index-Spanish.html**.

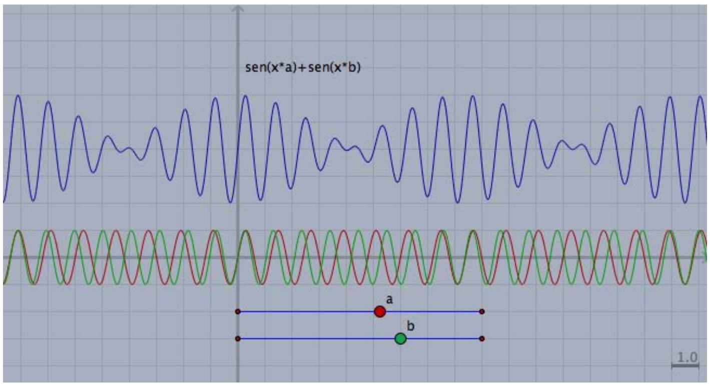
Aquí ens hem limitat a recopilar tota la informació que surt en les pantalles de l'aplicació, facilitant així a l'usuari una visió ràpida de les possibilitats que ofereix el programa per poder triar el que sigui més convenient.

MUHBA MUSEU D'HISTÒRIA DE BARCELONA
Real Sociedad Matemática Española
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Generalitat de Catalunya Departament d'Economia i Coneixement
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Institut de Ciències de l'Educació
fMe

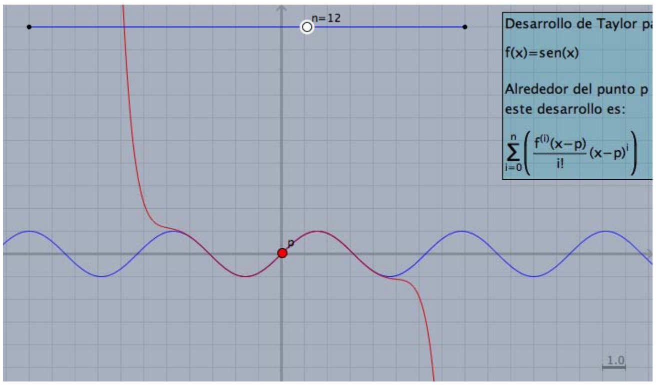
1. Curvas

				
1	2	3	4	5

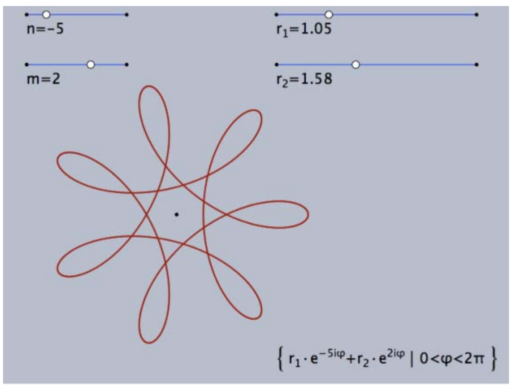
a. Superposición de ondas sinusoidales
Descripción: La superposición de ondas sinusoidales genera patrones característicos de interferencia.



b. Aproximación de la función seno por polinomios
Descripción: La función seno se puede aproximar alrededor de un punto cualquiera por la llamada serie de Taylor. El grado del polinomio y el punto se pueden cambiar.

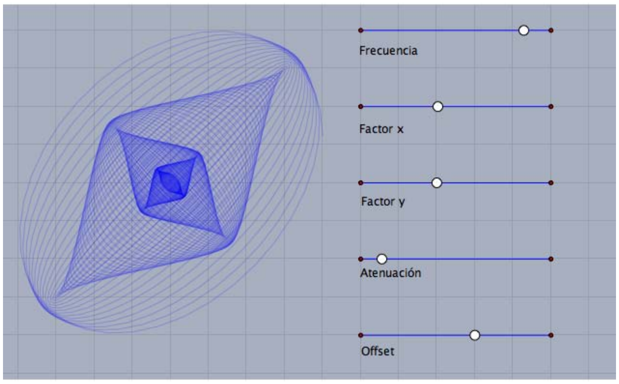


c. Espirógrafos usando números complejos
Descripción: Es posible crear fascinantes patrones espirales usando funciones a valores números complejos. ¡Intenta jugar con los coeficientes!

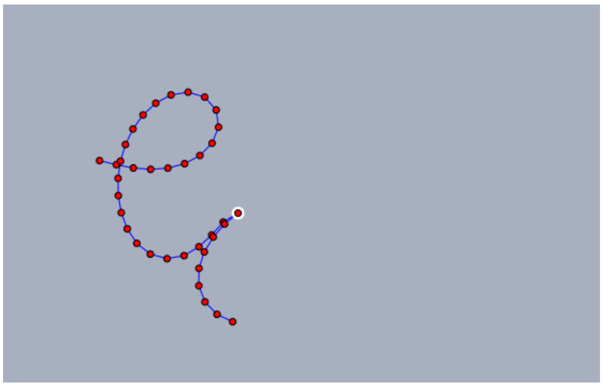


MUHBA MUSEU D'HISTÒRIA DE BARCELONA · Real Sociedad Matemática Española · Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach · Generalitat de Catalunya Departament d'Economia i Coneixement · UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH · UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Institut de Ciències de l'Educació · FME

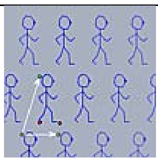
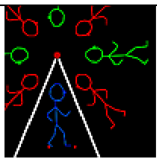
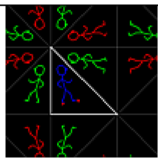
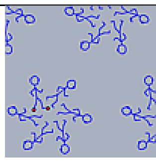
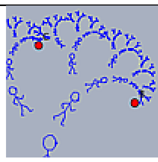
d. Figuras de Lissajous atenuadas
Descripción: Aquí se puede observar lo que ocurre cuando se superponen un seno y un coseno atenuados asociados a los ejes x e y, respectivamente.



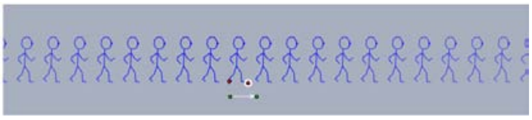
e. Tirando de la cuerda
Descripción: Simulación matemática de un trozo de cuerda basada en geometría diferencial discreta. Se puede arrastrar con el ratón cualquiera de los puntos colorados.



2. Simetrías

				
1	2	3	4	5

a. Traslaciones y dos simetrías
Descripción: Los *applets* que siguen permiten investigar el comportamiento de distintas transformaciones geométricas.
Traslaciones:

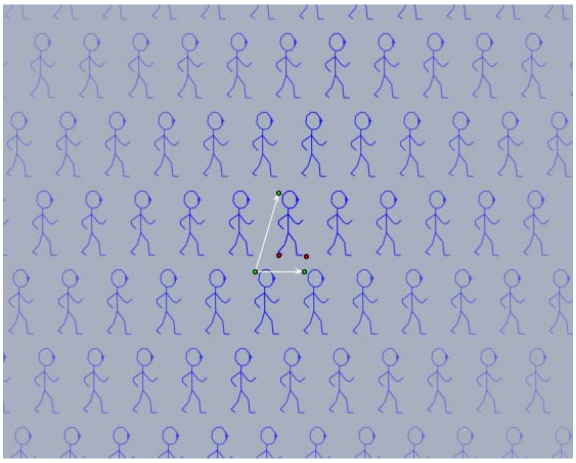


El *applet* anterior muestra el resultado de la situación más simple: la aplicación iterada de una traslación en la dirección del eje horizontal.

¿Qué ocurre si permitimos que *varias* transformaciones interactúen entre sí? Dependiendo del tipo de las transformaciones, se obtienen innumerables patrones, a menudo muy bellos.

Dos traslaciones:

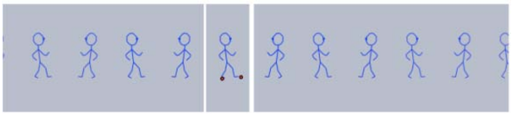
Empecemos con el ejemplo más simple: una segunda traslación en una dirección distinta:



Todo el plano queda cubierto con copias del profesor Palíllez. Se parece un poco al "Ataque de los clones" (de hecho la correspondiente animación en la película Star Wars se generó de un modo parecido, esto es, empezando con un "Clon" y produciendo muchas copias del mismo por traslación).

Dos simetrías:

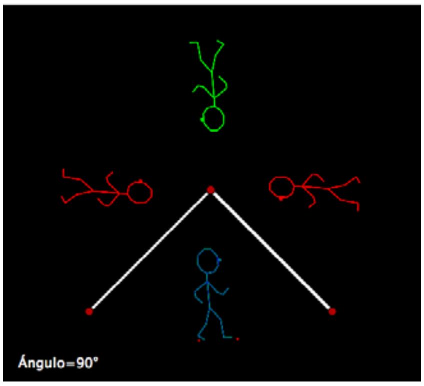
Si iteramos dos simetrías (especulares), la situación es muy distinta. Miremos primero el caso de dos simetrías de ejes paralelos:



El profesor Palíllez se ve a sí mismo en el espejo que tiene delante. También ve la imagen del espejo detrás suyo, y su reflejo, y así sucesivamente. Como de costumbre, los espejos y los puntos se pueden arrastrar con el ratón.

b. Espejos formando ángulos

Descripción: Tan pronto como los espejos (ejes de las simetrías) no son paralelos, aparecen patrones rotacionales. Se puede modificar el ángulo entre los dos espejos y mirar las copias del profesor Palíllez.



Solamente se obtiene una imagen nítida para ciertos ángulos: los divisores enteros de 180°, esto es, 180°, 90°, 60°, 45°, 36°, 30°,... (¡compruébalo!).

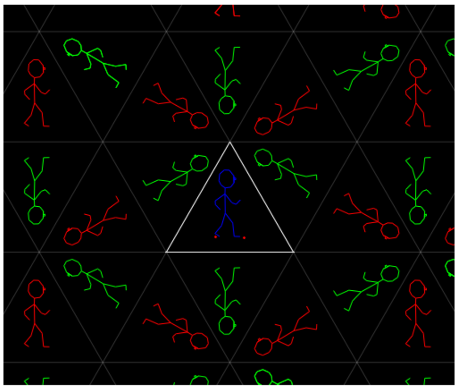
Las siguientes fotografías son de experimentos con espejos reales.

c. Caleidoscopios

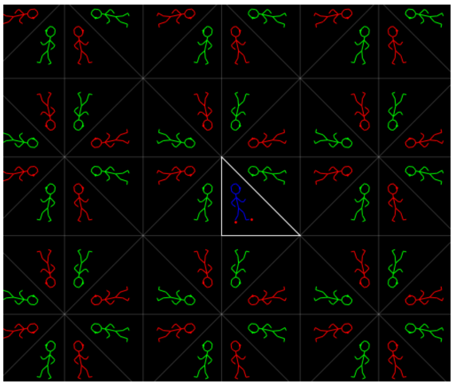
Descripción: Ahora trabajaremos con tres espejos. Consideremos configuraciones triangulares de tres espejos para las cuales los ángulos de las esquinas sean divisores enteros de 180°. Únicamente hay tres posibilidades, ya que la suma de estos ángulos ha de ser 180°, y estas son (60°, 60°, 60°), (90°, 45°, 45°) y(90°, 60°, 30°). Los *applets* siguientes ilustran estos patrones caleidoscópicos.

Como de costumbre, puedes mover el profesor Palíllez.

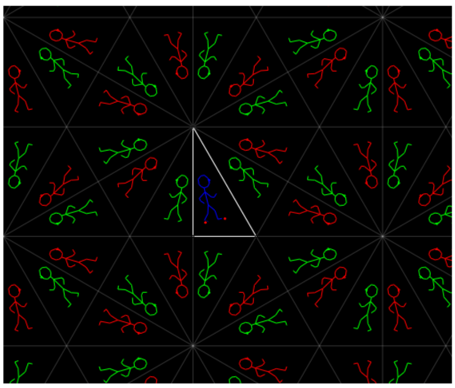
(60°, 60°, 60°)



(90°, 45°, 45°)



(90°, 60°, 30°)

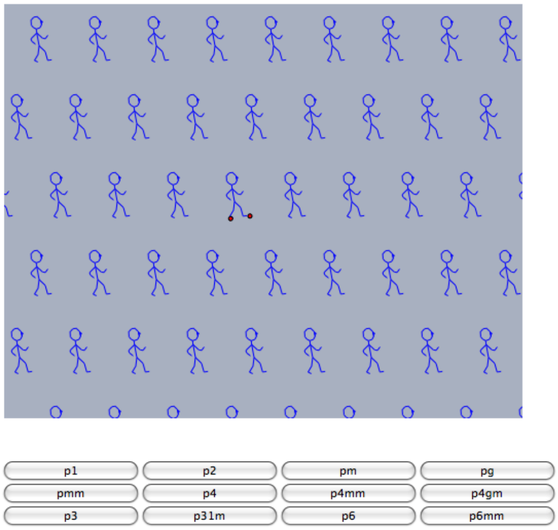


Así es como aparece en el mundo real:



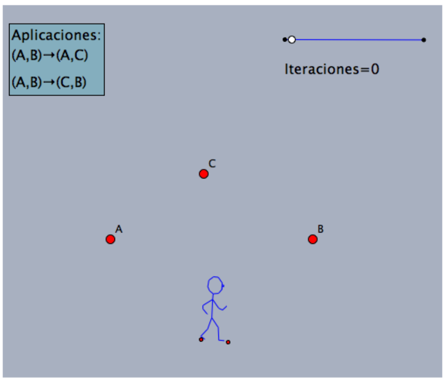
d. Grupos ornamentales

Descripción: En el *applet* que sigue se ilustran los grupos de mosaicos o de teselación (wallpaper groups en inglés). Las transformaciones que aparecen son traslaciones, simetrías, simetrías con traslación y rotaciones. Un resultado notable asegura que existen exactamente 17 grupos ornamentales.



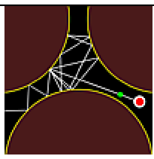
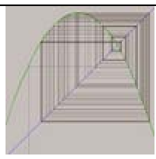
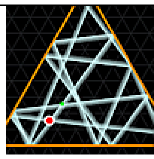
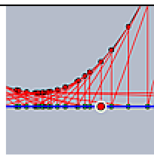
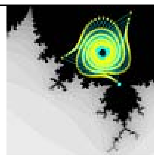
e. Semejanzas

Descripción: Hasta aquí únicamente hemos considerado transformaciones que conservan el tamaño de los objetos. Los siguientes *applets* están destinados a mostrar el efecto de aplicar iterativamente transformaciones de semejanza. Empezamos con el estudio de las semejanzas que aplican el segmento (A,B) en los segmentos (A,C) y (C,D), respectivamente.



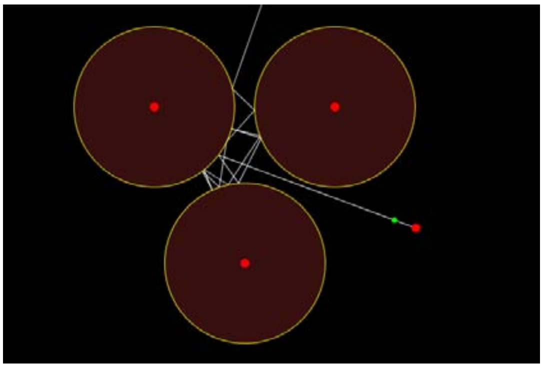
Se puede controlar el número de iteraciones deslizando el cursor con el ratón. También se pueden mover los puntos A,B,C y el profesor Palíllez.

3. Caos

				
1	2	3	4	5

a. Caos producido por simetrías

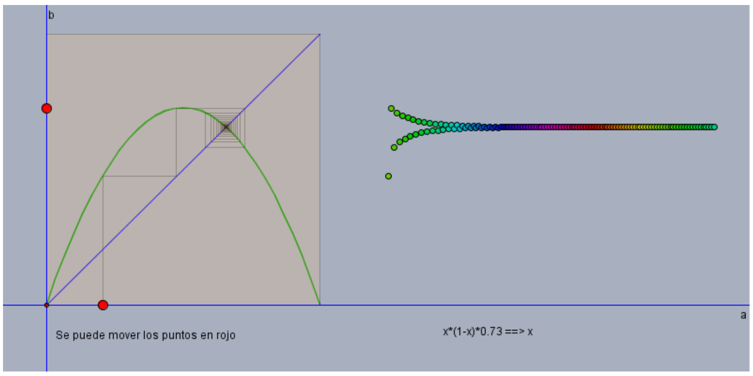
Descripción: En el *applet* que sigue se puede observar cómo los rayos de luz se reflejan en los espejos circulares. Pequeños cambios en los parámetros (posición de las circunferencias, ángulo del rayo de luz, etc.) tienen un gran efecto sobre toda la trayectoria del rayo.



Una experiencia muy sugerente es mover el origen del rayo de luz al interior de una circunferencia o de una región común a dos o tres de ellas.

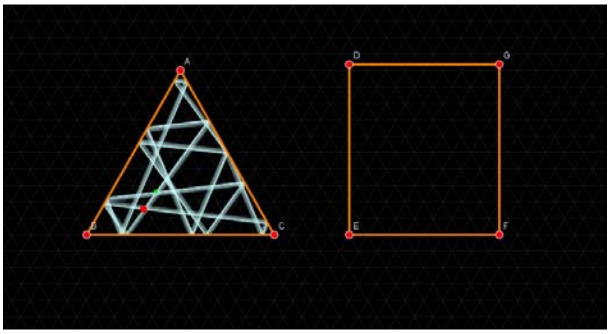
b. Caos producido por la iteración de una función

Descripción: Dependiendo de la elección del parámetro a en la iteración de la función f(x)=a*x(1-x), obtenemos comportamientos cualitativamente distintos, ya que puede tender a un punto fijo, oscilar o incluso presentar un comportamiento caótico.



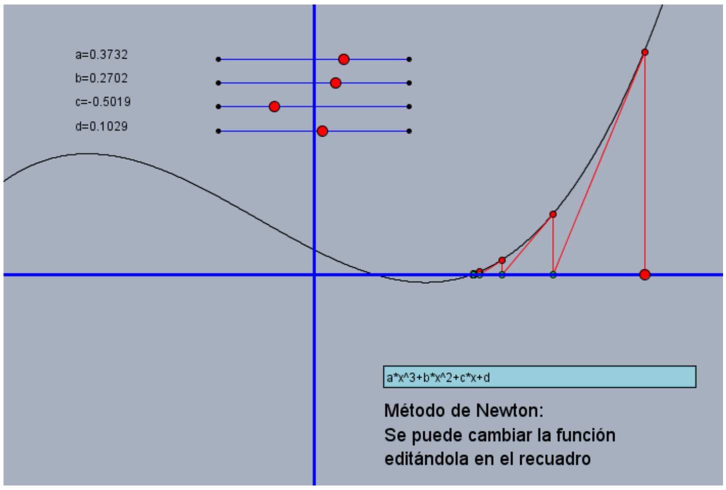
c. Caos en billares fotónicos

Descripción: Un rayo de luz confinado en el interior de una región poligonal con lados reflectantes también presenta un comportamiento caótico. Se puede desplazar el origen y cambiar el ángulo del rayo luminoso. También se pueden mover los vértices de los polígonos.



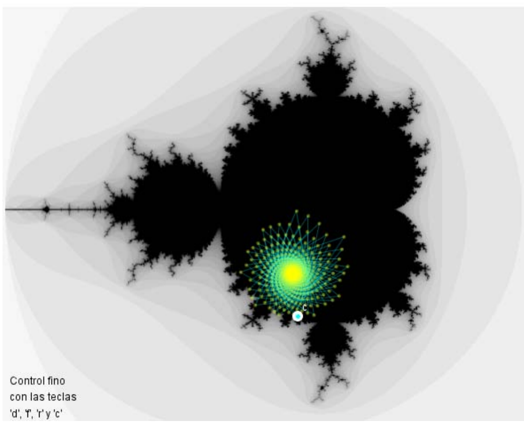
d. Método de Newton

Descripción: El cálculo de las soluciones de una ecuación por el método de Newton también puede generar comportamiento caótico. Dependiendo del valor inicial y de la función, puede suceder que el proceso converja hacia una solución, que oscile, o que siga un régimen caótico.

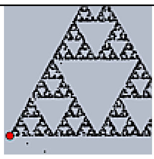
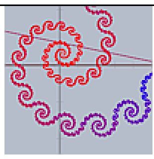
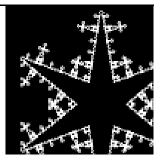
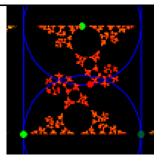
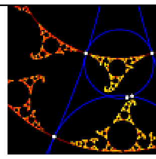


e. Iteraciones en el conjunto de Mandelbrot

Descripción: El conjunto de Mandelbrot se genera por iteración de la función de variable compleja f(z)=z^2+c. Los valores de c, para los cuales la iteración se va al infinito, se muestran en blanco, todos los demás en negro. El *applet* muestra la aplicación iterada de f(z) dependiendo del parámetro c. Como valor inicial de la iteración tomamos el mismo c.



4. Fractales

				
1	2	3	4	5

a. Sistema iterados de semejanzas

Descripción: Veamos brevemente cómo un algoritmo probabilista puede producir un patrón fractal.

Empecemos con las semejanzas:

$$z \to f_1(z) \text{ y } z \to f_2(z)$$

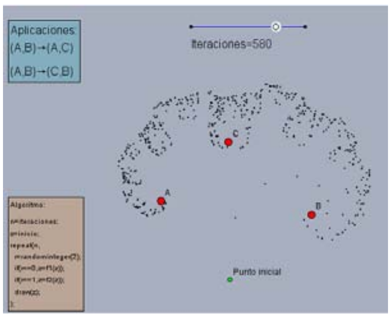
El algoritmo funciona de la siguiente manera: Empecemos con un punto arbitrario z_0 del plano. Escojamos aleatoriamente una de las transformaciones $f_1(z)$ o $f_2(z)$ de modo equiprobable (probabilidad 0.5 para cada una) y apliquémosla a z_0. Dibujemos el punto resultante y procedamos iterativamente con este nuevo punto un gran número de veces.

Un proceso similar se puede aplicar a una lista de transformaciones $f_1, f_2, \dots f_k$. Un programa de ordenador para efectuar este proceso se puede describir como sigue:

```
z=startpoint;
  n=number of iterations;
  repeat n-times: (
       f=a random transformation from f_1, f_2,... f_k;
       z=f(z);
       draw(z);
  )
```

Es una buena práctica no dibujar los primeros 100 puntos de este proceso, ya que pueden no estar suficientemente cerca del fractal que se obtiene con el proceso.

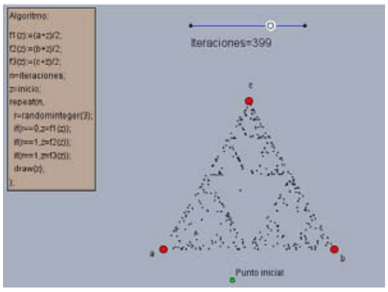
En el siguiente *applet* se puede observar el proceso. El número de iteraciones se puede ajustar con el cursor. El fractal emerge cuando el número de transformaciones es grande.



Incluso las trasformaciones más simples crean patrones interesantes. Consideremos, por ejemplo, la transformación:

$$f_p(z):=(z+p)/2$$

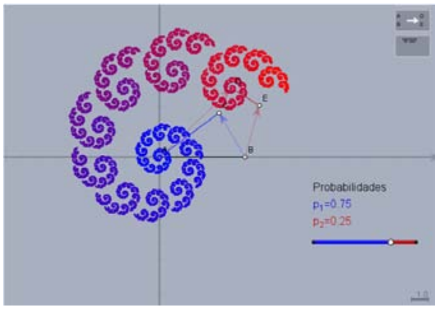
que transforma z en el punto medio del segmento de extremos z y p. El ejemplo que sigue muestra el proceso que se obtiene con tres de estas aplicaciones: $f_a(z)$, $f_b(z)$, $f_c(z)$. El fractal que aparece es el llamado triángulo de Sierpinski.



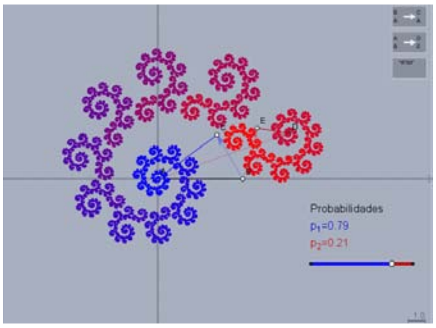
b. Sistemas iterados de semejanzas

Descripción: Algunos ejemplos de fractales obtenidos por este procedimiento:

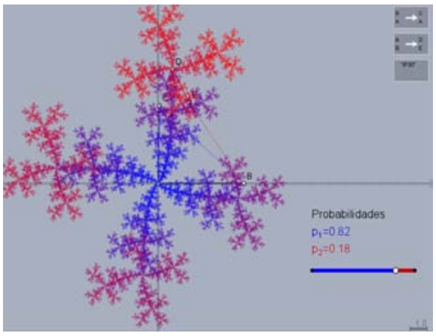
Caracol:



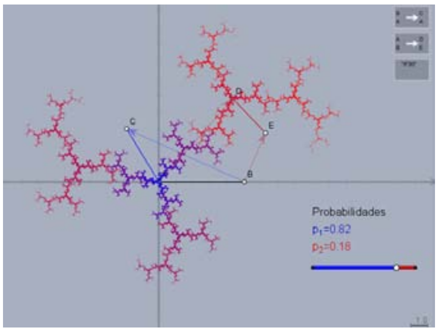
Anti-Caracol:



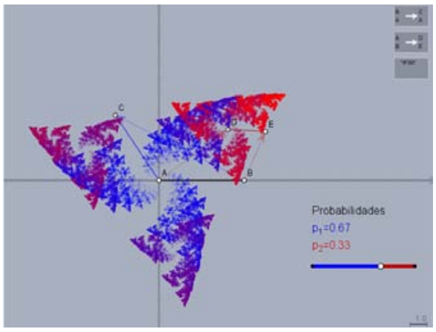
Dendrita:



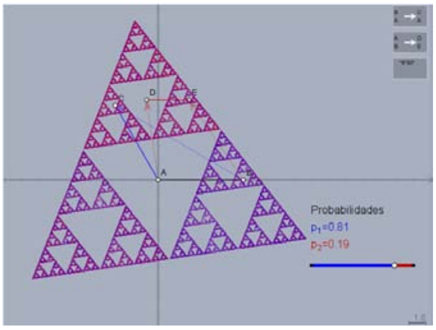
Relámpago:



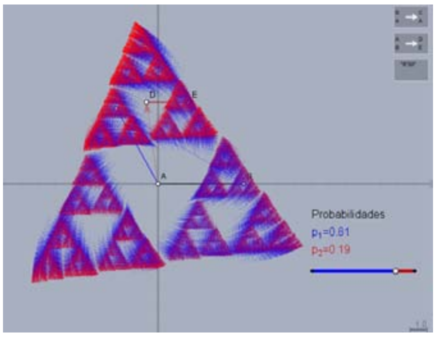
Triángulo con giro:



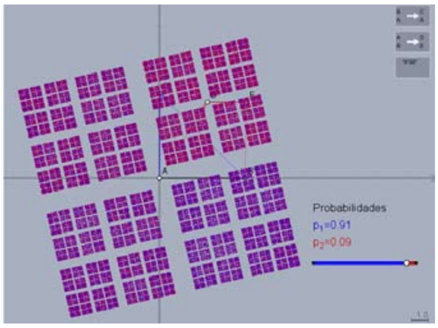
Sierpinski:



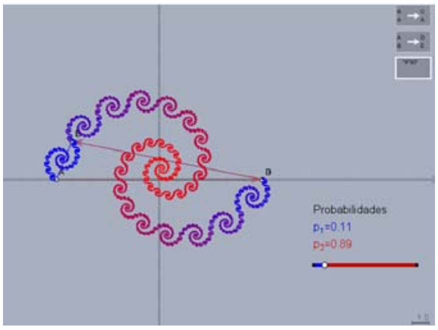
Casi Sierpinski:



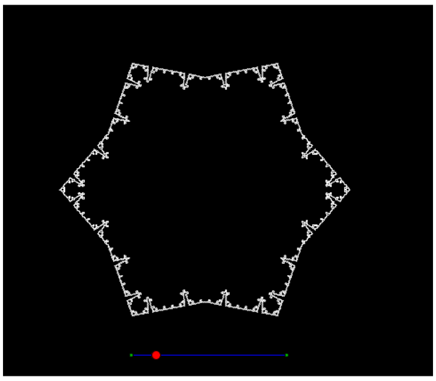
Tartán escocés:



Filigrana:

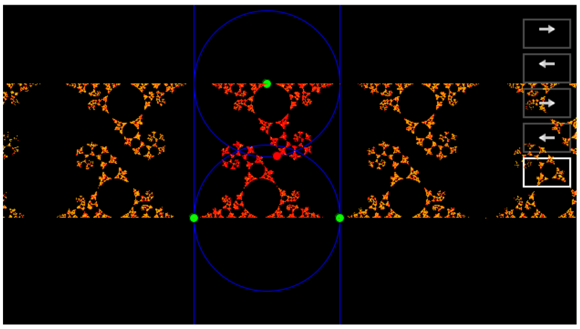


c. Un copo de nieve fractal



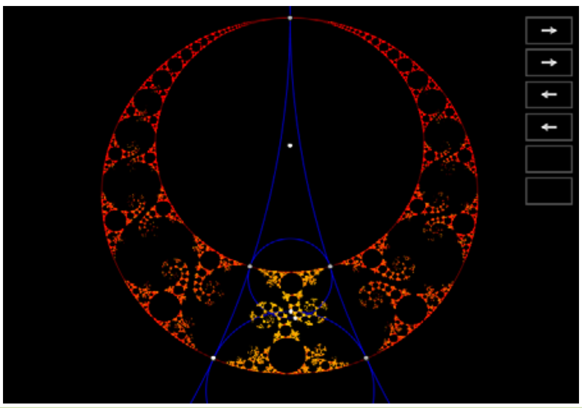
d. Sistema iterado de transformaciones de Moebius

Descripción: En el siguiente *applet* se ilustra un sistema iterado de transformaciones de Moebius. Los puntos de color verde se pueden mover.

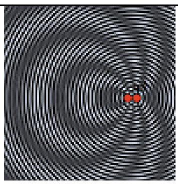
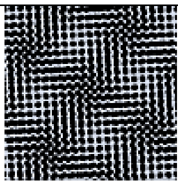
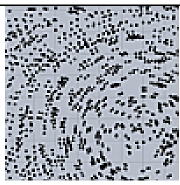
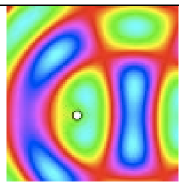
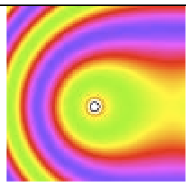


e. Sistema iterado de transformaciones de Moebius

Descripción: Otra ilustración, también de un sistema iterado de transformaciones de Mebius, en la que se pueden mover los puntos de color blanco.

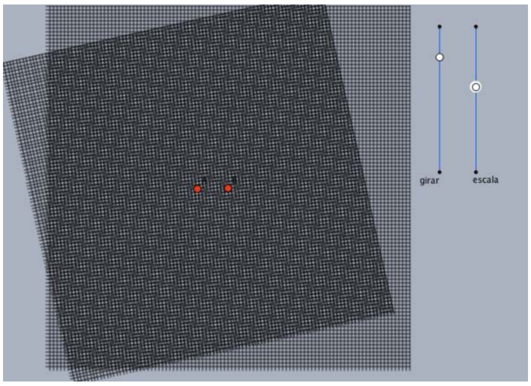


5. Muarés

				
1	2	3	4	5

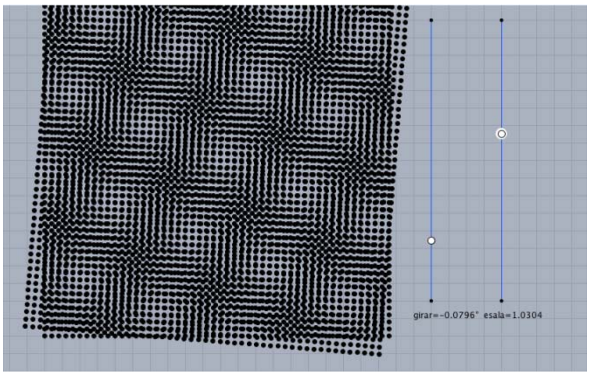
a. Patrón de Muaré

Descripción: En esta simulación puedes superponer dos mallas regulares y observar el patrón de muaré resultante. Puedes cambiar el tipo de malla, su escala y su posición relativa.



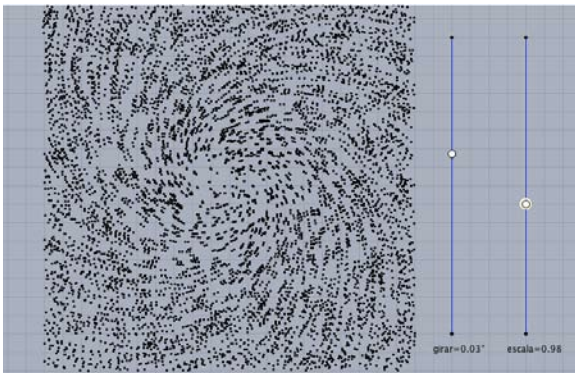
b. Patrones de Muaré a partir de puntos distribuidos regularmente

Descripción: En estas simulaciones puedes superponer dos configuraciones regulares de puntos.



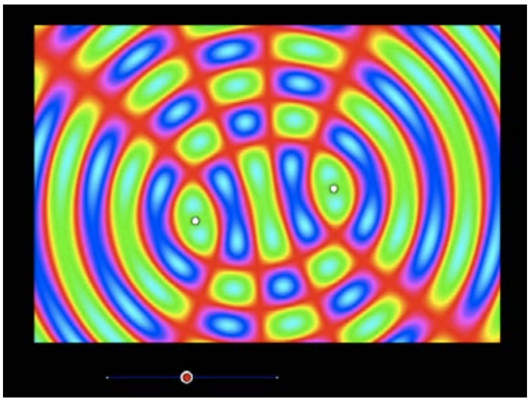
c. Patrones de Muaré a partir de puntos distribuidos aleatoriamente

Descripción: En estas simulaciones puedes superponer un patrón aleatorio de puntos y una versión girada y a escala suya. Observarás que aparecen circunferencias, rayos y espirales.



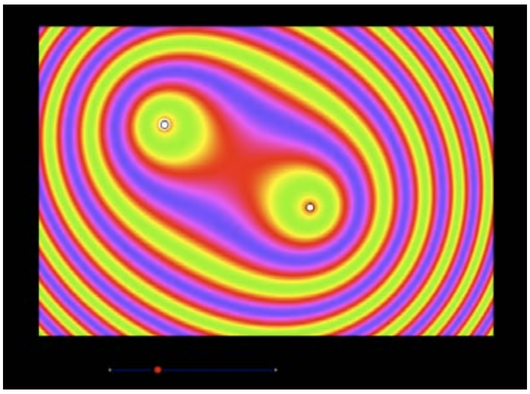
d. Superposición de ondas circulares

Descripción: Una superposición visual de ondas circulares produce un patrón en el que surgen sistemas de cónicas con mismos focos (fíjate en las zonas de color rojo).

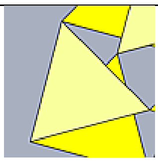
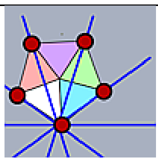
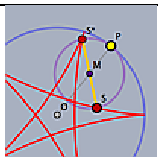
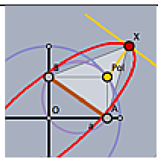
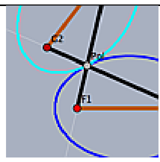


e. Multiplicación de distancia

Descripción: En esta simulación se pueden ver las curvas de nivel de una función definida por el producto de dos distancias.

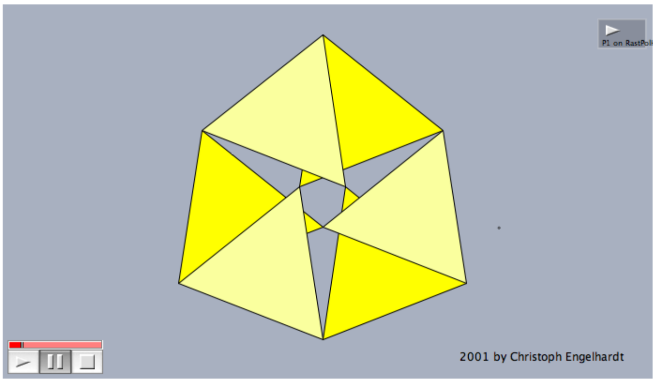


6. Cinemática

				
1	2	3	4	5

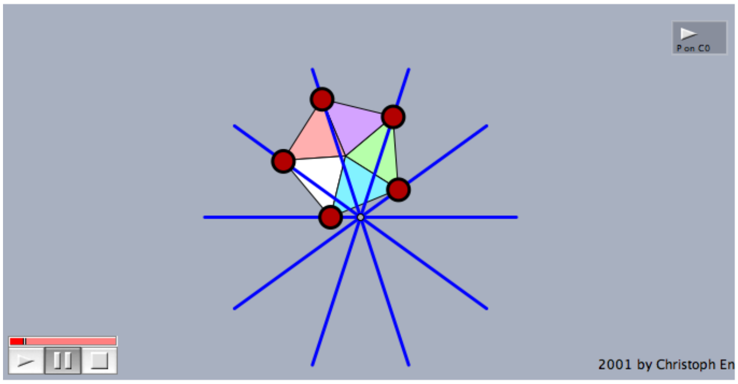
a. Cadena de triángulos

Descripción: Movimiento circular de una cadena de triángulos. Aunque los triángulos giran, sus vértices describen segmentos rectilíneos.



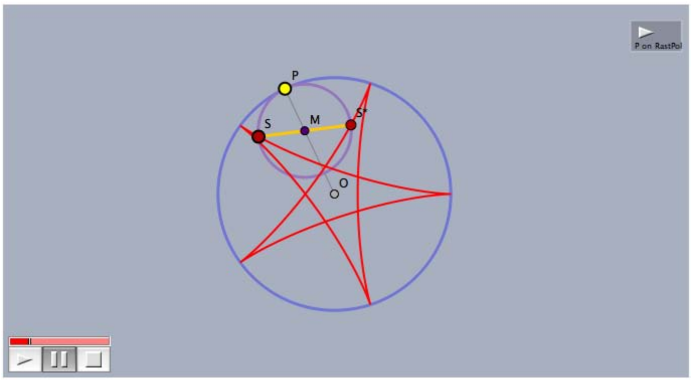
b. El pentágono que gira

Descripción: Los vértices de este pentágono en movimiento se mueven sobre líneas rectas.



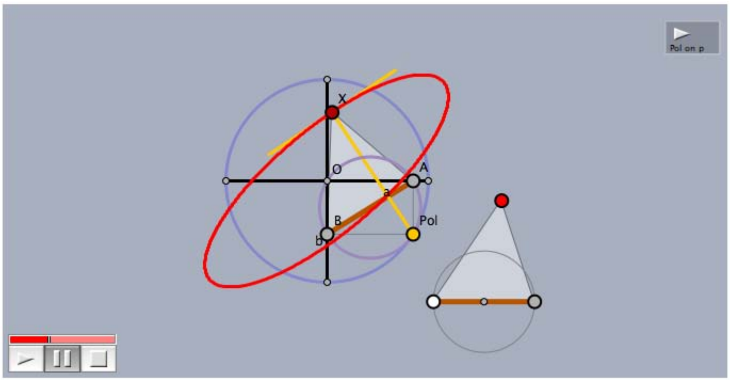
c. Cicloide

Descripción: Epicicloide generado mediante una construcción en movimiento.



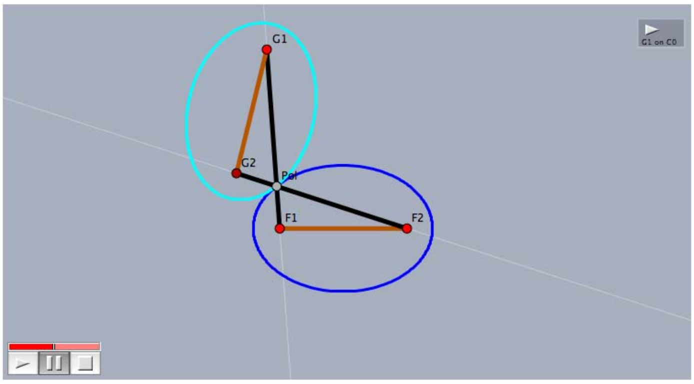
d. Generación de una elipse

Descripción: Construcción cinemática para crear una elipse. Si se mueven dos de los vértices de un triángulo sobre los ejes de coordenadas, el tercer vértice describe una elipse. Puedes alternar el triángulo inicial y el resultado será siempre el mismo.

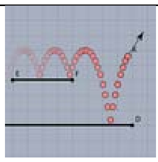
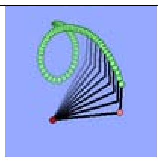
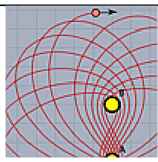
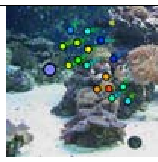
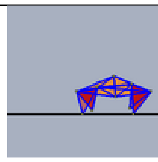


e. Movimiento rotatorio de dos elipses

Descripción: El movimiento de una elipse que rueda sobre otra se puede simular a partir de una barra en movimiento que arrastra a un mecanismo apropiado.

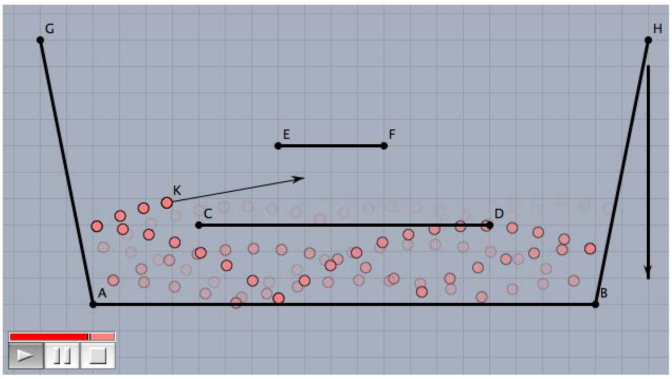


7. Simulaciones

				
1	2	3	4	5

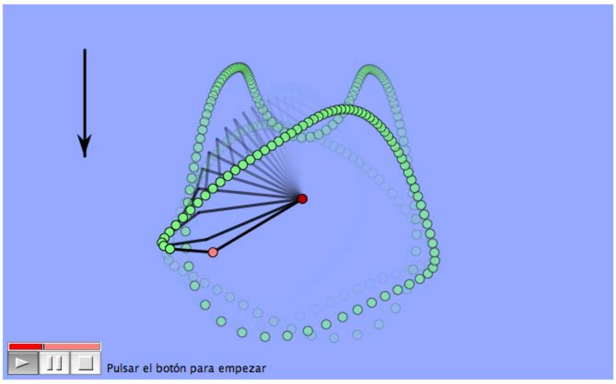
a. Una pelota que rebota

Descripción: A pesar de las apariencias, se consigue fácilmente un comportamiento caótico.



b. El péndulo doble

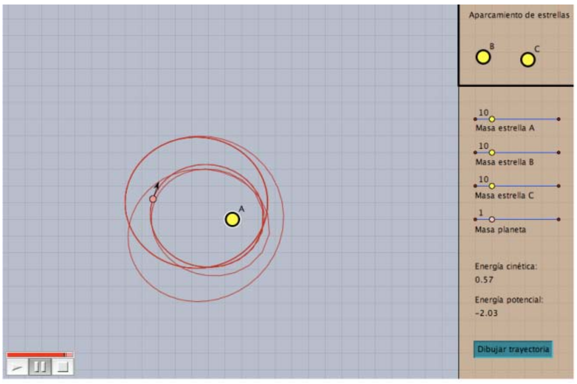
Descripción: Simulación de un péndulo doble. Puedes alterar la posición inicial de los puntos, es decir, la longitud y el punto de suspensión de cada péndulo.



c. El movimiento de los planetas

Descripción: Simulación del movimiento de un planeta en el campo gravitatorio generado por varias estrellas (soles). Puedes activar las estrellas moviéndolas a la zona principal, o alterar sus masas y la del planeta mediante los deslizadores laterales.

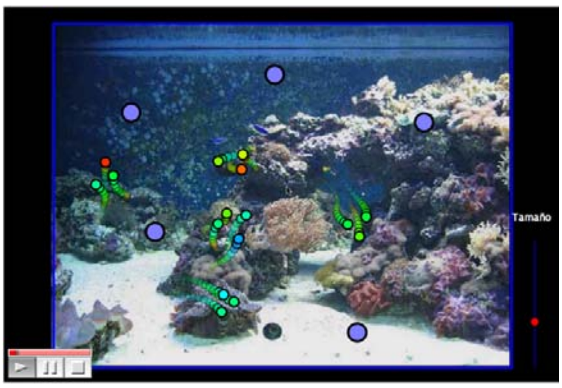
También puedes mostrar el trazado del movimiento, así como modificar la velocidad y posición iniciales. Pulsa PLAY para comenzar.



d. Simulación del movimiento de un banco de peces

Descripción: La simulación sigue tres sencillas reglas que se aplican a todos los miembros del banco:

- Avanzar
- Evitar los vecinos
- Nadar en dirección al centro de gravedad de sus k vecinos más próximos (el número k se puede cambiar)



e. Simulación de un robot

Descripción: La totalidad de la simulación se ha construido usando muelles, masas y paredes elásticas. Si lo deseas, puedes arrastar cualquier punto con el ratón e incluso alterar la forma del robot.