

Políedres

Josep Rey, Manel Udina i Sebastià Xambó

Resum

Una descripció de les propietats més rellevants dels políedres regulars, arquimedians i de Catalan, amb èmfasi en la dualitat. Acabem amb la presentació dels calidoscopis deltoidals.

1 Políedres regulars

També anomenats *sòlids platònics*, les seves cares són polígons regulars i els seus vèrtexs tenen igual configuració (Fig. 1 i Taula 1).

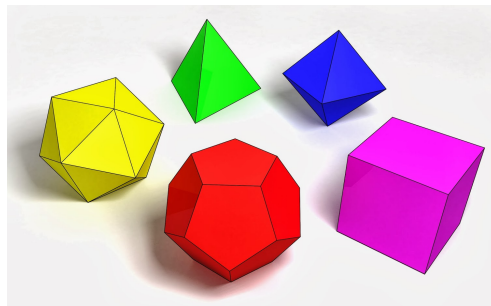


Figura 1: Sòlids platònics: $P4$ tetràedre (verd), $P6$ hexàedre o cub (lila), $P8$ octàedre (blau), $P12$ dodecàedre (vermell), $P20$ icosaèdre (groc). En els *Elements* d'Euclides es demostra que són els únics políedres regulars possibles. Les formes prefixades *tetra*, *hexa*, *octa*, *dodeca* i *icosa* provenen dels noms grecs per a 4, 6, 8, 12 i 20.

Nom	c	C	A	V	v
$P4$	3	4	6	4	3
$P6$	4	6	12	8	3
$P8$	3	8	12	6	4
$P12$	5	12	30	20	3
$P20$	3	20	30	12	5

Taula 1: c , costats d'una cara; C , cares; A arestes; V , vèrtexs; v , arestes concurrents en un vèrtex. La fila de $P6$ llegida de dreta a esquerra és la fila de $P8$. I anàlogament amb $P12$ i $P20$. La fila de $P4$ es llegeix igual del dret que del revés. Veurem que això és una manifestació que $P6$ i $P8$ són duals, i anàlogament $P12$ i $P20$, mentre que $P4$ és autodual.

2 Políedre dual

Moltes vegades es defineix el dual P' d'un políedre regular P com el políedre de vèrtexs els centres de les cares de P (Fig. 2). El nombre de vèrtexs de P' és igual al nombre de cares de P i recíprocament.



Figura 2: Duals P' dels políedres platònics P . Això confirma que $P4'$ és un $P4$, que $P6'$ és un $P8$ i $P8'$ un $P6$, i que $P12'$ és un $P20$ i $P20'$ un $P12$. En particular, si P és un dels cinc políedres regulars, P'' és un P , però una versió reduïda del P inicial. Per exemple, en el cas de $P4$, el volum de $P4'$ és $1/27$ del del $P4$ inicial.

Afinarem una mica més la definició de políedre dual a fi d'aconseguir que el dual del dual sigui el políedre de partida. En els políedres regulars podem distingir l'esfera inscrita (tangent a les cares del políedre) i la circumscrita (que passa pels vèrtexs del políedre). Hi ha una esfera intermèdia que és tangent a les arestes del políedre. Si considerem el políedre generat per les arestes que són perpendiculars a les del políedre inicial i tangents a l'esfera esmentada tindrem una altra definició de políedre dual, diguem-ne P^* .

Il·lustrem aquesta dualitat amb les imatges de la Figura 3, en què es mostra l'autodualitat del tetràedre, la dualitat entre l'octàedre i el cub i la dualitat entre l'icosàedre i el dodecàedre.

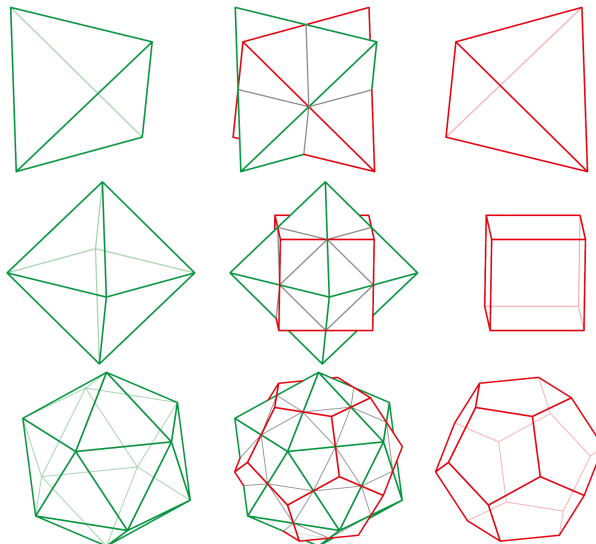


Figura 3: Autodualitat del tetràedre, dualitat del cub i l'octàedre, i dualitat del dodecàedre i l'icosàedre.

D'aquesta manera l'esfera intermèdia és coincident per un políedre i el seu dual i els punts de

tangència són els punts on es creuen perpendicularment les arestes del políedre i del seu dual. En els políedres regulars aquest punts són sempre els punts mitjos de les arestes. Aquesta definició de dual s'aplicarà també als políedres semiregulars o arquimedians.

Les simetries del políedre dual coincideixen amb les del políedre original.

3 Políedres arquimedians

Els políedres semiregulars (arquimedians), 13 en total, són els que tenen per cares polígons regulars, no necessàriament iguals, i que tenen tots els vèrtexs amb la mateixa configuració. Alguns d'ells s'obtenen escapçant els políedres regulars. Entre els políedres arquimedians n'hi ha dos, qualificats com a "xatos", que no tenen plans de simetria i no es poden veure amb els calidoscòpis.

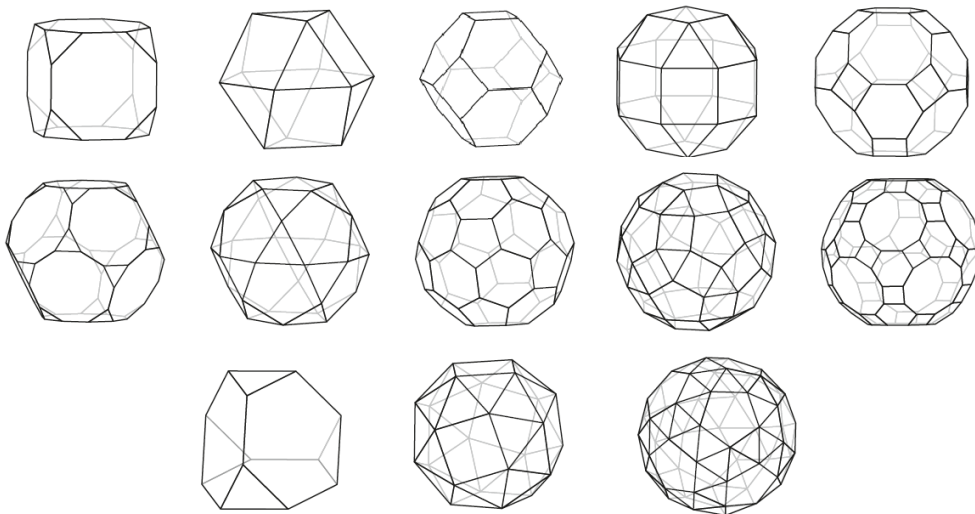


Figura 4: Primera fila: políedres arquimedians amb les simetries de l'octàedre. Segona fila: políedres arquimedians amb les simetries de l'icosàedre. Tercera fila: tetràedre escapçat, cub xato i dodecàedre xato.

Els políedres arquimedians no tenen esfera inscrita perquè les distàncies al centre de dues cares diferents no són iguals. Tenen, això sí, esfera circumscrita, perquè les distàncies dels vèrtexs al centre són totes iguals. En aquests políedres també ens podem fixar en l'esfera tangent a les arestes, i el dual d'un políedre arquimedià tindrà les arestes perpendiculars a les arestes del políedre original (i tangents a l'esfera esmentada), justament en el punt de tangència. Aquest punt és el punt mig de l'aresta del políedre arquimedià però no necessàriament el punt mig de l'aresta del políedre dual.

4 Políedres de Catalan

Pel fet que tots els vèrtexs dels arquimedians són tots iguals, els seus duals (políedres de Catalan) tenen totes les cares iguals, però no són polígons regulars. Entre ells destaquem el dodecàedre ròmbic, dual del cuboctàedre i el triacontàedre ròmbic, dual de l'icosidodecàedre, que són les seccions dels calidoscopis ròmbics del MMACA.

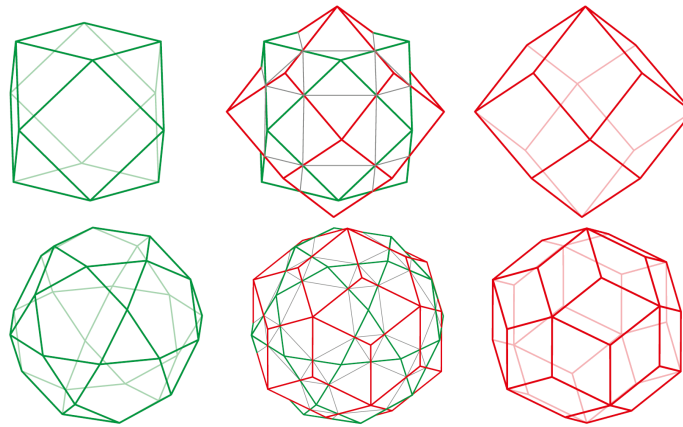


Figura 5: Primera fila: dualitat cuboctàedre – dodecàedre ròmbic. Segona fila: dualitat icosidodecàedre – triacontàedre ròmbic (el prefix grec *triaconta* significa trenta).

És d'interès observar que els políedres de *Catalan* sembla que hagin perdut “regularitat”, ja que les cares no són polígons regulars. Però, d'una banda, les seves cares són totes iguals i, de l'altra, els angles dièdrics entre dues cares qualssevol són també iguals (el fet que les cares dels arquimedians siguin polígons regulars i que tots els vèrtexs dels políedres arquimedians siguin iguals es tradueix en aquesta notable propietat). Es tracta doncs d'una regularitat “oculta”.

Una altra propietat dels políedres de Catalan és que generen angles sòlids que són divisors enters de l'espai (o, equivalentment, de l'esfera), propietat que és característica dels políedres regulars. Els políedres regulars divideixen l'esfera en 4, 6, 8, 12 o 20 parts iguals. Els políedres de Catalan la poden dividir en 24, 30, 48, 60 o 120.

En aquesta exposició hem volgut fer èmfasi en la dualitat. Podrem comprovar que les peces generadores d'un políedre i el seu dual tenen les arestes perpendiculars. En el disseny de les peces, de Josep Rey Nadal, s'ha optat gairebé sempre per ajustar la grandària del dual seguint la definició esmentada.

5 Calidoscopis deltoidals

En aquesta exposició presentem en primícia els *calidoscopis deltoidals*, que s'obtenen en ajuntar dos calidoscopis minimalis per la seva *hipotenusa* (la cara oposada a l'angle dièdric recte). Si ho fem amb el calidoscopi minimal tetraèdric, s'obté el *calidoscopi ròmbic cuboctaèdric* que és un dels tres calidoscopis ròmbics que formen part de l'*exposició permanent* del MMACA.

El *calidoscopi icositetraèdric deltoidal* és la unió de dos cuboctaèdrics minimalis (1/48). Per tant, *multipliqua per 24*. Els angles dièdrics entre les seves cares són 3 de 90° i un de 120°. La secció perpendicular a la intersecció dels plans diagonals d'aquest calidoscopi és la cara de l'icositetràedre deltoidal (dual del rombicuboctàedre).

El *calidoscopi hexacontaèdric deltoidal* és la unió de dos minimalis icosidodecaèdrics (1/120). *Multipliqua per 60*. Els angles dièdrics entre les seves cares són de 90°, 120°, 90° i 72°. La secció anàloga d'aquest calidoscopi és la cara de l'hexacontàedre deltoidal (dual del rombicoidodecaèdre). Els pr

Les dues taules següents llisten característiques dels políedres que es poden “veure” en aquests calidoscopis a partir de les peces a disposició dels visitants. El prefix grec *hexaconta* significa seixanta.

Políedre P	$C = V^*$	A	$V = C^*$	Políedre P^*
Cub	6	12	8	Octàedre
Cup escapçat	14	36	24	Octàedre triakis
Cuboctàedre	14	24	12	Dodecàedre ròmbic
Octàedre escapçat	14	36	24	Cub tetrakis
Petit rombicuboctàedre	26	48	24	Icositetràedre deltoidal
Gran rombicuboctàedre	26	72	48	Dodecàedre disdiakis*

Taula 2: Calidoscopi icositetraèdric deltoidal. * També anomenat Octàedre hexakis.

Políedre P	$C = V^*$	A	$V = C^*$	Políedre P^*
Dodecàedre	12	30	20	Icosàedre
Dodecàedre escapçat	32	90	60	Icosàedre triakis
Icosidodecaèdre	32	60	30	Triacontàedre ròmbic
Icosàedre escapçat	32	90	60	Dodecàedre pentakis
Petit rombicoidodecaèdre	62	120	60	Hexacontàedre deltoidal
Gran rombicoidodecaèdre	62	180	120	Hexacontàedre disdiakis

Taula 3: Calidoscopi hexacontaèdric deltoidal.

Bibliografia

- [1] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley, México, 1971.
- [2] M. Wenninger, *Polyhedron models*. Cambridge University Press, 1971.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*. Dover, 1973.
- [4] M. Wenninger, *Spherical models*. Cambridge University Press, 1979.
- [5] G. Guillén Soler, *El mundo de los poliedros*. Síntesis, 1991.
- [6] D. I. McCooley, “Visual polyhedra,” 2021. <http://dmccooey.com/polyhedra/>.