Nombre:..

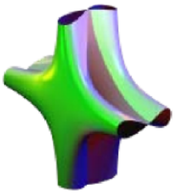
Fecha:..

ImaginaryBCN

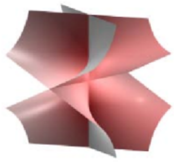
Cuaderno de seguimiento
Actividad: Ecuaciones y Singularidades I

◆ Formas y ecuaciones de la exposición

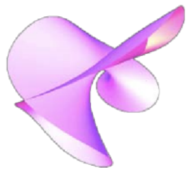
¿Cuáles de las siguientes figuras contienen el punto $(1,1,1)$?



$6x^2 = 2x^4 + y^2z^2$



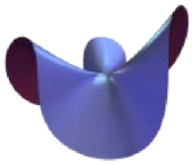
$x^2 - y^2z^2 = 0$



$x^2 = y^2z^2 + z^3$

¿Qué figura tiene la ecuación de menor grado?

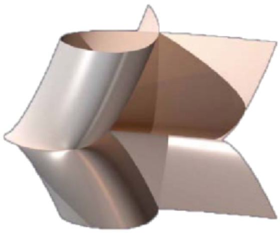
$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$



$x^3 + y^2z^3 + yz^4 = 0$

$x^2yz + xy^2 + y^3 + y^3x = x^2z^2$

¿Cuál es el coeficiente del monomio de grado mayor?



$$8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0$$

Material creado por Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater y Emilio José Sánchez con la colaboración de:

MUHBA MUSEU D'HISTÒRIA DE BARCELONA
Real Sociedad Matemática Española
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Generalitat de Catalunya Departament d'Economia i Coneixement
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Institut de Ciències de l'Educació
fMe

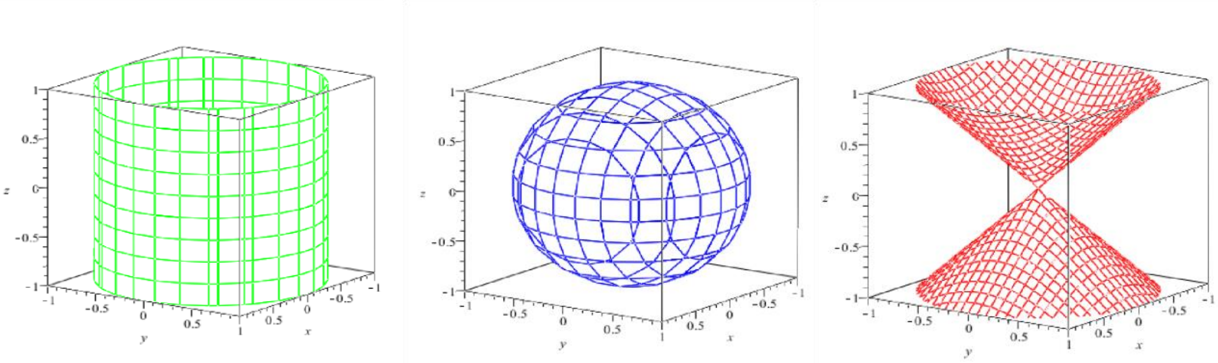
◆ Forma y fórmula

Ecuaciones para dibujar figuras

Las soluciones de una ecuación nos dan un conjunto de puntos que forman una figura. En el plano, $x^2 + y^2 = R^2$ es la ecuación de una circunferencia de radio R. ¿Puedes adivinar a qué figura del espacio corresponde cada ecuación?

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad x^2 + y^2 = z^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

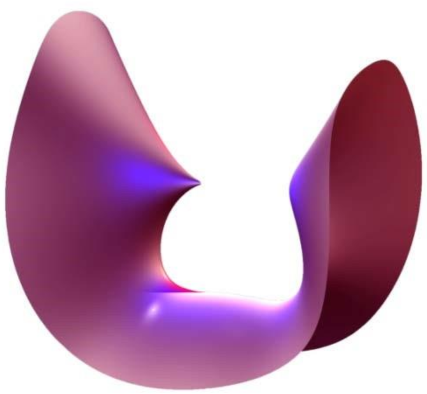
Puedes cortarlas con planos horizontales sustituyendo, por ejemplo con, $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ o $z = 1$, en las ecuaciones, y analizar la curva que se obtiene.



¡Represéntalas utilizando el SURFER! Recuerda que has de introducir en la línea de comandos la ecuación igualada a cero, por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$, la tendrás que escribir como:

$$x\text{^}2 + y\text{^}2 - 1.$$

◆ Singularidades



Los puntos singulares -o singularidades- se identifican de forma visual, porque la superficie no es lisa ni suave, como, por ejemplo, una punta o un pliegue. La punta de la izquierda de la superficie *Tú y Yo* es una singularidad, pero la montaña lisa de la derecha es un punto regular.

Es posible que incluso seas capaz de reconocer las singularidades en una superficie observándola con cuidado. Pero, imagínate ahora que no te dejan tocar la superficie ni verla. ¿Cómo podrías encontrar sus singularidades? Las singularidades se definen como todos aquellos puntos de la superficie que anulan las derivadas parciales de su ecuación: las derivadas son una manera de ver cómo varía una función. Este método permite encontrar las singularidades con papel y bolígrafo, sin ni siquiera tener cerca la superficie, únicamente mediante su ecuación.

Empieza con la figura del *Limón*: $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$. Si derivas

$$f(x,y,z) = x^2 + z^2 - y^3(1-y)^3$$

respecto las variables x, y y z, obtienes:

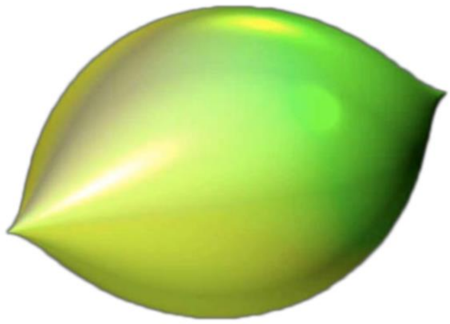
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -3y^2(1-y)^3 + 3y^3(1-y)^2 = 3y^2(1-y)^2(2y-1)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z$$

Exigiendo que se anulen, halla los puntos (x, y, z) que cumplen las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2(1-y)^2(2y-1) = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$



¿Qué puntos has encontrado?

(, ,)

(, ,)

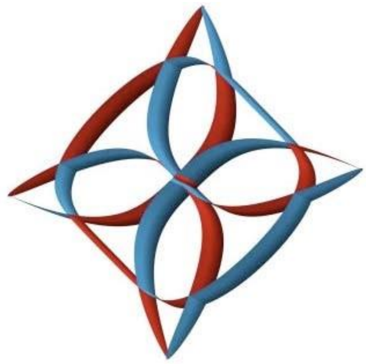
(, ,)

Comprueba cuáles de los puntos obtenidos son singularidades del *Limón*, ¿cuáles pertenecen a la superficie? Sólo necesitas comprobar si son solución de la ecuación del *Limón*:

$$x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$$

Señala sobre la figura cuales crees que son. ¡A simple vista ya habías acertado que las dos puntas del *Limón* son una singularidad! ¿Crees que el punto $0, \frac{1}{2}, 0$ es también una singularidad?

◆ ¡Crea con el SURFER!



$0 = (x^2 + y^6 - 1) \cdot (2x^3 + 4y) \cdot (2y^3 + 2x) \cdot (2x^3 - 4y) \cdot (2y^3 - 2x)$

Inventa una ecuación que tenga un grado bajo, por ejemplo 2, y otra que tenga un grado elevado, por ejemplo 5. Observa cómo son las superficies que has inventado con el programa SURFER. ¿Es verdad que la ecuación de mayor grado da lugar a una superficie más complicada?

El cono cuadrático y su singularidad:

Entrando en la galería "singularidades simples" se encuentra el cono cuadrático. Selecciónalo y fíjate qué ocurre cuando varías el valor de a:

- Si eliges un valor de a menor que 0.5 obtienes dos trozos de superficie separados. Se llama hiperboloide de dos hojas.
- En cambio, si eliges un valor de a mayor que 0.5, tendrás un trozo de superficie, que se llama hiperboloide de una hoja.

¿Te has fijado qué ocurre? Una pequeña variación en la ecuación provoca que tengas tres superficies completamente diferentes, y el paso intermedio ¡es una superficie singular!

Atrévete a hacer cambios:

Como ya sabes, si escribes una ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$ obtienes un plano; ¿qué ocurre cuando pones una superficie de grado 2? Por ejemplo $y - 2xz = 0$. Fíjate en el resultado; es una superficie encorvada. Escribe $y - 200xz = 0$; ¿qué ocurre con la superficie? ¿Y si ponemos $100y - 2xz = 0$? Como ya habrás intuido, hay un monomio que la hace encorvar y otro que la allana. Poniendo unos coeficientes elevados en una parte de la ecuación potenciamos los efectos de unos monomios u otros.

Elige cualquier superficie de la galería “Superficies Notables” y transfórmala. Por ejemplo, ¿qué puedes cambiar en *Destello (Distel)* para obtener sólo cuatro puntas? ¿Qué coeficiente debes aumentar, o cuál tienes que eliminar?

Fíjate en la figura de arriba que recuerda un rosetón gótico. ¿Te atreves a diseñar tu propio rosetón?

<u>Acuérdate:</u>

Lo puedes descargar el SURFER gratuitamente desde la página web:

www.imaginary-exhibition.com/surfer?lang=es