Nom: ....

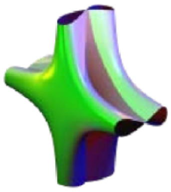
Data: ....

ImaginaryBCN

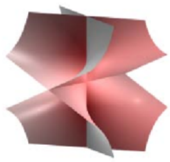
Quadernet d'acompanyament
Activitat: Equacions i Singularitats I

◆ Formes i equacions de l'exposició

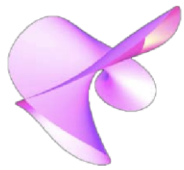
Quines d'aquestes figures contenen el punt $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$?



$6x^2 = 2x^4 + y^2z^2$



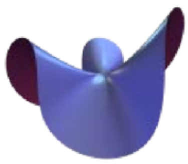
$x^2 - y^2z^2 = 0$



$x^2 = y^2z^2 + z^3$

Quina d'aquestes figures té l'equació amb grau més baix?

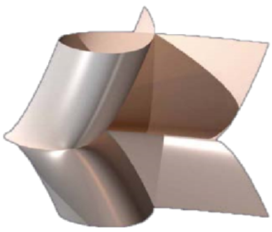
$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$



$x^3 + y^2z^3 + yz^4 = 0$

$x^2yz + xy^2 + y^3 + y^3x = x^2z^2$

Quin és el coeficient del monomi de grau més alt de l'*Encenall*?



$$8z^9 - 24x^2z^6 - 24y^2z^6 + 36z^8 + 24x^4z^3 - 168x^2y^2z^3 + 24y^4z^3 - 72x^2z^5 - 72y^2z^5 + 54z^7 - 8x^6 - 24x^4y^2 - 24x^2y^4 - 8y^6 + 36x^4z^2 - 252x^2y^2z^2 + 36y^4z^2 - 54x^2z^4 - 108y^2z^4 + 27z^6 - 108x^2y^2z + 54y^4z - 54y^2z^3 + 27y^4 = 0$$

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

MUHBA MUSEU D'HISTÒRIA DE BARCELONA
Real Sociedad Matemática Española
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Generalitat de Catalunya Departament d'Economia i Coneixement
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Institut de Ciències de l'Educació
fMe

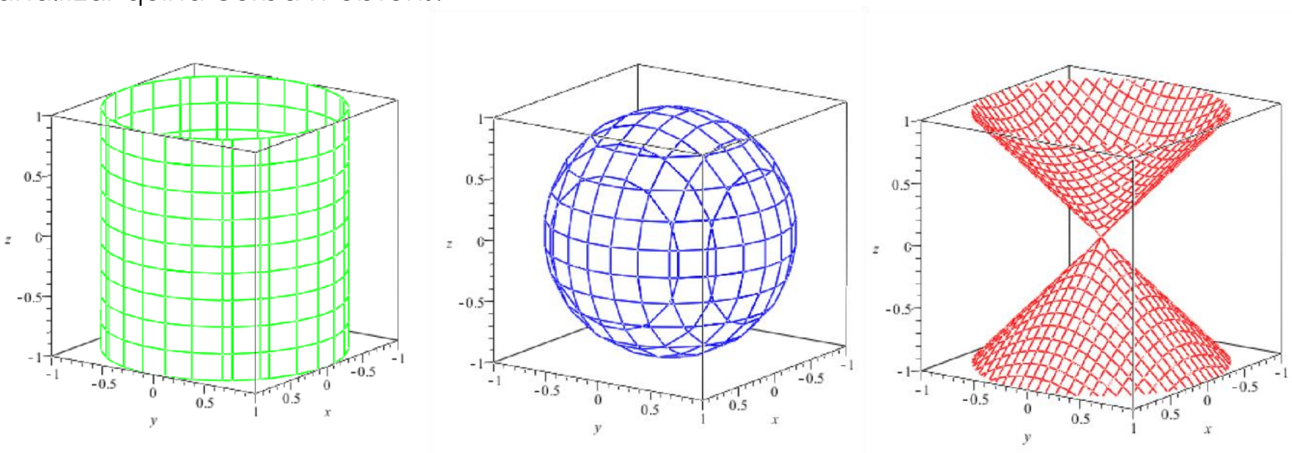
♦ Forma i fórmula

Equacions per a dibuixar figures

Les solucions d’una equació ens donen un conjunt de punts, que formen una figura. En el pla, $x^2 + y^2 = R^2$ és l’equació d’una circumferència de radi R. Pots endevinar a quina figura de l’espai correspon cada equació?

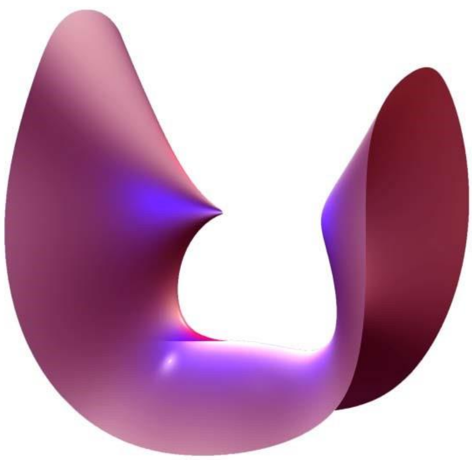
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad x^2 + y^2 = z^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Pots tallar-les amb plans horitzontals substituint, per exemple, $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ o $z = 1$ en les equacions, i analitzar quina corba n’obtens.



Representa-les fent servir el SURFER! Recorda que has d’introduir a la barra de comandes l’equació igualada a zero, per exemple, $x^2 + y^2 = 1$, l’hauràs d’escriure com $x^\wedge 2 + y^\wedge 2 - 1$.

♦ Singularitats



Els punts singulars –o singularitats– s’identifiquen de forma visual, perquè la superfície no és llisa ni suau com, per exemple, una punxa o un plec. La punxa de l’esquerra de la superfície *Tu i Jo* és una singularitat, però la muntanya llisa de la dreta és un punt regular.

És possible que fins i tot siguis capaç de reconèixer les singularitats en una superfície observant-la amb cura. Però, imagina’t ara que no et deixen tocar la superfície ni veure-la. Com podries trobar les seves singularitats? Les singularitats es defineixen com tots aquells punts de la superfície que anul·len les derivades parcials de la seva equació: les derivades són una manera de veure com varia una funció. Aquest mètode permet trobar les singularitats amb paper i bolígraf, sense ni tan sols tenir a prop la superfície, únicament mitjançant la seva equació.

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

Comença amb la figura de la *Llimona*: $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$. Si derives

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^3(1-y)^3$$

amb relació a les variables x, y i z, obtens:

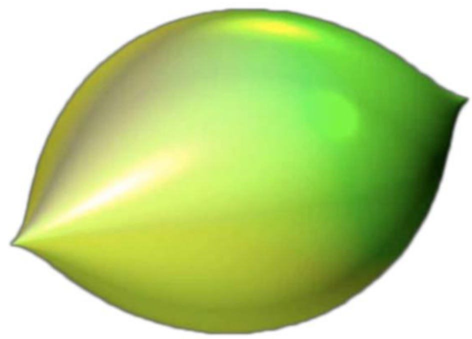
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -3y^2(1-y)^3 + 3y^3(1-y)^2 = 3y^2(1-y)^2(2y-1)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z$$

Ara imposa que s'anul·lin. Troba els punts (x, y, z) que compleixin les tres equacions:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2(1-y)^2(2y-1) = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$



Quins punts has trobat?

(, ,)

(, ,)

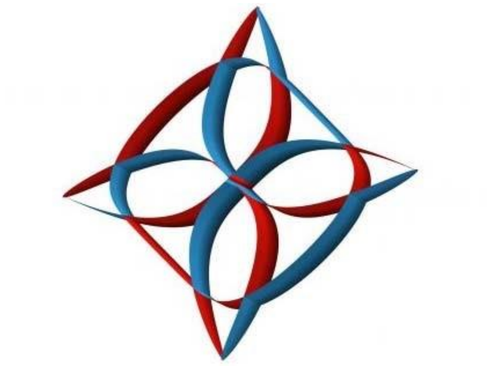
(, ,)

Comprova quins dels punts obtinguts són singularitats de la *Llimona*, quins pertanyen a la superfície? Només cal que comprovis si són solució de l'equació de la *Llimona*:

$$x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$$

Marca sobre la figura quins punts creus que són. A simple vista ja havies endevinat que les dues punxes de la *Llimona* són una singularitat! Creus que el punt $(0, \frac{1}{2}, 0)$ és també una singularitat?

◆ Crea amb el SURFER!



$0 = (x^2 + y^6 - 1)\cdot(2x^3 + 4y)\cdot(2y^3 + 2x)\cdot(2x^3 - 4y)\cdot(2y^3 - 2x)$

Inventa una equació que tingui un grau baix, per exemple 2, i una altra que tingui un grau elevat, per exemple 5. Observa com són les superfícies que has inventat amb el programa SURFER. És veritat que l'equació de grau elevat dóna lloc a una superfície més complicada?

El con quadràtic i la seva singularitat:

Entra a la galeria; a la galeria "singularitats simples" es troba el con quadràtic. Selecciona'l i fixa't què passa quan varies el valor de a:

- Si tries un valor de a més petit que 0.5 veuràs que tens dos trossos de superfície separats. S'anomena hiperboloide de dos fulls.
- En canvi, si tries un valor de a més gran que 0.5, tindràs un sol tros de superfície, que s'anomena hiperboloide d'un full.

T'has fixat què passa? Una petita variació a l'equació provoca que tinguis tres superfícies completament diferents, i el pas intermedi és una superfície singular!

Atreveix-te a fer canvis:

Com ja saps, si escrius una equació del tipus $ax + by + cz + d = 0$, tens un pla; què passa quan poses una superfície de grau 2? Per exemple $y - 2xz = 0$. Fixa't en el resultat; és una superfície encorbada. Ara escriu $y - 200xz = 0$; què passa amb la superfície? I si poses $100y - 2xz = 0$? Com ja te n'hauràs adonat, hi ha un monomi que la fa encorbar i un altre que fa l'efecte d'aplanar-la. Posant uns coeficients elevats a una part de l'equació potenciem els efectes d'uns monomis o d'altres.

Tria qualsevol superfície de les galeries "Superficies Notables" i transforma-la. Per exemple, què pots canviar en *Espurna* (*Distel*) per obtenir només quatre punxes? Quin coeficient has d'augmentar, o quin has d'eliminar?

Fixa't en la figura de dalt que recorda un rosetó gòtic. T'atreveixes a dissenyar el teu propi rosetó?

<u>Recorda:</u>

Et pots descarregar el SURFER gratuïtament des de la pàgina web:

www.imaginary-exhibition.com/surfer?lang=es