Nom: ..............................................................................................................................

Data: ..............................................................................................................................

# ImaginaryBCN

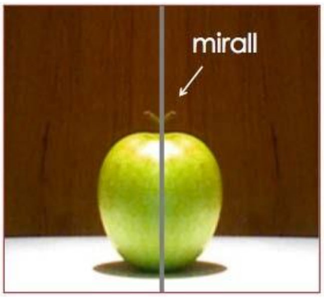
## Quadernet d'acompanyament
## Activitat: Simetria i coordenades

## ◆ El concepte de simetria

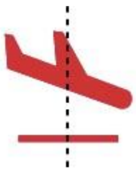
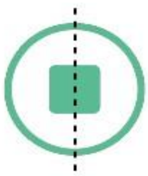
### Simetria axial

| | |
|---|---|
|   | Una figura plana té **simetria axial** quan es pot doblegar per la meitat i les dues meitats coincideixen exactament. La línia de plec s'anomena **eix de simetria**. Per exemple, la papallona és simètrica respecte de l'eix puntejat. |

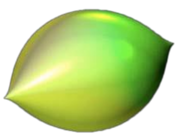
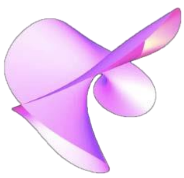
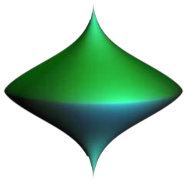
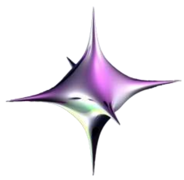
### Simetria especular

| | |
|---|---|
|   | Una figura tridimensional té **simetria especular** quan es pot tallar en dues parts de tal manera que una és el reflex de l'altra en un mirall. El mirall és anomenat **pla de simetria**. Per exemple, si talles una poma per la meitat i la col·loques davant un mirall, tornes a tenir la poma sencera. |

1. Encercla les figures que tenen simetria axial.

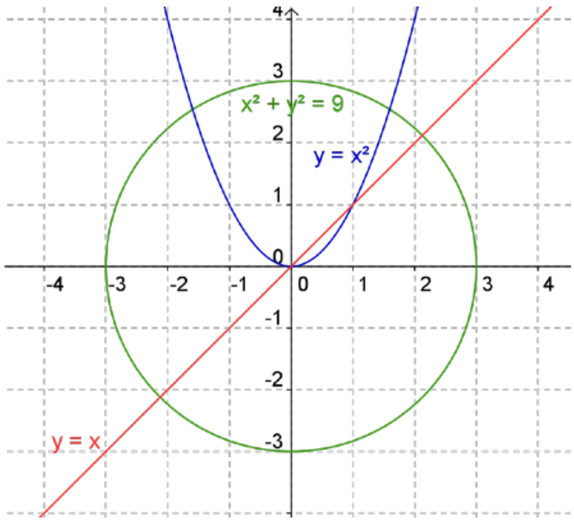
2. Encercla les figures que tenen simetria especular.

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

## ◆ Llegir simetries a les equacions

Les solucions d'una equació donen un conjunt de punts a l'espai, que formen una figura.




Les equacions, a part de servir per a distingir les diferents figures, també en mostren algunes propietats com la simetria axial. Fixa't en les figures de l'esquerra.

Quina equació té cadascuna? Identifica'n alguns punts com $(3,0)$, $(1,1)$, $(0,0)$, $(-1,1)$; a quines figures pertanyen? Comprova que són solucions de les equacions corresponents.

| Figura i equació | $(3,0)$ | $(1,1)$ | $(0,0)$ | $(-1,1)$ |
|---|---|---|---|---|
| **Recta:** $y = x$ | No: $0 \neq 3$ | Sí: $1 = 1$ | | |
| **Circumferència:** | | | | |
| **Paràbola:** | | | | |

Fixa't ara en les simetries respecte de l'eix coordenat vertical i completa:
el punt simètric de (3,0) és ( , ); el punt simètric de (1,1) és ( , ); el punt simètric de (0,0) és ( , ); i el punt simètric de (-1,1) és ( , ).
Dibuixa els punts simètrics i descobreix la llei: el punt simètric d'un punt (x,y) és el ( , ).
Pren un punt d'una figura, per exemple el (1,1) de la recta o de la paràbola, i comprova si el seu punt simètric també pertany a la figura. En quines figures passa això?

Tenir simetria respecte de l'eix coordenat vertical $x = 0$ vol dir que l'equació no canvia en substituir $(x, y)$ per $(-x, y)$. Per exemple en el cas de la paràbola, es compleix $y = (-x)^2 = x^2$, i conclous que té la simetria buscada. Però en el cas de la recta, l'equació que ens surt quan fem el canvi és $y = -x$ ; dibuixa aquesta nova recta. Què passarà amb la circumferència? Raona-ho.

Fixa't ara en les simetries respecte de l'eix coordenat horitzontal. Tenir simetria respecte de l'eix horitzontal $y = 0$ vol dir que l'equació no canvia en substituir $(x, y)$ per $(x, -y)$. Quines figures creus que no variaran? Quines sí que ho faran? Escriu les equacions i després intenta dibuixar-les.

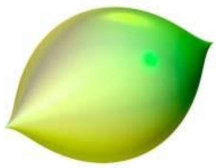
# ◆ L'abecedari de les equacions

Les equacions algebraiques són unes fórmules molt especials; només efectuen operacions elementals: multiplicacions i sumes. Les equacions es poden descompondre com una suma de monomis. En un monomi hi distingim els elements següents: el signe, el coeficient, les variables, els exponents i el grau:

$$2xy^2z = +2x^1y^2z^1$$

El grau del monomi és la suma dels exponents de les variables que el componen:

$$grau = 1 + 2 + 1 = 4$$

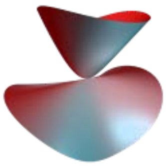


El grau de l'equació és el grau del monomi de grau més elevat. Per exemple l'equació de *Llimona* $x^2 + z^2 = y^3 1 - y^3$ desenvolupada queda $x^2 + z^2 - y^3 + 3y^4 - 3y^5 + y^6 = 0$. Així té dos monomis de grau 2: $x^2$ i $z^2$; un monomi de grau 3: $-y^3$; un monomi de grau 4: $3y^4$; un monomi de grau 5: $-3y^5$ ; i un monomi de grau 6: $y^6$. En conclusió, té grau 6.

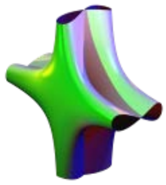
Practica el llenguatge de l'àlgebra contestant les preguntes següents:

1. Quina d'aquestes figures té l'equació de grau més baix?

$(xy - z^3 - 1)^2 = (1 - x^2 - y^2)^3$



$x^2 + y^2z = z^2$

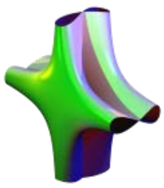


$6x^2 = 2x^4 + y^2z^2$

2. Quin és el coeficient del monomi de grau més elevat de Cavallet de mar?

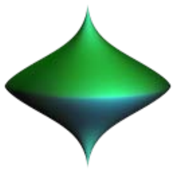
$(x^2 - y^3)^2 = (x + y^2)z^3$

3. Quina d'aquestes figures no passa per l'origen de coordenades (0,0,0)?

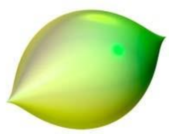


2

$xy - z^3 - 1 = (1 - x^2 - y^2)^3$



$60\,(x^2 + y^2)\,z^4 = (60 - x^2 - y^2 - z^2)^3$



$x^2 + z^2 = y^3\,(1 - y)^3$

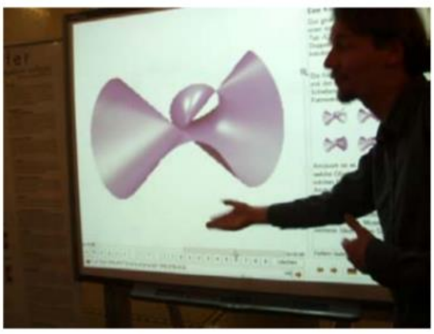
## ◆ Crea amb el SURFER!

**Inventa una equació** que tingui un grau baix, per exemple 2, i una altra que tingui un grau elevat, per exemple 5. Comprova com són les superfícies que has inventat amb el programa SURFER. És veritat que l'equació de grau elevat dóna lloc a una superfície més complicada?

$0 = (x^2 + y^6 - 1) \cdot (2x^3 + 4y) \cdot (2y^3 + 2x) \cdot (2x^3 - 4y) \cdot (2y^3 - 2x)$

**Imagina que vols crear una superfície amb una punxa** com la de *Llimona*, és a dir una punxa que delimita la superfície només a un costat (que la podries resseguir amb el dit i punxar-t'hi!): de quin grau creus que haurà de ser-ne l'equació? Per investigar-ho, completa la taula següent visualitzant les figures amb el SURFER:

| Equació | Grau | Punxa tipus *Llimona* | Punxa d'altres tipus |
|---|---|---|---|
| $x^2 + z^2 - y^3(1 - y)^3 = 0$ | | | |
| $x^2 + z^2 - y^3 = 0$ | | | |
| $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ | | | |
| $x^2 + z^2 - 100y^2 = 0$ | | | |
| $100x^2 + 100z^2 - y^2 = 0$ | | | |
| $x^2 + z^2 - y^2 + xz = 0$ | | | |
| $x^2 + z^2 - y^2 + y = 0$ | | | |



A quina conclusió has arribat? T'atreveixes a conjecturar que el mínim grau que és necessari per obtenir una punxa com la de *Llimona* és ☐

Material creat per Maria Alberich, Jordi Buendía, Ferran Dachs, Anna Sabater i Emilio José Sánchez amb el suport de:

MUHBA MUSEU D'HISTÒRIA DE BARCELONA
Real Sociedad Matemática Española
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
Generalitat de Catalunya Departament d'Economia i Coneixement
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH Institut de Ciències de l'Educació
fMe