benvinguda: «The challenge comes mostly from the achievements of my predecessors, especially the immediate one, Marta Sanz-Solé, who led the EMS in the last four years with incredible skills and commitment. She knew the society mechanisms to the minute details and steered its development in a way which was both diplomatic and strong. Her name associates with numerous achievements which the European mathematical community appreciated and enjoyed. The standards she set will be always on my mind.»

MS. Gràcies també a tu, per venir «tan d'hora, tan d'hora»!

Albert Avinyó
Editor de la *SCM/Notícies*

Premi Abel 2015

El 25 de març d'enguany, l'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres va decidir atorgar el premi Abel 2015 als matemàtics nord-americans John F. Nash Jr. i Louis Nirenberg. En paraules del seu president, Kirsti Strøm Bull, l'Acadèmia va decidir concedir el premi a aquests dos «gegants» de les matemàtiques del segle XX, per les seves importants contribucions a la teoria d'equacions en derivades parcials no lineals i les seves aplicacions a l'anàlisi geomètrica.

John F. Nash, nascut el 13 de juny de 1928 a l'estat nord-americà de Virgínia, va rebre també el premi Nobel d'Economia el 1994 pel seus treballs sobre la teoria de jocs i, l'any 2001, es va fer mundialment conegut arran de l'«oscaritzada» pel·lícula *A Beautiful Mind*, dirigida per Ron Howard, on s'explica part de la seva vida. Malauradament, John F. Nash i la seva dona Alicia van morir en un accident de trànsit a l'estat de Nova Jersey pocs dies després de la concessió del premi Abel.

A diferència de John F. Nash, Louis Nirenberg, nascut fa noranta anys al Canadà, sempre ha escrit la majoria dels seus articles en col·laboració amb altres matemàtics de tot el món. A més, ha estat un prolífic director de tesis, entre elles la de Xavier Cabré, professor ICREA pertanyent al Departament de Matemàtica Aplicada I de la UPC. Per aquest motiu, en Xavier va acceptar ràpidament el nostre oferiment d'escriure un article personal sobre en Louis.

Louis Nirenberg, gran mestre de les estimacions *a priori*

Les equacions en derivades parcials (EDP a partir d'ara) han estat i són una eina fonamental per a la modelització matemàtica de la natura i de les ciències socials. La propagació d'ones, la difusió de la calor, l'electromagnetisme, l'elasticitat, la dinàmica de fluids i de poblacions o les finances són exemples clars de la seva aplicabilitat. També han estat l'eix central del desenvolupament d'eines molt importants de la matemàtica, com les sèries de Fourier o l'anàlisi funcional. Ara bé, va ser durant la segona meitat del segle XX que el seu gran desenvolupament teòric les va portar a ser considerades per elles mateixes com una disciplina específica de les matemàtiques. I és en aquesta anomenada «edat d'or» de les EDP, que cal inscriure el treball matemàtic de Louis Nirenberg. Des dels seus treballs inicials als anys cinquanta fins a l'actualitat, en Nirenberg pot considerar-se un dels actors o artífexs principals d'aquest creixement de les EDP, tant des del punt de vista teòric com aplicat.

De l'any 1990 al 1994 vaig tenir la sort de dur a terme la meva tesi doctoral a l'Institut Courant de Ciències Matemàtiques sota la direcció de Louis Nirenberg. Puc dir, sense risc d'equivocar-me, que la meva manera de fer i entendre les matemàtiques és, en molt forta mesura, deguda a ell. En Nirenberg també és la persona que em va posar en contacte amb diversos matemàtics molt destacats que han tingut una forta influència en la meva carrera professional. D'aquells dies al Courant Institute recordo, amb una certa enyorança, l'ambient molt estimulant i agradable que es respirava i, en especial, una sala de la planta tretze on estudiants i professors (premis Abel inclosos) menjàvem, preníem cafè o parlàvem de matemàtiques tots plegats.

Breu apunt biogràfic

Louis Nirenberg va néixer a Hamilton, Canadà, ara fa tot just noranta anys. Després de la seva graduació a la Universitat de McGill, va marxar a un dels centres de recerca matemàtica més prestigiosos dels Estats Units, l'Institut Courant de Ciències Matemàtiques de la Universitat de Nova York, centre on ha desenvolupat tota la seva carrera matemàtica fins a la jubilació l'any 1999. L'Institut Courant té l'honor de ser la institució amb més premis Abel de tot el món. A més d'en Nirenberg, també l'han rebut Peter Lax el 2005, Srinivasa Varadhan el 2007 i Mikhaïl Grómov el 2009.

L'any 1949 va llegir la seva tesi doctoral *The Determination of a Closed Convex Surface Having Given Line Elements* sota la direcció de James J. Stoker. Ara bé, tal com diu en Nirenberg en alguna entrevista que li han fet, va ser Kurt O. Friedrichs, segon director de l'Institut després de Richard Courant, el matemàtic amb qui va tenir més tracte i el principal «culpable» del seu amor, que encara dura, per les desigualtats i les estimacions *a priori*, amor que s'ha transmès «genèticament» a molts dels seus alumnes i deixebles, entre els quals m'incloc.

Louis Nirenberg ha tingut quaranta-sis alumnes de doctorat, ha escrit gairebé dos-cents articles, amb més de deu mil cites. Només una vintena d'aquests articles han estat signats per ell sol. La llista dels seus col·laboradors és, per tant, llarga, però jo destacaria, per rellevància i quantitat de treballs conjunts, Henri Berestycki, Haïm Brezis i Luis Caffarelli. En paraules seves «una de les meravelles de les matemàtiques és anar a qualsevol lloc del món i trobar-te altres matemàtics, som una gran família». Encara avui, a la seva edat, en Louis viatja constantment. El seu país preferit per visitar és Itàlia.

La llista de guardons que ha rebut, a més de l'Abel d'enguany, és tambe extensa: el premi Bôcher de l'AMS el 1959; el premi Crafoord, concedit per l'Acadèmia Sueca de les Ciències, conjuntament amb Vladimir Arnold, el 1982; el premi Steele, també de l'AMS, el 1994; o la Medalla Chern el 2010.

Les seves contribucions matemàtiques, encara que totes tenen a veure amb les EDP, es poden dividir en quatre blocs, depenent del seu camp d'aplicació:

- Teoria general d'equacions en derivades parcials: teoremes de regularitat i simetria, principis del màxim, equacions de Monge-Ampère i completament no lineals i un llarg etcètera.
- Geometria diferencial: problemes de Weyl, de Minkowski i de Nirenberg.
- Anàlisi complexa: teorema de Newlander-Nirenberg, equacions de Monge-Ampère complexes.
- Anàlisi real: espais BMO, grau d'aplicacions VMO.

El problema de Weyl

Un dels problemes que millor mostra la forta relació entre les equacions en derivades parcials i la geometria diferencial és l'anomenat problema de les superfícies mínimes, també conegut com problema de les bombolles de sabó. Es vol conèixer la forma de la pel·lícula amb tensió superficial mínima que es forma quan es treu un filferro en forma de corba tancada d'un cubell que conté aigua amb sabó. En termes matemàtics es pot descriure de la següent manera: donats un domini fitat pla Ω i una funció $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$, cal trobar una funció $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que restringida a $\partial\Omega$ coincideixi amb φ i, de manera que la seva gràfica $(x, u(x))$ tingui àrea mínima. Si la pel·lícula de sabó és prou fina ($|Du|$ «petit»), el funcional d'àrea

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}\,dx$$

es pot aproximar per

$$|\Omega| + \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2\,dx$$

i, per tant, el problema d'optimització que cal resoldre és

$$\min_{u=\varphi \text{ a } \partial\Omega} \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2\,dx.$$

Fent ús de les equacions de primera variació (també dites d'Euler-Lagrange) es prova fàcilment que aquest problema és equivalent a trobar una funció harmònica u amb valors donats a la frontera:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{a } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

A causa del fet que en espais de dimensió infinita les boles tancades no són compactes, aquest problema d'existència de solucions no es pot resoldre en els espais clàssics de funcions contínues i és, justament aquest problema, el motivador de bona part del desenvolupament de l'anàlisi funcional. Una manera d'atacar-lo és considerar solucions aproximades $\{u_k\}$, obtingudes, per exemple, projectant sobre espais de dimensió finita i obtenir una estimació *a priori* del tipus

$$\int_\Omega |Du_k|^2\,dx \le C,$$

on C és una constant que només depèn del domini i de φ. A continuació es prova que la successió $\{u_k\}$ és compacta a $L^2(\Omega)$, fet que s'obté del teorema de Rellich-Kondrachov, que és una extensió als espais de Hilbert L^2 del teorema d'Arzelà-Ascoli.

En l'obtenció d'aquestes estimacions *a priori* juga un paper fonamental la desigualtat de Poincaré,

$$\int_\Omega |u|^2\,dx \le C_\Omega \int_\Omega |Du|^2\,dx.$$

Es tracta d'un cas particular de les anomenades desigualtats de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg [9]: si $1 \le p < n$, existeix una constant $C = C(p,n)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \le C\|Du\|_{L^p},$$

per a tota funció u pertanyent a l'espai de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i on l'exponent p^* satisfà la igualtat $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Observem que d'aquesta desigualtat es dedueix el següent: si $Du \in L^2(B_1)$ (B_1 és la bola unitat de $\mathbb{R}^n$) i $n = 2$ llavors $u \in L^p(B_1)$, per a tot $p < \infty$; ara bé, si $n = 3$, només es pot garantir que $u \in L^p(B_1)$ per a tot $p \le 6$. Una limitació similar, deguda també a la dimensió de l'espai, és la causant que el problema de l'existència o no de solucions regulars per a tot temps de l'equació de Navier-Stokes en dimensió $n = 3$ (però no en dimensió 2) sigui encara un problema obert i formi part dels anomenants «problemes del mil·leni». En aquest punt és important destacar que el millor resultat que es coneix sobre aquest problema a dia d'avui és el que van provar L. Caffarelli, R. Kohn i L. Nirenberg en un article [6] de l'any 1982.

Dins d'aquest apartat de resolució de problemes geomètrics mitjançant l'ús de les equacions en derivades parcials és on cal encabir la tesi doctoral de Louis Nirenberg publicada en un article [8] de l'any 1953 en el *Communications of Pure and Applied Mathematics* (la revista de l'Institut Courant que, segurament, està entre les cinc revistes de matemàtiques més prestigioses del món), on dóna una resposta afirmativa a una pregunta plantejada per Hermann Weyl l'any 1916 que és molt senzilla d'enunciar: *donada una mètrica regular g amb curvatura de Gauss K positiva sobre l'esfera 2-dimensional S^2, hi ha una immersió injectiva (encabiment) prou regular de S^2 a $\mathbb{R}^3$ de manera que la mètrica que indueix $\mathbb{R}^3$ sobre aquesta immersió sigui exactament g?*

Si ara, tal com hem fet abans amb el problema de les superfícies mínimes, es reescriu aquest problema en termes d'EDP, aleshores, si representem localment la superfície com una gràfica $(x, u(x))$, llavors la funció u és solució de l'equació no lineal:

$$\det D^2 u = K(x)\left(1+|Du|^2\right)^2,$$

anomenada equació de la curvatura de Gauss prescrita.

En la demostració de l'existència de la immersió pel problema de Weyl, Nirenberg va procedir de la manera següent: primer va provar les estimacions *a priori* necessàries per a una equació de tipus Monge-Ampère com l'anterior (*a priori* vol dir que són estimacions prèvies a saber que, de fet, existeix solució), després va aplicar un mètode de continuïtat basat a fer una deformació que porta l'equació no lineal a la lineal associada tot mantenint les estimacions *a priori*. A continuació, va recórrer a la teoria de Schauder d'espais Hölder $C^{0,\alpha}$ per provar l'existència de solucions en el cas lineal i, finalment, va usar el teorema de la funció implícita, per assegurar la «perllongació» dels resultats d'existència de solucions quan el paràmetre de deformació va canviant.

Aquest algorisme per provar l'existència de solucions d'equacions en derivades parcials (usat per primera vegada per Serge Bernstein l'any 1915) ha estat una manera habitual de procedir durant la segona part del segle XX i, fins avui, per resoldre molts problemes de la teoria d'EDP. Entre aquests, cal destacar el de les superfícies mínimes citat a l'inici de la secció, on l'EDP és

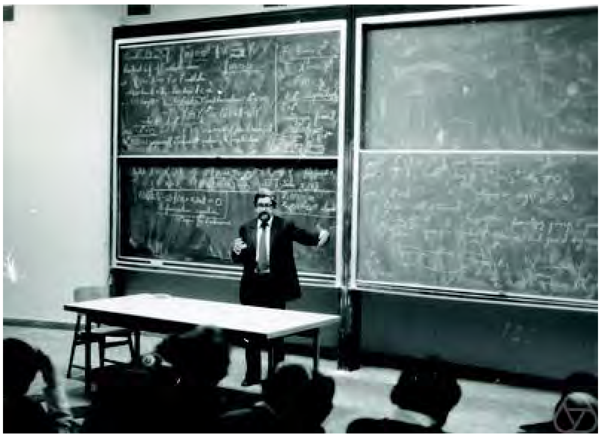
$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)=0,$$

o bé també, la conjectura de Poincaré, un altre dels «problemes del mil·leni», que fou provada per Grigori Perelman l'any 2004, utilitzant aquest algorisme general de manera més subtil amb l'anomenat «flux de Ricci».

El teorema de simetria de Gidas-Ni-Nirenberg

En un article de l'any 1979, Gidas, Ni i Nirenberg [7] van establir un important resultat de monotonia i simetria de solucions per a equacions en derivades parcials el·líptiques no lineals. Sigui Ω un domini fitat i regular de $\mathbb{R}^n$, convex en la direcció x_1 i simètric respecte a $\{x_1 = 0\}$. Sigui f una funció localment Lipschitz i u una solució fitada i positiva de l'equació $-\Delta u = f(u)$ a Ω amb condició de frontera Dirichlet, $u = 0$ a $\partial\Omega$. Aleshores, u és simètrica respecte a $\{x_1 = 0\}$ (això vol dir que u és una funció parella respecte a la variable x_1) i satisfà la desigualtat $\partial_{x_1} u < 0$ a $\Omega \cap \{x_1 > 0\}$. En particular, si $\Omega = B_R$ és una bola, llavors u és radialment simètrica i $\partial_r u < 0$ per a $0 < r := |x| < R$.

La demostració d'aquest resultat usa el principi del màxim i és molt flexible ja que permet extensions a certs dominis no fitats (en particular, a tot $\mathbb{R}^n$), a equacions el·líptiques completament no lineals, a algunes no linealitats $f(x, u)$ depenent també de la variable $x \in \Omega$, així com a alguns sistemes d'EDP el·líptics. Tot això ha fet que, en data juliol de 2015, [7] sigui l'article més citat de L. Nirenberg. Com més d'una vegada ha dit ell mateix: «m'he guanyat la vida amb el principi del màxim».



Si per a una certa funció no lineal f sabem que hi ha unicitat de solucions positives per al problema de frontera anterior (per exemple, aquesta propietat se sap que és certa si f és una funció no creixent, ja que en aquest cas el funcional de l'energia és convex), aleshores la solució ha d'ésser simètrica, per unicitat. Ara bé, en moltes aplicacions interessants (estats estacionaris en física matemàtica, equacions de curvatura en geometria conforme,...), no es té unicitat i, per tant, la simetria cal demostrar-la. En aquest punt, també cal fer notar que la hipòtesi de positivitat de la solució és necessària. Per exemple, la segona funció pròpia del laplacià en una bola i amb condicions de Dirichlet a la frontera satisfà l'equació $-\Delta u = \lambda_2 u$, però no és radialment simètrica. De fet, és senar respecte a un cert hiperplà que passa pel centre de la bola.

La demostració del resultat de Gidas-Ni-Nirenberg fa ús del potent mètode dels «plans mòbils» (*moving planes* en anglès), desenvolupat per A. Alexandrov en una sèrie d'articles apareguts cap a mitjans del segle XX (veure [1]). En aquests articles, a més d'altres resultats, Alexandrov va establir que les esferes són les úniques hipersuperfícies fitades i connexes de $\mathbb{R}^n$ amb curvatura mitjana constant. L'any 1971, J. Serrin [10] va usar aquest mètode per provar que les boles són els únics dominis fitats i regulars que admeten solució per a certs problemes de valors a la frontera sobredeterminats.

En el mètode d'Alexandrov (per cert, director de tesi de Grigori Perelman), es consideren els plans $T_\lambda = \{x_1 = \lambda\}$, els dominis $\Sigma_\lambda = \Omega \cap \{x_1 > \lambda\}$, i la funció reflectida $u^\lambda(x) = u(2\lambda - x_1, x')$ (la reflexió de u a través de T_λ). Aleshores es mostra que $u < u^\lambda$ a Σ_λ per a tot $0 < \lambda < \lambda^* := \sup_\Omega x_1$. En primer lloc, es prova el resultat per a qualsevol λ proper a λ^* i, després, fent ús d'un argument de continuïtat, es prova que també és cert fins a $\lambda = 0$. Els dos ingredients usats són el lemma de Hopf a la frontera i el principi del màxim fort que s'apliquen a la diferència $u^\lambda - u$. Observem que $u^\lambda - u$ satisfà una equació lineal amb coeficients depenent de $x \in \Omega$ ja que u^λ i u satisfan la mateixa equació no lineal.

L'ús del lemma de Hopf a la frontera necessita de certa regularitat del domini Ω. Això fa que la demostració del resultat de simetria de [7] no sigui vàlida, per exemple, per a un quadrat al pla. Posteriorment, Berestycki i Nirenberg [3] van desenvolupar una nova aproximació en què van substituir l'ús del lemma de Hopf per un principi del màxim en «dominis petits», dominis com Σ_λ quan λ és molt proper a λ^*, o $\Sigma_\lambda \setminus K$ on λ és arbitrari i K és un subconjunt compacte suficientment gran de Σ_λ. D'aquesta manera, Berestycki i Nirenberg van poder provar la simetria de solucions per a dominis no regulars com els cubs.

A més, a [2, 3] Berestycki i Nirenberg van introduir un nou i potent mètode, anomenat «mètode lliscant» (o *sliding method* en anglès), que permet provar la monotonia, i també la unicitat en certs casos, de les solucions de certs problemes de valors a la frontera. Aquest mètode consisteix a comparar la solució u amb la solució traslladada o lliscada $u_\lambda(x) := u(x_1 + \lambda, x')$.

En el camp de les EDP, aquests darrers anys hi ha hagut una gran activitat de recerca centrada en les equacions amb difusió fraccionària o de Lévy. En aquest cas, cal treballar amb operadors integro-diferencials no locals com, per exemple, el laplacià fraccionari a $\mathbb{R}^n$,$(-\Delta)^s$ amb $0 < s < 1$. En el cas d'aquest laplacià fraccionari i, si el domini és una bola, és a dir, $(-\Delta)^s u = f(u)$ a B_R i $u = 0$ a $\mathbb{R}^n \setminus B_R$, el resultat de monotonia de Gidas-Ni-Nirenberg ha estat provat recentment per Birkner, López-Mimbela i Wakolbinger [4]. Més tard, Jinggang Tan i jo mateix [5], fent ús del mètode dels plans mòbils, hem provat la simetria i la monotonia per a l'anomenat laplacià fraccionari espectral amb condicions de Dirichlet. Aquest operador es defineix com l'arrel s-èsima del laplacià amb condicions de Dirichlet sobre un domini fitat Ω mitjançant la seva descomposició espectral; nosaltres hem tractat el cas $s = 1/2$.

Per acabar, vull agrair a l'Albert Avinyó, editor d'aquesta revista, la conversió d'una xerrada meva a la Facultat de Matemàtiques, de la Universitat Politècnica de Catalunya en la primera part d'aquest article i per la traducció, en la segona part, d'una ressenya que he escrit sobre els resultats de simetria anteriors i que apareixerà en les *Notices* de l'AMS.

Referències

[1] Alexandrov, A.D.; «Uniqueness theorems for surfaces in the large V», *Vestnik Leningrad Univ.* 13 (1958), n. 19, 5-8. Traducció a l'anglès a: *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser. 2, 21 (1962), 412–415.

[2] Berestycki, H.; Nirenberg, L.; «Monotonicity, symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations». *J. Geom. Phys.* 5 (1988), n. 2, 237–275.

[3] Berestycki, H.; Nirenberg, L.; «On the method of moving planes and the sliding method». *Bol. Soc. Brasil. Mat.* (N.S.) 22 (1991), n. 1, 1–37.

[4] Birkner, M.; López-Mimbela, J.A.; Wakolbinger, A.; «Comparison results and steady states for the Fujita equation with fractional Laplacian». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 22 (2005), 83–97.

[5] Cabré, X.; Tan, Jinggang; «Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian». *Adv. Math.* 224 (2010), n. 5, 2052–2093.

[6] Caffarelli, L; Kohn, R; Nirenberg, L.; «Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations». *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), n. 6, 771–831.

[7] Gidas, B.; Ni, Wei Ming; Nirenberg, L.; «Symmetry and related properties via the maximum principle». *Comm. Math. Phys.* 68 (1979), n. 3, 209–243.

[8] Nirenberg, L.; «The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large». *Comm. Pure Appl. Math.* 6 (1953), n. 3, 337–394.

[9] Nirenberg, L.; «On elliptic partial differential equations». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 3 (1959), n. 13, 115–162.

[10] Serrin, J.; «A symmetry problem in potential theory». *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), 304–318.

Xavier Cabré
ICREA i UPC

Entrevista a dues bandes

Carles Perelló i Joan Solà-Morales

Una calorosa tarda del mes de juliol, Joan Solà-Morales i qui subscriu aquest article vam arribar mig assedegats a la casa de Carles Perelló a Valldoreix, «la casa de tots» com diria Sisa. En Carles, com ha fet sempre amb tots els seus convidats, ens va rebre amb els braços oberts. Ràpidament tots tres estàvem asseguts al voltant d'una taula i la conversa entre els dos darrers presidents de la SCM, entre el mestre i l'alumne, entre dos bons amics, va fluir amb facilitat...

J. Carles, com va ser la teva arribada a la UAB?

C. Jo era a Mèxic i buscava algun lloc per marxar un any a l'estranger. Havia mirat Vancouver o Santiago de Xile, però, aleshores, es va produir un petit miracle: la meva mare, que havia estat segrestada i obligada a marxar de Mèxic, va topar a les Rambles amb un exalumne seu que li va dir que en aquell moment a Barcelona obririen una nova universitat, que s'anomenaria Autònoma i que la idea era que, d'alguna manera, es regís, es governés per ella mateixa. Ràpidament vaig escriure al degà Gandia preguntant-li si em volien i em va dir que sí però... bé, jo li vaig dir que encara trigaria un any. Aleshores em va demanar si li podia donar una llista de revistes de matemàtiques per subscriure's i una llista de llibres que convingués comprar per a la nova biblioteca i jo li vaig enviar la llista. Al cap d'un any, quan vaig arribar a l'Autònoma, la Facultat s'havia subscrit a totes les revistes i havia comprat tots els llibres. Va ser molt notable com va arreglar-se tot plegat, perquè aquestes coses no solen arreglar-se així. D'alguna manera, va ser també una mena de miracle. Vaig arribar aquí i vaig ser el primer doctor del Departament. Aleshores, havíem de fer coses tan interessants com ara el pla d'estudis! El segon doctor a arribar va ser Joan Girbau, de París, i després Joan Cerdà, de les Illes. Recordo que ens reuníem tots tres per dinar i xerrar i cadascú portava un plat de casa seva. Cada dia era sorpresa, sorpresa...

J. Què creus que, en aquells moments, diferenciava el Departament de Matemàtiques de l'Autònoma del de la Central?

C. Suposo, no ho tinc clar, que nosaltres érem més informals. Jo venia dels Estats Units, i allà predominava més aquest tarannà. En Girbau, en venir de París, també ho era, d'informal, però segurament no tant com jo! Organitzàvem excursions... Tu vas venir a algunes, oi?

J. Sí, a algunes. Per exemple, recordo haver anat a la central d'Ascó i aconseguir entrar dins del reactor.