

Barcelona, sede del encuentro de Medallas Fields

Faltings: la osadía de un matemático de nuestros días

■ Hasta el próximo martes se celebra en Barcelona un encuentro de matemáticos ganadores de medallas Fields. Las aportaciones de Gerd Faltings son explicadas en este artículo.

PILAR BAYER

El nombre de Gerd Faltings, matemático alemán que obtuvo una de las medallas Fields en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Berkeley el año 1986, saltó a la fama en 1983, cuando contaba tan sólo 29 años, a raíz de la publicación de un trabajo de 18 páginas, titulado "Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern". En él se demostraban por primera vez tres famosas conjeturas: la de Mordell, formulada en 1922, la de Shafarevich, en 1962 y la de Tate, en 1966.

Antecedentes

Los problemas planteados en la célebre "Aritmética" de Diofanto, traducidos al lenguaje geométrico, implican la búsqueda de puntos de coordenadas racionales en curvas algebraicas de género cero o uno, definidas sobre los racionales.

Las curvas de género menor o igual que uno poseen una propiedad que las distingue de las demás: entre sus puntos se puede definir algebraicamente una ley de adición. P. de Fermat y L. Euler conocían un método, llamado "de la tangente y de la secante", que les permitía construir sucesivos puntos racionales en curvas de género uno a partir de uno o de dos puntos conocidos: bastaba trazar la tangente a la curva en un punto racional o bien la secante que una dos de estos puntos y buscar el tercer punto de intersección de estas rectas con la curva en cuestión. Así, se obtienen soluciones distintas de una ecuación a base de "sumar" soluciones obtenidas previamente.

En 1901, el célebre matemático francés H. Poincaré había expresado su creencia de que "todos" los puntos racionales de una curva de género uno (que pueden ser en número finito o no) podían obtenerse a partir de un número finito de ellos por el método anteriormente citado. En otras palabras, para encontrar todos los puntos racionales de una curva de género uno "bastaría" explicitar un conjunto finito de generadores del grupo abeliano formado por sus puntos racionales.

La conjetura de Poincaré fue probada por el matemático de la escuela inglesa L. J. Mordell (1888-1972), en un trabajo del año 1922, utilizando la hábil técnica de Fermat del "descenso infinito". En este trabajo Mordell formuló a su vez otra con-

jetura, importante para ahondar en el conocimiento de las ecuaciones diofánticas.

La conjetura de Mordell

De las tres conjeturas probadas por Faltings que le valieron la concesión de la medalla Fields, la conjetura debida a Mordell es la que tiene un enunciado más sencillo. Predice que las curvas de género mayor o igual que dos poseían únicamente un número finito de puntos racionales, al faltar en ellas la ley de adición.

Notemos que la ecuación de Fermat $x^n + y^n = z^n$ define una curva de género $(n-1)(n-2)/2$.

La demostración de la conjetura de Mordell fue el objetivo que se fijó A. Weil en 1927 en la realización de su tesis doctoral. Por medio de ideas que remontaban a N. Abel y C. G. J. Jacobí, Weil intentó atacar el problema sumergiendo la curva de partida en una variedad, lo más pequeña posible, pero en la que se pudiera llevar a cabo la suma de puntos; es decir, en una variedad abeliana. En tales variedades, Weil pudo generalizar la conjetura de Poincaré: su grupo de puntos racionales resultó ser finitamente generado, pero ello fue insuficiente para resolver el problema planteado por Mordell. El esfuerzo realizado por Weil en aquella ocasión fue enorme. Tuvo que crear la teoría de las alturas para practicar a su vez el descenso infinito. La teo-

ría de las variedades abelianas estaba en sus comienzos. Y, lo que constituía la mayor dificultad, la geometría algebraica no disponía todavía del lenguaje adecuado para el tratamiento de los problemas aritméticos. Todo ello fue valorado por E. Picard, que formaba parte del tribunal de tesis, y, en contra del parecer de J. Hadamard que opinaba que Weil no debía contentarse con un trabajo dejado "a medias", la tesis de Weil fue aceptada.



Poco después, C. L. Siegel intentó a su vez demostrar la conjetura de Mordell, logrando únicamente probar un teorema de finitud para el conjunto de puntos de coordenadas enteras de las curvas afines. La conjetura de Mordell fue muy criticada en ciertos ambientes matemáticos al considerarse que el número de ejemplos con que se contaba para su formulación no era significativo. De hecho, tras el trabajo de Siegel no se produjeron avances en la comprensión directa de la misma durante un período de más de 30 años. Sin

embargo, en este período se inició el trabajo ingente de un gran número de matemáticos: Weil, Serre, Néron, Grothendieck, Tate, Mumford y Manin, entre otros, que ha permitido disponer, en nuestros días, del lenguaje y las técnicas necesarias para su demostración.

Un primer indicio sobre la posible veracidad de la conjetura de Mordell se obtuvo a través de un trabajo, que pasó casi desapercibido, publicado en 1965 por D. Mumford. En él se probaba que la altura de los puntos racionales de las curvas de género mayor o igual que dos presentaba como mínimo un crecimiento exponencial. Tal hecho no ocurría en las curvas de género menor y en ello podía verse una explicación del porqué las curvas de género alto no podían albergar un número demasiado grande de puntos racionales.

La conjetura de Shafarevich

El estudio de la conjetura de Mordell fue reemprendido en los años 60 y 70 por matemáticos de la escuela rusa. Y. Manin y S. Arakelov lograron probar una versión análoga de la misma cuando las curvas esta-

ban definidas sobre un cuerpo de funciones. Sus técnicas, sin embargo, no lograron ser trasladadas al caso aritmético hasta la publicación del trabajo de Faltings, realizado diez años después. En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Estocolmo en 1962, el matemático ruso I. R. Shafarevich, en una exposición memorable por la riqueza de sus ideas, formuló la pregunta de si sería cierto un análogo para curvas algebraicas de un clásico teorema de C. Hermite. De ser así, fijado un género mayor que uno y un conjunto de degeneración, el número de clases de isomorfía de curvas algebraicas definidas sobre un cuerpo de números sería finito. La importancia de la conjetura de Shafarevich se puso de manifiesto en un trabajo de A. N. Parshin, del año 68, en el que se veía, a través de una ingeniosa construcción, que la conjetura de Shafarevich implicaba la de Mordell. La brillante construcción de Parshin permite remitir el problema del cómputo de "un número de puntos" al del cómputo de "un número de curvas".

La conjetura de Tate

La conjetura del matemático norteamericano J. Tate predecía, dada una variedad abeliana (que es un objeto aritmético-geométrico) su clase de isogenia a través de su función zeta (que es un objeto analítico). De las tres conjeturas probadas por Faltings, la conjetura de Tate es la más técnica y la más bella. El mérito de Faltings estriba en haberla sabido utilizar como base para la demostración de las otras dos.

El trabajo de Faltings de 1983 se inicia con la demostración de la conjetura de Tate. Pasamos a continuación a esbozar las principales líneas de su demostración. El principal logro es el cómputo de la altura de las variedades abelianas, entendidas ahora como puntos de un espacio adecuado. Este espacio es no compacto; si se compactifica (con las técnicas de I. Satake, Y. Namikawa o bien, más recientemente de C. L. Chai o del propio Faltings), las métricas sobre su fibrado canónico adquieren en el borde singularidades. Sin embargo, éstas resultaron ser lo suficientemente suaves (de tipo logarítmico) para permitir a Faltings definir una altura "casi" invariante por isogenias. El resto de la demostración es un ingenioso cálculo en el que sabiamente se conjugan resultados sobre grupos p-divisibles del propio Tate y de M. Raynaud, teoremas de la teoría de cuerpos de clases y técnicas de J. G. Zarhin.

A continuación, Faltings deduce, a partir de la recién probada conjetura de Tate y haciendo uso de teoremas conjeturados y probados por Weil, un teorema de finitud para las clases de isogenia, primeramente, y de isomorfía, después, de las variedades abelianas, una vez fijada su dimensión y el conjunto de degeneración.

El clásico teorema de R. Torelli le permite recuperar las curvas y probar la conjetura de Shafarevich. Con ello, y mediante la construcción de Parshin, prueba Mordell. ●

Evolución posterior de las ideas de Faltings

■ La comprensión en todos sus detalles del trabajo realizado por Faltings es una tarea ardua. Desde su aparición en 1983, han sido muchos los matemáticos que se han dedicado al estudio del mismo, a través de numerosos seminarios y publicaciones, intentando clarificar aspectos parciales que intervienen en la demostración de los teoremas.

P. Vojta ha dado, muy recientemente, otra demostración de la conjetura de Mordell, distinta de la publicada por Faltings.

La demostración de Vojta, todavía difícil, usa técnicas de aproximación diofántica cercanas a las de Siegel y técnicas sofisticadas de geometría aritmética. Sin embargo, ha sido una demostración muy estimulante. Por una parte, ha permitido al propio Faltings probar otra conjetura, debida a S. Lang, que generaliza la de Mordell en dimensión superior y, por otra, ha servido de inspiración para la elaboración de una tercera prueba de Mordell, realizada esta vez por

el matemático italiano E. Bombieri, que en su día también fue galardonado con una medalla Fields.

La demostración dada por Bombieri de la conjetura de Mordell se apoya en el trabajo mencionado de Mumford, publicado en el año 1965. Por medio de un lema de Siegel para el manejo de las alturas, Bombieri logra, en 25 páginas, una demostración de Mordell que puede ser comprendida por un estudiante de matemáticas al finalizar sus estudios de doctorado. Pero ésta no es su principal ventaja.

Es pensable que las constantes que intervienen en la demostración de Bombieri puedan hacerse efectivas. De este modo, se obtendría una versión "cuantitativa" de la conjetura de Mordell. Ello podría tener importantes consecuencias, sobre todo en el estudio de ecuaciones diofánticas concretas. Sin embargo, como el lector puede suponer, ésta es otra historia... y, lamentablemente, el margen de que dispongo es demasiado estrecho para contarla.