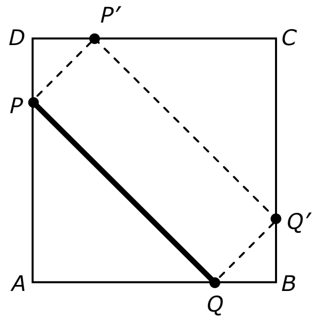
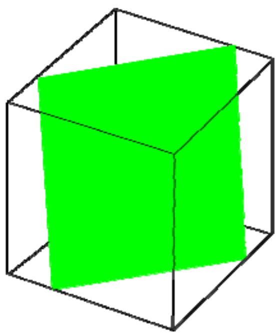
Sobre el problema del cub

L'enunciat del problema del Full de febrer era el següent:

Donat un cub, quin és el cub més gran que el pot travessar?

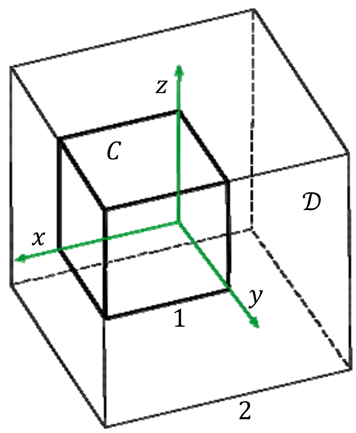
En el moment de proposar aquest problema no vam comptar amb la dificultat d'interpretar "travessar". Hauria estat millor dir que suposàvem que el segon cub es movia paral·lelament a sí mateix en moviment rectilini. Fent aquesta interpretació, la solució òptima és la donada al Full de març (1,06...), que s'obté de la manera següent (v. la figura). Si *ABCD* és la cara superior del cub de costat 1, sigui *PQ* el segment tal que *DP*=*QB*=1/4, de manera que $\overline{PQ} = 3\sqrt{2}/4 \simeq 1.06066$. Si $P'Q'$ és el segment sobre la cara inferior indicat per la figura (estem, doncs, mirant el cub des de dalt), llavors el paral·lelogram $PQQ'P'$ és de fet un quadrat, ja que PP' és la diagonal d'un paral·lelogram de costats 1 i $\sqrt{2}/4$ i per tant la seva longitud és $\sqrt{1+2/16} = 3\sqrt{2}/4$. Llavors el prisma quadrat recte de base $PQQ'P'$, per al qual es pot fer passar el cub de costat $3\sqrt{2}/4$, és el que permet que aquest cub "travessi" el cub de costat 1. Això mostra, per exemple, que es pot fer passar un cub de 31 cm de costat per dins d'un cub de 30 cm.





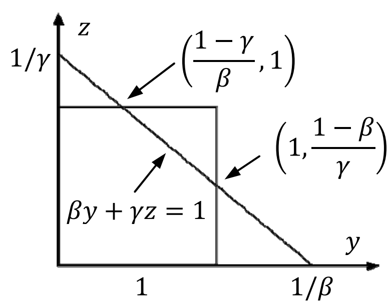
Solució. Les diagonals del quadrat $PQQ'P'$ són perpendiculars i tenen longitud $3/2$. Per veure que aquest quadrat és màxim, entre els que estan continguts en el cub de costat 1, basta veure que de dos segments perpendiculars continguts en aquest cub almenys un té longitud $\leq 3/2$.

Siguin KL i MN dos segments perpendiculars continguts en el cub $\mathcal{C}$ definit per $0 \leq x,y,z \leq 1$ i posem $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{KL} = (\alpha,\beta,\gamma)$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{MN} = (x,y,z)$, de manera que els extrems dels vectors $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ estan en el cub $\mathcal{D}$ definit per $0 \leq |x|,|y|,|z| \leq 1$ (l'origen de $\boldsymbol{u}$ i de $\boldsymbol{v}$ és $(0,0,0)$). Notem que $\mathcal{D}$ és un cub amb centre $(0,0,0)$ i costat 2. La condició d'ortogonalitat és $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Suposem que un dels segments, diguem-ne MN, té longitud $u > 3/2$. Volem veure que aleshores $v = \overline{M'N'} \leq 3/2$.



A tal fi podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que els extrems de $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ estan sobre la vora del cub $\mathcal{D}$. A més, per la simetria del cub podem suposar que $\alpha = 1$ i $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 1$, és a dir, $\boldsymbol{u} = (1,\beta,\gamma)$. Observem que $u^2 = 1 + \beta^2 + \gamma^2 > 9/4$ implica $\beta^2 + 1 \geq \beta^2 + \gamma^2 > 5/4$, d'on $\beta > 1/2$. Pel que fa a $\boldsymbol{v}$, tindrem $|x| = 1$, o $|y| = 1$, o $|z| = 1$. Canviant $\boldsymbol{v}$ per $-\boldsymbol{v}$ si cal, cosa que no canvia ni la longitud de $\boldsymbol{v}$ ni la condició de perpendicularitat, només hem de considerar tres casos possibles per a $\boldsymbol{v}$: $(-1,y,z)$, $(x,-1,z)$ i $(x,y,-1)$.

Cas $\boldsymbol{v} = (-1,y,z)$. La condició de perpendicularitat dóna $\beta y + \gamma z = 1$ i volem trobar el màxim de $v^2 = 1 + y^2 + z^2$ (la longitud de $\boldsymbol{v}$ al quadrat) en el quadrat $0 \leq |y|,|z| \leq 1$ del pla yz amb la condició $\beta y + \gamma z = 1$, que representa una recta del pla yz. Aquest màxim s'obté en un dels punts d'intersecció d'aquesta recta amb la vora del quadrat, és a dir (v.



la figura), $\left(1,\frac{1-\beta}{\gamma}\right)$ o $\left(\frac{1-\gamma}{\beta},1\right)$. Essent $\beta > 1/2$, és immediat comprovar que $1 \geq \frac{1-\beta}{\gamma} \geq \frac{1-\gamma}{\beta} \geq 0$, de manera que en qualssevol dels dos punts tenim

$$v^2 = 1 + y^2 + z^2 \leq 2 + \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^2.$$

Si fos $v > 3/2$, tindríem $9/4 < 1 + y^2 + z^2 \leq 2 + \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^2$, d'on $\frac{1-\beta}{\gamma} > \frac{1}{2}$, és a dir, $\beta < 1 - \frac{\gamma}{2}$, i és fàcil veure que això és incompatible amb $\beta^2 + \gamma^2 > \frac{5}{4}$. De fet tindríem

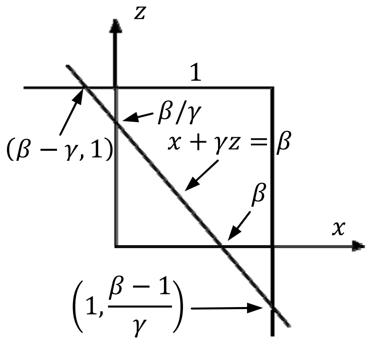
$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \gamma^2 > \beta^2 + \gamma^2 > \frac{5}{4},$$

però $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \gamma^2 - \frac{5}{4}$ és ≤ 0 per $0 \leq \gamma \leq 1$. Aquesta contradicció prova que $v \leq 3/2$.

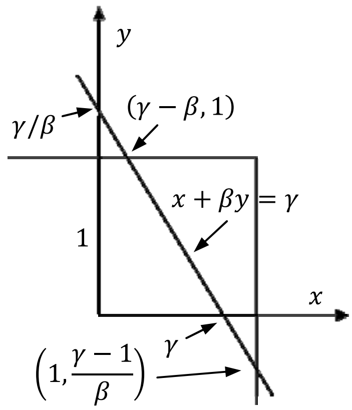
Cas $\boldsymbol{v} = (x, -1, z)$. La condició d'ortogonalitat dóna $x - \beta + \gamma z = 0$, és a dir, $x + \gamma z = \beta$, que defineix una recta del pla xz. Com en el cas anterior, la intersecció d'aquesta recta amb la vora del quadrat $0 \leq |x|, |z| \leq 1$ està formada pels punts $\left(1,\frac{\beta-1}{\gamma}\right)$ i $(\beta - \gamma, 1)$. Com que per $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ es compleix $\frac{1-\beta}{\gamma} \geq \gamma - \beta \geq 0$, i així

$$v^2 = x^2 + 1 + z^2 \leq 2 + \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^2,$$

cosa que ens permet concloure que $v \leq 3/2$ com en el cas anterior.

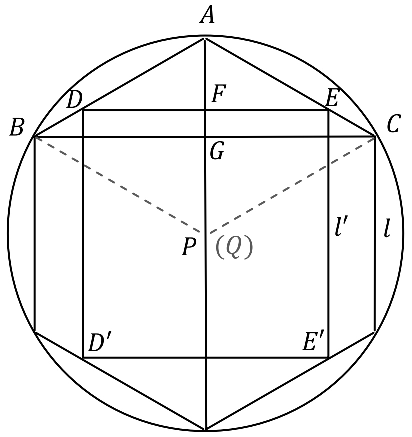


Cas $\boldsymbol{v} = (x, y, -1)$. La condició d'ortogonalitat dóna $x + \beta y - \gamma = 0$, és a dir, $x + \beta y = \gamma$. Representa una recta del pla xz. La intersecció d'aquesta recta amb la vora del quadrat $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ està formada pels punts $\left(1,\frac{\gamma-1}{\beta}\right)$ i $(\gamma - \beta, 1)$. En aquest cas considerarem el valor de $v^2 = x^2 + y^2 + 1$ separadament en cada punt, i arribarem a una contradicció si suposem $v > 3/2$. En el cas del primer punt tindríem $2 + \left(\frac{\beta-1}{\gamma}\right)^2 > \frac{9}{4}$, és a dir, $\frac{1-\beta}{\gamma} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\gamma}{2} > \beta$. Així, doncs, $\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \gamma^2 > \beta^2 + \gamma^2 > \frac{5}{4}$, que implica $-4\gamma + 5\gamma^2 - 1 > 0$. Però aquesta inequació que no es satisfà per $0 \leq \gamma \leq 1$. En el cas del segon punt, $2 + (\beta - \gamma)^2 > \frac{9}{4}$, és a dir, $\gamma - \beta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{2} + \gamma > 1$, que és un absurd.



Notes

El problema de Rupert i una observació de Wallis. El problema de “perforar un cub de manera que pel forat hi pugui passar un cub del mateix costat que el primer” fou proposat per un nebot del rei Carles I d’Anglaterra, el príncep Rupert (1619-1682), compte del Rin i duc de Baviera. Fins i tot hi va guanyar una aposta. Actualment es coneix com a problema de Rupert d’ençà que John Wallis (1616-1703) el considerés en el seu tractat d’àlgebra (*De Algebra Tractatus*, inclòs en el volum *Opera Mathematica II*, publicat el 1693, de les seves obres completes), però de fet el problema ja havia estat proposat i resolt per l’irlandès Philip Ronayne a principis del segle XVII.

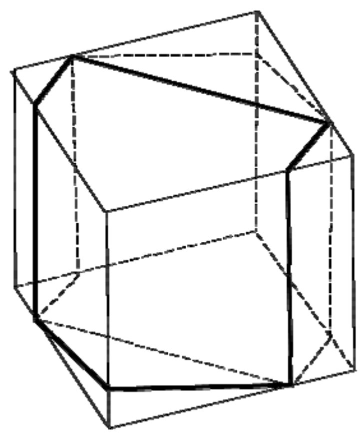


Wallis, però, afegeix l’observació següent: *es pot perforar un cub donat de manera que pel forat s’hi pot fer passar un altre cub de costat més gran*. El seu argument és com segueix (v. la figura). Mirant el cub de costat 1 en la direcció de la diagonal PQ, el perfil és un hexàgon regular, i resulta que el quadrat $DD'E'E$ inscrit en l’hexàgon (amb el costat DE paral·lel a la diagonal BC de la cara $ABPC$ del cub) té costat $l' = \sqrt{6}-\sqrt{2} \simeq 1.035$. En efecte, com que $BC = \sqrt{2} = l\sqrt{3}$, $l = \sqrt{2}/\sqrt{3}$, i de $DE/BC = AF/AG$ obtenim $\frac{l'}{l\sqrt{3}} = \frac{l-\frac{1}{2}l'}{\frac{1}{2}l}$, és a dir,

$$l' = l(3-\sqrt{3}) = \sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

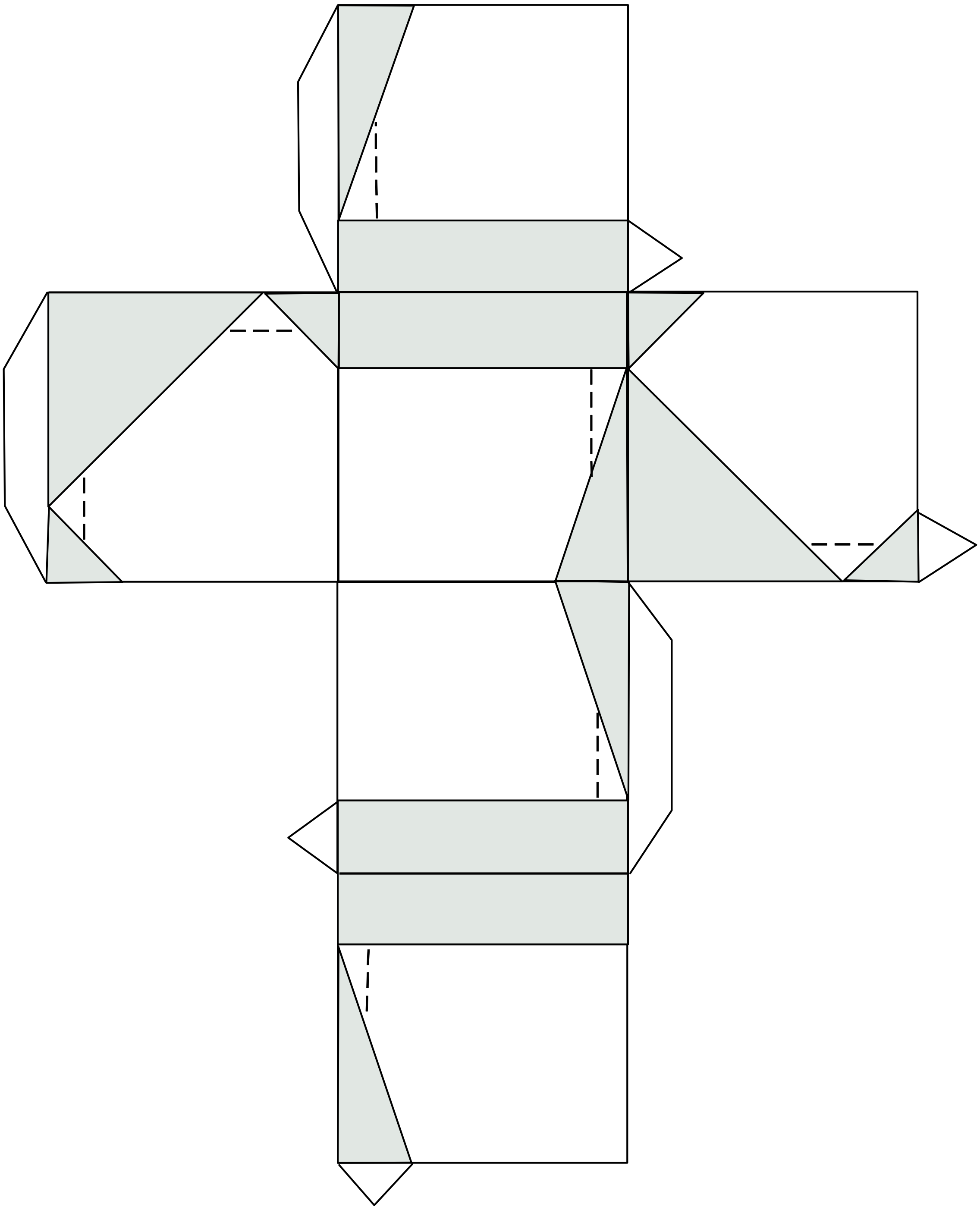
Malauradament hom encara troba l’afirmació que aquest quadrat és el màxim possible, com per exemple a [T-G-98], pàg 314-315, o (en el moment d’escriure aqueta nota) a http://www.daviddarling.info/encyclopedia/P/Prince_Ruperts_problem.html.

La contribució de Nieuwland. El 1816 el matemàtic holandès J. H. van Swinden va publicar pòstumament la solució (del màxim quadrat contingut en un cub) que trobà entre els papers de Pieter Nieuwland (1764-1794). No hem tingut accés a l’obra de van Swinden (*Grondbeginsels der Meetskunde*), però hem pogut tenir-ne un cert coneixement indirecte mitjançant l’article [Sch-50]. De la presentació que en fa aquest article sembla que el màxim trobat per Niuewland (i Scherk) és en relació als forats quadrats que es poden fer seguint una direcció continguda en el pla vertical que conté una diagonal, tot i que aquest màxim resulta ser el màxim absolut que hem exposat anteriorment. Entre els forats de Niuewland hi ha el que s’obté quan la direcció és la d’una diagonal, que no és altra que la de Wallis i que fa un angle de 45º amb el pla horitzontal. L’angle α de la direcció del forat de Nieuwland amb la horitzontal es troba fàcilment a partir de la descripció que n’hem donat al principi: $\sin(\alpha) = p/l$, on $l = 3\sqrt{2}/4$ és el costat del quadrat màxim i $p = \sqrt{2}/4$ és la seva projecció ortogonal en el pla horitzontal. En resulta que $\sin(\alpha) = 1/3$, és a dir, $\alpha = 19° 28' 16.4''$. A la figura s’il·lustra com queda el cub original després de foradar-lo segons el quadrat de Nieuwland.



Altres referències. La solució que hem presentat és una elaboració de la que es pot trobar a [M-S-95]. Al final d’aquest article s’afirma que Raphael M. Robinson ha trobat que l’anàleg del $3/2$ per a cubs en dimensió $n \geq 2$ és $\sqrt{n}$ si n és parell i $\sqrt{n-3/4}$ si n és senar. Per una generalització de [M-S-95] a rectangles es pot consultar [J-W-04]. Per a detalls històrics diversos, [Sch-50] i [Ric-07]. Una curiositat: en el text [T-G-98] esmentat abans, a continuació d'una sèrie d'exemples en què s'obtenen per medis elementals resultats que sovint es presenten com a il·lustració de la potència del càlcul diferencial, i després d'exposar el problema de Rupert (amb l'error que ja hem comentat), es comenta que no coneixen cap demostració (per obtenir el quadrat maximal) mitjançant el càlcul.

Qüetions pràctiques. Per fer un model en paper, podeu usar el desenvolupament que segueix. Les línies de punts s'hi han inclòs per tal que a l'hora d'enganxar les pestanyes resulti una figura connexa (altrament el corresponent nexe d'unió es redueix a un punt).



Referències

[J-W-04]
Jerrard, R. P.; Wetzel, J. E. *Prince Rupert's Rectangles.* The American Mathematical Monthly, Vol. 111, No. 1, 22-31.

[M-S-95]
Mauldon, J.G.; Chapman, Robin J. *A variant of Prince Rupert's Problem.* The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 5, 445-467.

[Ric-07]
Rickey, V. Frederick. *Dürer's Magic Square, Cardano's Rings, Prince Rupert's Cube, and Other Neat Things.* Es pot trobar a
http://www.math.usma.edu/people/Rickey/papers/ShortCourseAlbuquerque.pdf

[Sch-50]
Schrek, D.J.E. *Prince Rupert's problem and its extension by Pieter Nieuwland.* Scripta Mathematica, 16, 73-80 and 261-267.

[T-G-98]
Thompson, Silvanus P.; Gardener, Martin. *Calculus Made Easy.* Palgrave. (Newly Revided, Updated, Expanded, and Annotated for its 1998 edition). A la portada anuncia que és “The first complete revision in over 75 years of the million-copy bestseller –includes many new problems”.