

Problema

En una campanya electoral, entre tots els partits fan n diferents promeses. No hi ha dos partits que facin exactament el mateix conjunt de promeses, però cada dos partits fan alguna promesa comuna. Quin és el màxim nombre de partits que es presenten a les eleccions?

Solució

Suposem que es presenten N partits i que P_1, \dots, P_N són els conjunts de promeses de cada partit. Les condicions del problema són: $P_i \neq P_j$ i $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ per a $i \neq j$. Per tant, cap P_i és el complementari d'un P_j . Com que hi ha 2^n subconjunts de promeses, però amb cada conjunt no hi ha el complementari, tenim $N \leq \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$.

Siguin ara p_1, \dots, p_n les n promeses i siguin $A_i, i = 1, \dots, 2^{n-1}$, els subconjunts de $\{p_2, \dots, p_n\}$. Prenem $P_i = \{p_1\} \cup A_i$. Aquests conjunts de promeses satisfan les condicions i n'hi ha 2^{n-1} .

Per tant, el màxim nombre de partits que es presenten és 2^{n-1} .