

Enunciat:

Per a cada subconjunt no buit de $[n]=\{1,2, \dots , n\}$, se'n defineix la *suma alternada* com segueix: posem els elements del subconjunt en ordre decreixent i, alternativament, sumem i restem els elements (per exemple, la suma alternada de $\{1,4,7,12\}$ és $12-7+4-1=8$). Trobeu la suma de totes les sumes alternades corresponents a $[n]$.

Solució:

Definim la suma alternada del subconjunt buit de $[n]$ com a 0, i calculem la suma de les sumes alternades de tots els subconjunts de $[n]$, incloent-hi el buit. Dividim els subconjunts de $[n]$ en dues classes: els que no contenen n i els que contenen n . Les dues classes tenen el mateix nombre de subconjunts, com mostra l'aparellament $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \Leftrightarrow \{n, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ (per al conjunt buit tenim $\{\} \Leftrightarrow \{n\}$). Aleshores, suposant $n > a_1 > a_2 > \dots > a_k$, la suma de les sumes alternades per cada parella d'aquests conjunts és $(a_1 - a_2 + \dots \pm a_k) + (n - a_1 + a_2 - \dots \pm a_k) = n$. Com que $[n]$ té 2^n subconjunts, hi ha $2^{\{n-1\}}$ d'aquestes parelles i la suma demanada és $n2^{\{n-1\}}$.