Demostreu:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Hi ha hagut força respostes correctes i per mètodes prou diferents. N'hi ha que empren arguments combinatoris, altres es basen en comptar certs camins per la graella de coordenades enteres, i d'altres utilitzen de forma més o menys ingeniosa el teorema del binomi. La resposta guanyadora segueix aquest últim camí i és la que exposem.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k &= (x+1)^{2n} \\
&= ((x+1)^n)^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right)^2 \\
&= \sum_{s=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=s} \binom{s}{i} \binom{s}{j} \right) x^s
\end{aligned}$$

Igualem els coeficients de x^n en els polinomis inicial i final:

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2
\end{aligned}$$