La solución encontrada es el número 1289736.

La primera fase de la solución consiste en la determinación de las cifras que componen el número. Dado que la cifra 0 está claramente prohibida por razones de divisibilidad, la solución no puede ser múltiplo de 10, por lo que la cifra 5 no puede coexistir en la solución con ninguna cifra par. Como necesitamos 7 cifras distintas, la conclusión es que 5 no está en la solución.

La pregunta siguiente es ¿cuál de las cifras 1 2 3 4 6 7 8 9 no puede estar presente en la solución?

Dado que la solución debe ser divisible por 3, la suma de sus cifras debe ser también divisible por 3. Entonces, la cifra que hay que suprimir es congruente con 1 módulo 3, es decir, es 1, 4 o 7. Ahora podemos asegurar que la solución también es divisible por 9, y la suma de sus cifras también. Ya tenemos el dígito que sobra: el 4.

Este mismo argumento sirve para demostrar que el problema planteado no tendría solución si consideráramos 8 o 9 cifras en lugar de 7. Quizás resultaría interesante preguntarse por el mayor número de siete cifras (en lugar del menor), ya que sería el mayor de los números con cifras distintas divisible por ellas.

Entramos ahora en la segunda fase: ¿cómo ordenar las cifras 1 2 3 6 7 8 9? Para encontrar la solución basta considerar la divisibilidad por 8 y por 7. Efectivamente, la divisibilidad por 3 y por 9 está garantizada independientemente del orden de las cifras. Así, si el número es divisible por 8, también lo será por 2, por 4 y por 6. La divisibilidad por 8 sólo depende de las últimas 3 cifras mientras que la divisibilidad por 7 requiere considerar el número completo.

Aquí empieza la parte más fea de mi argumento. Como buscamos un número pequeño, comencemos suponiendo que la solución es de la forma 12xyztu. Para tener divisibilidad por 8, las únicas terminaciones posibles ztu son 368, 768, 968, 376, 976, 736, 936 y 896. Esto es así ya que u debe ser par (por tanto debe valer 6 u 8). Si u es 8, zt debe ser múltiplo de 4 por lo que t debe ser 6 y z ser impar. Si, por el contrario, u es 6, zt debe ser congruente con 1 módulo 4. Entonces, si t es 3 o 7, z debe ser impar y si t es 9, z debe ser par.

Todo esto nos lleva a 16 únicos candidatos de la forma citada. Concretamente son
1279368, 1297368,
1239768, 1293768,
1237968, 1273968,
1289376, 1298376,
1238976, 1283976,
1289736, 1298736,
1278936, 1287936,
1237896, 1273896.

Para comprobar la divisibilidad por 7, podemos reducir el número 12xyztu a la expresión u+3t+2z-y-3x-3 módulo 7. Después de unos pocos cálculos se comprueba que sólo hay dos soluciones del problema de la forma 12xyztu, que son 1289736 y 1293768.

Si resolviéramos el problema análogo de buscar el mayor de los números de siete cifras distintas, buscaríamos entre los números de la forma 98xyztu. Ahora, para tener divisibilidad por 8, las únicas terminaciones posibles ztu son 672, 632, 712, 312, 136, 736, 176, 376 y 216. La correspondiente lista de candidatos es
9813672, 9831672,
9817632, 9871632,
9836712, 9863712,
9867312, 9876312,
9827136, 9872136,
9812736, 9821736,
9823176, 9832176,
9812376, 9821376,
9837216, 9873216.

Considerando que el número 98xyztu es congruente con u+3t+2z-y-3x módulo 7, sólo se obtienen dos soluciones: 9867312 y 9812376. Así, 9867312 es el mayor de los números enteros que en base 10 se expresa con cifras distintas y es divisible por todas ellas.