

# FUNCIONES THETA DE RIEMANN

ESTEBAN GÓMEZ GONZÁLEZ  
JOSÉ M. MUÑOZ PORRAS

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es presentar al lector no especializado una introducción al tema de las funciones theta y sus aplicaciones geométricas y aritméticas. Las funciones theta fueron introducidas por primera vez por B. Riemann y su estudio ha sido desarrollado por diversos matemáticos como Frobenius, Weierstrass, Hecke, Artin, Tate, Weil, Langlands, Mumford y Fay. Actualmente el estudio de las funciones theta y las formas modulares desde un punto de vista aritmético es una parte esencial del programa de Langlands.

Esperamos que este artículo sea de utilidad para estudiantes de postgrado interesados en la conexión entre la Geometría Algebraica, la Aritmética y la Física Teórica.

Finalmente deseamos agradecer al profesor Sebastián Xambó la invitación para realizar la exposición de este artículo en el seminario organizado por la Facultad de Matemáticas de la Universitat Politècnica de Catalunya

## 2. FUNCIONES THETA DE UNA VARIABLE

Sea  $H$  el semiplano superior complejo:

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im } \tau > 0\}$$

---

Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos de investigación MTM2006-07618 de D.G.I. y SA112A07 de la Junta de Castilla y León.

La función theta es la función analítica en  $\mathbb{C} \times H$  definida por la siguiente serie absolutamente convergente:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) \quad \text{con } z \in \mathbb{C}, \tau \in H$$

Esta función verifica las siguientes propiedades:

- $\theta(z + 1, \tau) = \theta(z, \tau)$
- $\theta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \cdot \theta(z, \tau)$
- $\theta(z + a\tau + b, \tau) = \exp(-\pi i a^2 \tau - 2\pi i a z) \cdot \theta(z, \tau)$

Otra de las relaciones fundamentales que satisface la función theta es la ecuación de calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(z, it) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta(z, it)$$

Se verifica que la función theta está caracterizada por estas propiedades, es decir, periodicidad y ecuación del calor.

**2.1. Funciones theta y grupo de Heisenberg.** El grupo de Heisenberg de dimensión 3 se define como:

$$\mathcal{G} = \mathbb{C}_1^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \text{donde } \mathbb{C}_1^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

con la siguiente ley de grupo:

$$(\lambda, a, b) \cdot (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' \exp(2\pi i b a'), a + a', b + b')$$

Se verifica que el centro del grupo de Heisenberg es  $\mathbb{C}_1^*$  que coincide con el subgrupo conmutador.

El teorema de Stone-von Neumann afirma que existe una única representación unitaria e irreducible de  $\mathcal{G}$  en la cual  $\mathbb{C}_1^*$  actúa por la identidad. Esta representación se puede realizar de la siguiente forma. Sea  $\mathcal{E}$  el espacio de las funciones enteras (funciones holomorfas en todo el plano complejo) con la siguiente norma definida a partir de un elemento  $\tau \in H$ :

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} \exp(-2\pi y^2 / \text{Im } \tau) \cdot |f(x + iy)|^2 dx dy$$

Denotaremos por  $\mathcal{H}_\tau$  el subespacio de  $\mathcal{E}$  formado por las funciones con norma finita. Se define la siguiente representación unitaria de  $\mathcal{G}$  en  $\mathcal{H}_\tau$ :

$$U: \mathcal{G} \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{H}_\tau)$$

$$(\lambda, a, b) \longmapsto U_{\lambda, a, b}$$

con  $(U_{\lambda, a, b}f)(z) = \lambda \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a z) f(z + a\tau + b)$ . Se verifica que  $\mathcal{H}_\tau$  es un  $\mathcal{G}$ -módulo irreducible, por lo que es una realización de la única representación irreducible de  $\mathcal{G}$ .

La función theta admite la siguiente caracterización en términos de la acción del grupo de Heisenberg  $\mathcal{G}$ : *La función theta  $\theta(z, \tau)$  es la única función holomorfa en  $\mathcal{H}_\tau$  invariante por la acción del siguiente subgrupo de  $\mathcal{G}$ :*

$$\Gamma = \{(1, a, b) \in \mathcal{G} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{G}$$

A continuación vamos a introducir el análogo finito al grupo de Heisenberg y le teorema de Stone-von Neumann. Para cada número entero positivo  $l$  se define el siguiente subgrupo de  $\Gamma$ :

$$\Gamma_l = \{(1, la, lb) : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma$$

Sea  $V_l$  el subespacio vectorial de  $\mathcal{H}_\tau$  formado por las funciones enteras invariantes por la acción de  $\Gamma_l$ . Se verifica que una función  $f(z) \in V_l$  si y sólo si es de la forma

$$f(z) = \sum_{n \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}} c_n \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

siendo  $c_n = c_m$  si  $n - m \in l \cdot \mathbb{Z}$ . En particular se tiene que  $\dim_{\mathbb{C}} V_l = l^2$ .

Para cada entero  $l$ , sea  $\mu_l$  el subgrupo de  $\mathbb{C}_1^*$  formado por las raíces  $l$ -ésimas de la unidad. Se define el grupo de Heisenberg finito de nivel  $l$  como

$$\mathcal{G}_l = \mu_{l^2} \times \left(\frac{1}{l}\mathbb{Z}/(l \cdot \mathbb{Z})\right) \times \left(\frac{1}{l}\mathbb{Z}/(l \cdot \mathbb{Z})\right)$$

con la ley de grupo  $(\lambda, a, b) \cdot (\lambda', a', b') = (\lambda\lambda' \exp(2\pi i b a'), a + a', b + b')$ .

Se verifica que  $V_l$  es la única representación irreducible de  $\mathcal{G}_l$  en la que  $\mu_l$  actúa por homotecias (este enunciado es el análogo finito del teorema de Stone-von Neumann).

Una base de  $V_l$  está formada por las siguientes funciones:

$$\theta_{[b]}^{[a]}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i(a+n)^2 \tau + 2\pi i(n+a)(z+b))$$

con  $a, b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}$ . Las funciones  $\theta_{[b]}^{[a]}(z, \tau)$  se denominan funciones theta con características.

## 2.2. Función theta, función zeta y sus ecuaciones funcionales.

Dada una función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  integrable y con apropiadas cotas en 0 y en el infinito, se define su transformada de Mellin como la siguiente función analítica:

$$(Mf)(s) = \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x}, \text{ con } a < \operatorname{Re}(s) < b$$

La transformada de Mellin es simplemente una transformada de Fourier multiplicativa (haciendo el cambio de variable  $x = \exp(y)$  se convierte en una transformada de Fourier clásica). En particular, si consideramos la función  $f(x) = \theta(0, ix) - 1$  y  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (Mf)(1/2 s) &= 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \int_0^\infty \exp(-\pi n^2 x) x^{\frac{1}{2}s} \frac{dx}{x} \right) = (y = \pi n^2 x) = \\ &= 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (\pi n^2)^{-\frac{1}{2}s} \right) \int_0^\infty \exp(-y) y^{\frac{1}{2}s} \frac{dy}{y} = \\ &= 2\pi^{-\frac{1}{2}s} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} \right) \int_0^\infty \exp(-y) y^{\frac{1}{2}s} \frac{dy}{y} = \\ &= 2\pi^{-\frac{1}{2}s} \zeta(s) \Gamma(1/2 s) \end{aligned}$$

donde  $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s}$ , con  $\operatorname{Re}(s) < 1$ , es la función zeta de Riemann y  $\Gamma(1/2 s) = \int_0^\infty \exp(-y) y^{\frac{1}{2}s} \frac{dy}{y}$ . Por tanto, se tiene la fórmula fundamental:

$$(2.1) \quad 2\pi^{-\frac{1}{2}s} \zeta(s) \Gamma(1/2 s) = \int_0^\infty (\theta(0, ix) - 1) x^s \frac{dx}{x}$$

Ahora bien, si  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  son números impares tales que  $ad - bc = 1$ , se tiene que

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \mu(c\tau + d)^{1/2} \exp(\pi icz^2/(c\tau + d)) \theta(z, \tau)$$

siendo  $\mu$  una raíz octava de la unidad. En particular, se obtiene la ecuación funcional de la función theta:

$$(2.2) \quad \theta(0, i/x) = x^{1/2} \theta(0, ix) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^+$$

Por otro lado, si  $\xi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \zeta(s) \Gamma(1/2 s)$ , la ecuación funcional de la función zeta de Riemann es

$$\xi(s) = \xi(1 - s)$$

Esta igualdad se obtiene por la igualdad (2.1), aplicando la transformada de Mellin a la ecuación funcional (2.2) de la función theta, es decir, las ecuaciones funcionales de la función theta y de la función zeta son equivalentes.

**2.3. Función theta y toros complejos de dimensión uno.** Dado  $\tau \in H$ , se define el siguiente toro complejo:

$$E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$$

Las funciones  $\theta\left[\frac{a}{b}\right](z, \tau)$  no definen funciones holomorfas en  $E_\tau$  porque no son periódicas respecto del retículo  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Ahora bien las propiedades de periodicidad vistas para estas funciones se pueden interpretar geoméricamente en el sentido de que  $\theta\left[\frac{a}{b}\right](z, \tau)$  son secciones holomorfas de determinados fibrados de línea sobre el toro complejo  $E_\tau$ .

Por medio de las funciones theta se pueden construir explícitamente funciones meromorfas en  $E_\tau$  como productos de cocientes de las funciones theta y de sus trasladados, como por ejemplo, la función  $\wp$  de Weierstrass:

$$\wp(z) = \lambda + \frac{\theta\left[\frac{1}{1}\right]'(0, \tau)^2}{\theta\left[\frac{0}{1}\right](0, \tau)^2} \cdot \frac{\theta\left[\frac{0}{1}\right](z, \tau)^2}{\theta\left[\frac{1}{1}\right](z, \tau)^2} = -\frac{d^2}{dz^2} \log \theta\left[\frac{1}{1}\right](z, \tau) + \lambda$$

donde la constante  $\lambda$  se ajusta para que el desarrollo en serie de la función en  $z = 0$  no tenga término constante.

### 3. FUNCIONES THETA DE VARIAS VARIABLES. VARIEDADES ABELIANAS

Análogamente al semiplano superior, en varias variables se define el semiplano superior de Siegel:

$$\mathbb{H}_g = \{\tau \in \mathbb{M}(g \times g, \mathbb{C}) : \tau^t = \tau, \text{ Im } \tau \text{ es definida positiva}\}$$

Una variedad abeliana de dimensión  $g$  es un toro complejo de la forma

$$X(\tau) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g) \text{ con } \tau \in \mathbb{H}_g$$

Además, para cada  $\tau \in \mathbb{H}_g$  se define la función theta en  $g$  variables como la función holomorfa en  $\mathbb{C}^g$  dada por la siguiente serie absolutamente convergente:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n^t \tau n + 2\pi i n^t z)$$

con  $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$ . Análogamente, dado  $(a, b) \in \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$  se define la función theta con característica  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  como:

$$\theta_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i (n + a)^t \tau (n + a) + 2\pi i (n + a)^t (z + b)\right)$$

Estas funciones theta también tienen propiedades de cuasi-periodicidad:

$$\theta_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z + m, \tau) = \exp(2\pi i a^t m) \theta_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z, \tau)$$

$$\theta_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z + \tau m, \tau) = \exp(-2\pi i b^t m) \exp(-\pi i m^t \tau m - 2\pi i m^t z) \theta_{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}(z, \tau)$$

Por estas propiedades, las funciones theta definen secciones holomorfas de fibrados de línea sobre la variedad abeliana  $X(\tau)$ . En particular, la función theta  $\theta(z, \tau)$  es sección holomorfa de un fibrado de línea  $L_\Theta$  cuyas secciones holomorfas tienen dimensión compleja 1, por lo que define una polarización principal en  $X(\tau)$ .

El grupo  $\Gamma_g = \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  actúa en  $\mathbb{H}_g$  del siguiente modo:

$$\gamma(\tau) = (A\tau + B) \cdot (C\tau + D)^{-1} \text{ con } \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$$

Se verifica que dos variedades abelianas  $X(\tau)$  y  $X(\tau')$  son isomorfas si y sólo si existe  $\gamma \in \Gamma_g$  tal que  $\tau' = \gamma(\tau)$ . En consecuencia, la variedad que clasifica las variedades abelianas principalmente polarizadas

de dimensión  $g$ , es decir, la variedad de moduli de variedades abelianas principalmente polarizadas es:

$$\mathcal{A}_g = \mathbb{H}_g / \Gamma_g \text{ con } \dim \mathcal{A}_g = g(g+1)/2$$

**3.1. Funciones theta de superficies de Riemann compactas.**

**Variedad jacobiana.** Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta de género  $g$ . Fijamos una base canónica  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$  de  $H^1(S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$  tal que la intersección definida a través del producto cup es:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0 \quad \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$$

Sea  $\mathcal{O}_S$  el haz de funciones holomorfas sobre  $S$ ,  $\mathcal{O}_S^*$  el haz de funciones holomorfas sin ceros en  $S$  y  $\Omega_S$  el haz de diferenciales holomorfas en  $S$ .

La sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow 1$$

$$z \longmapsto \exp(2\pi iz)$$

induce una sucesión exacta de grupos de cohomología:

$$0 \longrightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{deg} H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z}^{2g} & & H^0(S, \Omega_S)^* & & \mathbb{Z} \end{array}$$

donde el morfismo  $j: H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, \Omega_S)^*$  esta dado por  $j(\alpha)(\omega) = \int_{\alpha} \omega$ .

Por otro lado, se tiene que el grupo de Picard de  $S$  es:

$$\text{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \simeq \{\text{fibrados de línea en } S\} / \{\text{isomorfismos}\} \simeq \{\text{divisores en } S\} / \{\sim\}$$

donde dos divisores están relacionados si difieren en el divisor de ceros y polos de una función meromorfa. Teniendo en cuenta esta identificación, el morfismo  $deg$  de la sucesión exacta anterior viene dado por:

$$\text{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z}$$

$$\left[ D = \sum_{\text{finita}} n_s \cdot s \right] \longmapsto deg D = \sum n_s$$

Se define la variedad jacobiana de la superficie de Riemann  $S$  como:

$$J(S) = \text{Pic}^0(S) = \{\text{fibrados de línea de grado cero sobre } S\}$$

Sea  $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$  la base de diferenciales holomorfas de  $S$  normalizada por la base de ciclos elegida  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$  por la condición:

$$\int_{\alpha_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{kj}$$

Si  $\tau_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j \in \mathbb{C}$ , se verifica que la matriz  $\tau = (\tau_{ij})$  es una matriz simétrica de parte imaginaria definida positiva, es decir,  $\tau \in \mathbb{H}_g$ . Por tanto, por la sucesión exacta de cohomología anterior, se tiene que

$$J(S) \simeq H^0(S, \Omega)^* / H^1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g)$$

es decir, la jacobiana de  $S$  es una variedad abeliana principalmente polarizada. La matriz  $\tau$  se denomina matriz de periodos de la superficie de Riemann compacta  $S$ . Las funciones theta asociadas a esta matriz son conocidas como las funciones theta de la superficie de Riemann.

Sea  $\mathcal{M}_g$  la variedad de moduli de las superficies de Riemann compactas de género  $g$ , que es una variedad analítica de dimensión:

$$\dim \mathcal{M}_g = \begin{cases} 0 & \text{si } g = 0 \\ 1 & \text{si } g = 1 \\ 3g - 3 & \text{si } g > 1 \end{cases}$$

La construcción anterior de la matriz de periodos define una aplicación:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_g &\longrightarrow \mathcal{A}_g \\ S &\longmapsto J(S) \end{aligned}$$

que es inyectiva por el teorema de Torelli. Por dimensiones se verifica que  $\mathcal{M}_g = \mathcal{A}_g$  si  $g \leq 3$ , y  $\mathcal{M}_g \subsetneq \mathcal{A}_g$  para  $g \geq 4$ .

El problema clásico de Schottky consiste en calcular las ecuaciones de la imagen de  $\mathcal{M}_g$  en  $\mathcal{A}_g$ , y su estudio ha llevado a diferentes caracterizaciones de las jacobianas dentro del moduli de variedades abelianas principalmente polarizadas.

4. FÓRMULAS DE ADICIÓN DE FUNCIONES THETA

Para cualquier  $\tau \in \mathbb{H}_g$ , las funciones theta verifican unas relaciones (fórmulas) de adición (Riemann-Weierstrass) que describen analíticamente la ley de grupo de la variedad abeliana  $X(\tau)$ :

$$\theta(2x, 2\tau) \cdot \theta(2y, 2\tau) = 2^{-g} \sum_{2\sigma \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g} \theta_{[\sigma]}^0(x+y, \tau) \cdot \theta_{[\sigma]}^0(x-y, \tau)$$

y su inversión:

$$\theta(x+y, \tau) \cdot \theta(x-y, \tau) = \sum_{2\sigma \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g} \theta_{[\sigma]}^0(2x, 2\tau) \cdot \theta_{[\sigma]}^0(2y, 2\tau)$$

Si  $\tau$  es la matriz de periodos de una superficie de Riemann compacta, entonces sus funciones theta verifican ciertas ecuaciones que no satisfacen las funciones theta asociadas a elementos arbitrarios de  $\mathbb{H}_g$ . Una de ellas es la fórmula de adición de funciones theta de superficies de Riemann:

El morfismo de Abel definido por un punto  $p_0 \in S$  es:

$$A: S \longrightarrow J(S) = C^g / (\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$$

$$p \longmapsto A(p) = \left( \int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_g \right)$$

que como clase de equivalencia de divisores de grado cero consiste en  $p \mapsto [p - p_0]$ . Por aditividad, se define el siguiente morfismo:

$$m: S^{2n} \longrightarrow J(S)$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \longmapsto \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \right]$$

Sea  $E(x, y)$  la prime-form de  $S$  construida a partir de las funciones theta de  $S$  y de sus diferenciales holomorfas, que es una sección holomorfa hemisimétrica del fibrado diagonal sobre  $S \times S$  con ceros simples a lo largo de la diagonal.

*Fórmula de adición para funciones theta de superficies de Riemann compactas:* Si  $e \in \mathbb{C}^g$  con  $\theta(e, \tau) \neq 0$  se verifica que:

$$\theta\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - e, \tau\right) \theta(e, \tau)^{n-1} \frac{\prod_{i < j} E(x_i, x_j) E(y_j, y_i)}{\prod_{i, j} E(x_i, y_j)} = \det\left(\frac{\theta((x_i - y_j) - e, \tau)}{E(x_i, y_j)}\right)$$

para todo  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in S^{2n}$ , donde esta igualdad debe de ser entendido como igualdad de secciones holomorfas de ciertos fibrados de línea en  $S^{2n}$ . En el caso particular  $n = 2$ , esta fórmula es conocida como la *identidad trisecante de Fay*:

$$\begin{aligned} & \theta(x_1 + x_2 - y_1 - y_2 - e, \tau) \theta(e, \tau) E(x_1, x_2) E(y_1, y_2) = \\ & = \theta(x_1 - y_1 - e, \tau) \theta(x_2 - y_2 - e, \tau) E(x_1, y_2) E(y_1, x_2) + \\ & \quad + \theta(x_1 - y_2 - e, \tau) \theta(x_2 - y_1 - e, \tau) E(x_1, y_1) E(x_2, y_2) \end{aligned}$$

para todo  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ .

El nombre de esta fórmula se debe a su interpretación geométrica. Sea  $X(\tau)$  una variedad abeliana principalmente polarizada y consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} X(\tau) & \longrightarrow \mathbb{P}^N & (N = 2^g - 1) \\ z & \longmapsto \vec{\theta}_2(z, \tau) = \{\theta_0^\sigma(2z, 2\tau)\}_{\sigma \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g} \end{aligned}$$

De su definición se deduce que la imagen de un punto y su opuesto es la misma y dicha imagen es conocida con el nombre de la variedad de Kummer de  $X(\tau)$ . Si  $X(\tau)$  es la jacobiana de una superficie de Riemann compacta  $S$ , teniendo en cuenta las fórmulas de adición vistas al principio de esta sección para las funciones theta arbitrarias, la identidad trisecante de Fay implica que existen rectas en  $\mathbb{P}^N$  que cortan a la variedad de Kummer de  $J(S)$  en tres puntos o, equivalentemente, la variedad de Kummer de  $J(S)$  admite rectas trisecantes en  $\mathbb{P}^N$ . La conjetura trisecante afirma que esta propiedad caracteriza a las jacobianas y ha sido recientemente demostrada por I. Krichever.

Considerando el caso degenerado de la identidad trisecante de Fay (los tres puntos coinciden) se obtiene la *ecuación KP* (Kadomtsev-Petviashvili): sea  $\tau$  la matriz de periodos de una superficie de Riemann

compacta  $S$ , entonces existen tres derivaciones

$$D_i = \sum_{j=1}^g v_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j} \quad i = 1, 2, 3$$

tales que:

$$\left( D_1^4 - D_1 D_3 + \frac{3}{4} D_2^2 + \lambda \right) \vec{\theta}_2(z, \tau)|_{z=0} = 0$$

siendo  $\lambda$  una constante. Shiota demostró que esta ecuación caracteriza a las funciones theta de superficies de Riemann compactas.

#### REFERENCIAS

- [FK] Farkas, H. M.; Kra, I., “Riemann surfaces”. Second edition. Graduate Texts in Mathematics 71. Springer-Verlag (1992)
- [F] Fay, J.D., “Theta Functions on Riemann Surfaces”, LNM 352, Springer-Verlag (1973)
- [G] Gunning, R. C. “Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties”. Mathematical Notes 12. Princeton University Press (1972)
- [K] Krichever, I.M., “Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer Variety”, arXiv:math/0605625v4.
- [M] Mumford, D., “Tata Lectures on Theta I”, Birkhäuser (1983)
- [Sh] Shiota, T., “Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations”, Invent. Math. **83** (1986), pp. 333–382.

