GEOMETRIA DE RIEMANN

JOAN PORTI

Resum. Expliquem la contribució de Riemann a la geometria al voltant de la conferència pronunciada a Göttingen el 1854, que suposà el naixement de la geometria de Riemann i obrí nous horitzons a la física.

1. Introducció

El 10 de juny de 1854, Bernhard Riemann pronuncià, a la facultat de filosofia de Göttingen, la conferència d'habilitació *"Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*, que podem traduir com "Sobre les hipòtesis en què reposen els fonaments de la geometria". Tot i haver estat publicada pòstumament, aquesta conferència fou extremadament influent en l'evolució de la geometria i la física. Se la considera una mena de manifest fundacional de la geometria de Riemann —geometria riemanniana— que ha tingut un gran desenvolupament posterior.

Els canvis conceptuals i tècniques que procurà la nova geometria de Riemann són essencials per la teoria de la relativitat general, 60 anys després. Les idees introduïdes en aquesta conferència ajudaren a dir més endavant que la matèria deforma la geometria de l'espai, que deixava de ser inamovible. Riemann creà els fonaments que permetrien desenvolupar les matemàtiques necessàries per explicar com l'espai queda afectat per la matèria, segons la relativitat general.

Aquest article està basat en una conferència a la jornada Riemann de l'UPC, el 20 de febrer de 2008. Vull agrair a Sebastià Xambó i a tota la "Comissió Riemann" per la invitació. També vull agrair a Eva Miranda l'ajut en la preparació de la conferència, en particular en el guió dels *Riemann cartoons*, cf. la figura 1. Finalment, el projecte FEDER/MEC MTM2006-04353 financia la meva recerca.

FIGURA 1. Diàleg apòcrif entre Gauss (1777-1855) i Riemann (1826-1866).

Entre les nocions més importants, la primera que Riemann planteja és la de varietat de dimensió n, ja que la majoria d'exemples fins aleshores eren subvarietats de $\mathbf{R}^m$, i Riemann els dóna entitat i valor intrínsec.

Després del tensor mètric, una altra noció clau que apareix és la de curvatura. Gauss ja l'havia introduïda per superfícies a l'espai, aquí Riemann la desenvolupa en qualsevol dimensió i en mostra la importància. A més ho fa amb una simplicitat i elegància sorprenents. Actualment, en els cursos i llibres de text s'arriba a la curvatura mitjançant un procés força més complicat, que inclou les connexions. Val la pena llegir la conferència de Riemann i, tot i que no sabem com s'ho va fer Riemann per arribar a aquestes conclusions, podem consultar l'aproximació que proposa Spivak [38].

Després de la introducció, aquest article està organitzat en sis capítols més. En el 2 situem el context en què es va realitzar la conferència de Riemann, en el 3 fem un breu recordatori de què entenem actualment per geometria de Riemann, que ens servira per entendre i valorar el capítol 4, el més extens, on s'expliquen els continguts de la conferència. Al capítol 5 expliquem els desenvolupaments principals realitzats posteriorment, que consolidaren la geometria de Riemann. Al capítol 6 citem alguns resultats que relacionen la topologia amb la curvatura de les varietats. Finalment, al capítol 7 expliquem com s'ha resolt la conjectura de Poincaré mitjançant el flux de Ricci, una eina d'origen riemannià.

2. El context

2.1. **La conferència d'habilitació.** La conferència pronunciada el 10 de juny de 1854 completava el procés d'habilitació de Bernhard Riemann, per això se l'anomena *Habilitationsvortrag*. Al desembre de 1953 havia presentat la memòria d'habilitació, *Habilitationsscrift*, amb el títol: *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Sobre la representabilitat d'una funció en sèrie trigonomètrica).

Tal com encara es fa a Alemanya en l'actualitat, després de presentar l'*Habilitationsschrift* Riemann va proposar tres títols i un tribunal encapçalat per Gauss en va escollir un. El primer títol proposat per Riemann era *"Gesichte der Frage über die Dartellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe"* ("Història de la qüestió de representabilitat d'una funció com a sèrie trigonomètrica"); el segon, *"Über die Auflösung zweier Gleichungen zweiten Grades mit zwei unbekannten Grössen"* ("Sobre la solució de dues eqüacions quadràtiques amb dues variables"); el tercer, que fou l'escollit, era *"Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*. Tot i que tradicionalment mai no s'escollia el tercer, cal dir que el primer títol era molt proper al tema de la memòria d'habilitació, i que el segon, la intersecció de dues quàdriques, podia haver-se considerat com a trivial per Gauss. No s'han trobat manuscrits sobre l'elaboració de cap dels tres temes.

La conferència estava adreçada als professors de la facultat de filosofia, i per tant hi ha molt poques fórmules i cap càlcul en el text. Queda com un misteri esbrinar quins càlculs havia fet Riemann per arribar a les conclusions i fórmules que exposa.

2.2. **Antecendents.** Està fora del meu abast establir amb precisió quins treballs previs tingueren influència en la conferència de Riemann. Probablement els treballs de Johannes Bernouilli, d'Euler i de Meusnier sobre superfícies eren coneguts per Riemann, donat que tingueren continuitat en l'obra de Gauss. En canvi, és molt més difícil de saber si Riemann coneixia dels treballs recents sobre geometria no euclidiana,

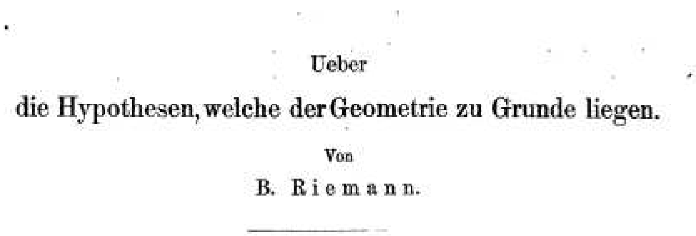
Ueber
die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
Von
B. Riemann.

Figura 2. El títol del text de la conferència, publicat pòstumament.

de Bolyai i Lobachevsky. Gauss hi estava interessat [35], però Riemann no en diu res en cap moment.

Riemann sí que menciona Gauss, i no només perquè estava en el tribunal, sinó perquè generalitza alguns dels seus treballs. En particular, les coordenades intrínseques utilitzades per Gauss, la mètrica intrínseca de la varietat i la curvatura.

2.3. **Les reaccions.** En les obres completes de Riemann [37], Dedekind descriu la conferència com una obra mestra d'exposició, tot i que sembla difícil que la majoria de professors de la facultat de filosofia de Göttingen la poguessin comprendre suficientment. Qui sense cap dubte s'adonà de la importància de la conferència fou Gauss, que —segons escriu Dedekind—

> *amb gran apreciació i una animació rara per ell, parlà a Wilhem Weber sobre la profunditat de les idees presentades per Riemann.*

El text de la conferència fou publicat pòstumament i les seves idees encara van trigar temps a ser assimilades: almenys fins a la teoria de la relativitat general, no se li va donar tota la rellevància. Per citar-ne un exemple, Henri Poincaré escriu en el seu assaig de 1902 "La science et l'hypothèse" [34]:

> *Les geometries de Riemann, tan interessants en molts camps, mai no seran, però, altra cosa que ens purament analítics, i no conduiran a demostracions anàlogues a les d'Euclides.*

Encara faltaven uns anys per la teoria de la relativitat general.

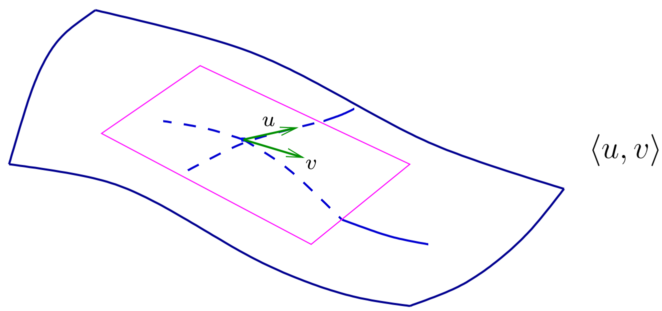

Figura 3. Producte escalar.

3. Geometria de Riemann actualment

Abans d'entrar en el text de la conferència, repassem breument el que entenem avui en dia per geometria de Riemann. De moment donem les construccions bàsiques per entendre el que Riemann deia, després ja anirem introduïnt més eines.

Una *varietat de Riemann* és una varietat diferenciable M amb un producte escalar en l'espai tangent de cada punt, que escrivim g. Que la varietat sigui diferenciable vol dir que els canvis de coordenades són diferenciables (normalment demanem de classe C^2 per poder fer segones derivades), i es demana que el producte escalar g varïi diferenciablement.

La manera de descriure-ho és utilitzar coordenades d'un obert U de $\mathbf{R}^n$:

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \in U \subset \mathbf{R}^n.$$

Els coeficients de la matriu del producte escalar són funcions de les coordenades

$$g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle.$$

Per tant, donats dos vectors u i v, si la seva expressió en coordenades és

$$\left.\begin{array}{l} u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \end{array}\right\},$$

aleshores el producte escalar de dos vectors u i v tangents al punt de coordenades x s'expressa com

$$\langle u, v\rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \cdots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

cf. la figura 3. Per bilinealitat, és equivalent donar el producte escalar o la forma quadràtica corresponent, és a dir la norma dels vectors.

3.1. **Tensors.** L'assignació d'una forma bilineal a cada punt del tangent és un exemple de *tensor*, en aquest cas el tensor mètric o tensor de Riemann. Si canviem bilineal per multilineal i fem intervenir el dual, tenim la noció general de *tensor*.

Per exemple, els camps vectorials, que a cada punt de la varietat associen un vector, són tensors, i les formes diferencials també, perquè assignen a cada punt de la varietat un element del dual del tangent. Les funcions són el cas més senzill de tensor.

La notació dels tensors pot arribar a ser força ferragosa, i per simplificar s'utilitza *el conveni de sumació d'Einstein*, segons el qual, quan tenim *superíndexs* i *subíndexs coincidents* en expressions multiplicades, suposem que se sumen i ja no escrivim el sumatori. Per exemple, un camp V i una forma ω es poden escriure com:

$$V = \sum_i v^i \partial_i = v^i \partial_i \quad \text{i} \quad \omega = \sum_i w_i\, dx^i = w_i\, dx^i.$$

Aquí hem utilitzat l'abreviació dels camps de coordenades

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Per simplificar, moltes vegades s'ometen els termes ∂_i i dx^i, que se sobreentenen en funció dels índexs i superíndexs. Així el camp V i la forma ω es poden escriure:

$$V = v^i \quad \text{i} \quad \omega = w_i.$$

Per exemple, una mètrica, sense cap convenció prèvia s'escriuria com

$$\sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

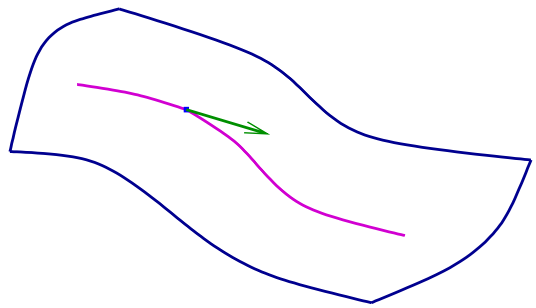

FIGURA 4. La longitud de corbes i l'element de línia.

però amb la convenció d'Einstein i ometent les bases canòniques de formes, escrivim

$$g_{ij}.$$

3.2. **Longituds.** Per mesurar longituds utilitzem l'element de línia:

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}.$$

Riemann ja utilitzava la notació ds, i l'expressió seria la mateixa si no fos perquè ell utilitzava sumatoris i no la convenció d'Einstein.

L'element de línia es fa servir per calcular la longitud $L(\gamma)$ d'un corba diferenciable γ:

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds.$$

Més precisament, si la corba s'escriu en coordenades com

$$\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \qquad t \in [a, b],$$

aleshores la seva longitud és

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b \| \frac{d\gamma}{dt} \| \, dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

Això ens permet calcular longituds de corbes contínues diferenciables a trossos.

La *distància* entre dos punts es defineix com l'ínfim de la longitud dels camins que uneixen dos punts. Aquest ínfim és en realitat un mínim, i les corbes que el realitzen s'anomena *geodèsiques*.

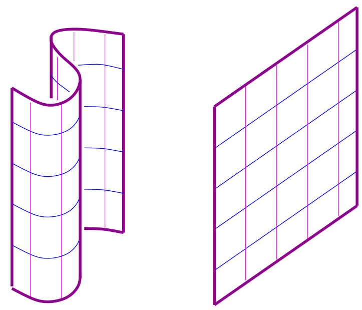

Figura 5. Exemple de superfícies a l'espai *isomètriques.*, amb la mateixa mètrica. La identificació (o *isometria*) preserva les línies paral·leles de la figura.

La distància determina l'element de línia, i per tant el tensor mètric de Riemann g i totes les altres propietats com ara els angles i les nocions que veurem més endavant: transport paral·lel, curvatura, etc. Per tant les varietats de Riemann estan caracteritzades per les propietats mètriques.

3.3. **Curvatura de Gauss.** Un cop sabem mesurar longituds, les nocions més importants són les diferents curvatures: la de Riemann, la de Ricci, l'escalar i la seccional o de Gauss, però ja les veurem més endavant. De moment tornem a Riemann i parlem de la curvatura de Gauss.

En la seva memòria de 1827 *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Gauss ens parla de superfícies a l'espai i de les diferents nocions intrínseques. És a dir, Gauss considera superfícies a l'espai amb la mètrica induïda, però pot passar que la mateixa mètrica es realitza per diferents inmersions de la varietat a l'espai, cf. la figura 5. Les nocions intrínseques són les que només depenen de la mètrica, no de com la superfície està situada a l'espai.

Gauss demostra el Teorema Egregi que porta el seu nom. Els treballs d'Euler i Meusnier havien introduït les anomenades curvatures principals, Gauss definí una nova noció de curvatura, que és el producte de les curvatures principals, actualment anomenada curvatura de Gauss (cf. figura 6). Observem que la curvatura de Gauss de les superfícies de la figura 5 és zero.

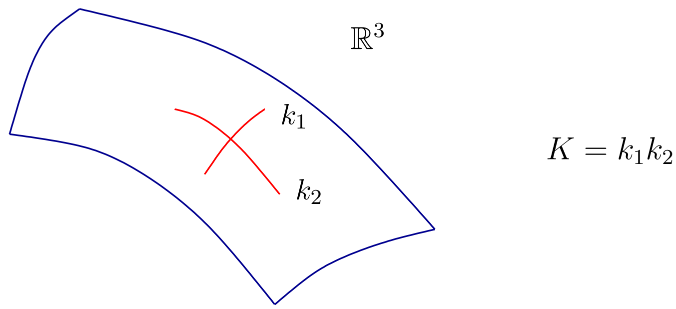

FIGURA 6. La cruvatura de Gauss K és el producte de les principals k_1 i k_2.

Teorema 3.1 (Teorema Egregi de Gauss)**.** *La curvatura Gaussiana és un invariant intrínsec.*

És a dir la curvatura de Gauss només depén de la mètrica intrínseca de la superfície i no de com està situada a l'espai. Riemann no només generalitzarà la noció de curvatura a qualsevol dimensió, sinó que la noció d'invariant intrínsec és una porta per la qual Riemann accedeix a un nou concepte de geometria.

4. Über die Hypothesen, welche der Geomtrie zu Grunde liegen

En aquesta secció comentarem alguns aspectes de la conferència. Spivak [38] conté una discussió més detallada a nivell matemàtic, i altres autors l'analitzen des d'un punt de vista més històric [12, 22, 27].

La introducció es titula *"Plan der Untersuchung"*, és a dir "Pla de la recerca". Riemann commença parlant de la confusió sobre l'estat de la geometria no euclidiana, que en aquest temps encara no estava completatment acceptada. De manera independent, el 1829 Lobachevsky i Bolyai havien construït geometries que començaven suposant que per un punt hi ha més d'una línia paral·lela a una línia donada, però encara s'esperava que es trobaria una contradicció a aquestes construccions. Riemann atribueix les dificultats trobades en l'estudi de la geometria euclidiana al fet que els geòmetres mai no havien separat el que anomenem propietats topològiques de l'espai de les seves propietats mètriques.

En el desenvolupament axiomàtic de la geometria, fins i tot la noció d'espai no està definida, i les seves propietats es dedueixen mitjançant els axiomes. Riemann ens proposa primer el plantejament de totes les mètriques possibles i després la determinació empírica de la mètrica a l'espai. De manera natural sorgeix la questió de trobar les dades més simples que ens permetin distingir l'espai d'altres possibles varietats i mètriques de dimensió tres. Amb una gran visió física, qüestiona la legitimitat d'extendre, a les escales massa petites o massa grans, les propietats que poguem determinar experimentalment per l'espai.

Després de la introducció, la memòria està estructurada en tres parts, que analitzem a continuació amb diferents nivells de detall.

4.1. **Part I. Varietats de dimensió n.** La primera part es titula *"Begriff einer nfach ausgedehnten Größe"* i s'hi introdueix la noció de varietat de dimensió n.

Tot i que no podem determinar fins a quin punt havia trobat la noció precisa de varietat, Riemann tenia clar que una varietat és localment homeomorfa a l'espai euclidià $\mathbf{R}^n$. Riemann exemplifica com es passa d'una varietat a una altra de dimensió superior o inferior: les varietats de dimensió $n+1$ s'obtenen variant en un paràmetre les de dimensió n, i els conjunts de nivell de certes funcions són varietats de dimensió inferior. Entre altres exemples, posa els espais de paràmetres, els continus dels colors.

Riemann també ens descriu la noció de *coordenades*, en una varietat de dimensió n calen n valors numèrics per determinar un punt:

> *Mitjançant n iteracions d'aquest procés* [fent referència a les funcions de nivell]*, la determinació de la posició en una n-varietat queda determinada per n determinacions numèriques...*

Per acabar aquesta primera part, també fa referència a les varietats de dimensiò infinita i, sense entrar en detalls, en posa exemples:

> *Aquestes varietats estan formades, per exemple, per les possibles funcions en un determinat domini, o per les possibles formes d'una figura sòlida, etc...*

4.2. **Part II. Secció 1. Element de línia.** Un cop introduïdes les varietats de dimensió N, Riemann passa a les nocions mètriques, i comença definit l'element de línia, que ens permet calcular longituds de corbes. L'element de línia només dependrà del punt de l'espai i del vector tangent de la corba, és a dir de la direcció cap on va la corba. Aquesta és la manera que té Riemann de donar la mètrica com una propietat intrínseca de l'espai, i la notació ds s'ha mantingut fins a l'actualitat. A continuació ho descrivim en detall.

Riemann comença la secció dient de quines corbes es cuida. En termes moderns, parlem de corbes que són diferenciables amb diferencial contínua, és a dir de classe C^1. En el seu llenguatge, Riemann ens parla de corbes de les quals...

> *...les raons de les quantitats dx varien continuament.*

Per aquestes corbes, la longitud s'obté integrant l'element de línia ds:

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds.$$

La fórmula que ens proposa Riemann per a l'element de línia és la següent:

> *ds = l'arrel quadrada d'una funció sempre positiva, homogènia de segon grau en les quantitats dx i amb coeficients funcions de x.*

És a dir

$$ds = \sqrt{\Sigma g_{ij}(x)\, dx^i dx^j},$$

on $g_{ij}(x)$ són els coefficients d'una matriu d'una forma quadràtica definida positiva, que és l'expressió que hem donat a la secció 3.2.

Riemann també ens diu que per a l'espai amb les coordenades canòniques l'expressió és

$$ds = \sqrt{\Sigma dx_i^2}.$$

L'arrel quadrada queda justificada per homogenitat, donat que tenim una forma quadràtica. Per què una forma quadràtica i no una forma de grau quatre? Riemann ens diu que...

> *...el següent cas en ordre de complexitat seria el de varietats en que l'element de línia es pot expressar com l'arrel quarta d'una expressió diferencial de grau quatre.*

Això demanaria molt esforç de càlcul que difícilment es justificaria ja que, segons Riemann...

> *...els resultats no es poden expressar geomètricament.*

L'explicació però no sembla gaire convincent, i potser una altra justificació és que, amb una forma quadràtica, es generalitza sense problemes la geometria intrínseca que Gauss havia desenvolupat per les superfícies a l'espai.

4.3. **Canvi de coordenades.** Un cop definit l'element de línia mitjançant coordenades locals, Riemann planteja la qüestió del *canvi de coordenades*. És a dir, donades dues eleccions de coordenades d'una mateixa regió de la varietat, com podem saber si corresponen a la mateixa mètrica?

Diem que dues expressions d'una mètrica són *equivalents* si podem passar d'una a l'altra mitjançant un canvi de coordenades. El problema de decidir si dues mètriques arbitràries són equivalents és molt complicat i no es pot respondre en general, ja que tal com Riemann ens diu, hi intervenen massa indeterminades, les $n(n-1)/2$ funcions g_{ij}. Malgrat això, es poden trobar invariants per distingir classes d'equivalència de mètriques, per exemple la curvatura.

Aquesta secció acaba amb les varietats que Riemann anomena *planes*, les que l'element de línia és equivalent al de l'espai Euclidià:

$$\sqrt{\sum dx^2}.$$

En la secció següent Riemann introduirà la curvatura i la veurà com una obstrucció a la platitud.

4.4. **Part II. Secció 2. La curvatura.** Abans de la curvatura, Riemann tria un sistema de coordenades adequat. Una de les primeres coses que aprenem en geometria de Riemann és que l'elecció d'un bon sistema de coordenades pot simplificar substancialment els càlculs. Les

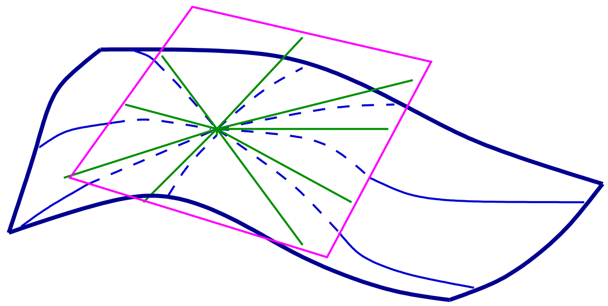

FIGURA 7. Aplicació exponencial. La figura representa les rectes del tangent que passen per l'origen i la seva imatge per l'aplicació exponencial, les geodèsiques que surten del punt base.

coordenades escollides per Riemann són les que avui anomenem *coordenades geodèsiques* o coordenades normals.

L'*aplicació exponencial* identifica rectes radials que surten de l'origen amb geodèsiques (minimitzants) de la varietat que surten del punt. La identificació es fa de manera que la distància a l'origen de coordenades correspon a la distància al punt: és a dir cada vector és enviat a una distància del punt base igual a la seva longitud. Aquesta aplicació està ben definida en un entorn de l'origen, i utilitza el fet que donat un vector existeix una única geodèsica tangent a aquest vector, llevat parametritzacions, cf. la figura 7.

En altres paraules, si T_pM denota l'espai tangent a un punt $p \in M$, existeix $U \subset T_pM$, un entorn de 0, tal que l'exponencial està ben definida i compleix:

$$\begin{array}{rcl} \exp_p : U \subset T_pM & \to & M \\ v & \mapsto & \gamma(1) \end{array},$$

on $\gamma(t)$ és l'única corba geodèsica determinada per les condicions inicials $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$.

A més tenim el resultat següent.

Teorema 4.1. *L'aplicació exponencial indueix un difeomorfisme entre un entorn de l'origen a l'espai tangent i un entorn del punt base a la varietat.*

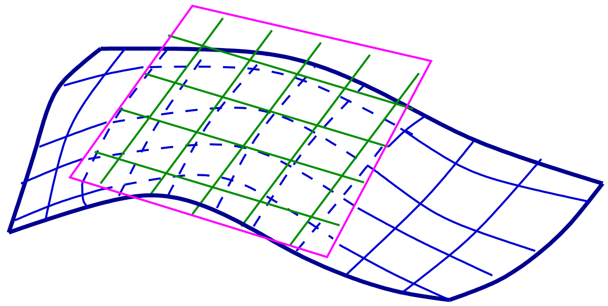

FIGURA 8. Coordenades normals o exponencials. En el pla tangent representem les coordenades rectangulars, i a la varietat la seva imatge per l'exponencial, és a dir les coordenades normals.

En conseqüència podem definir:

Definició 4.2. *Les* coordenades normals *són les coordenades cartesianes induïdes per l'aplicació exponencial i les coordenades canòniques o rectilínies de l'espai tangent (és a dir per les quals la forma quadràtica és la standard), cf. la figura 8.*

Riemann afirma que en coordenades geodèsiques:

- A l'origen ds^2 val $\sum(dx^i)^2$ (és a dir, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$).
- No hi ha terme de primer ordre en la sèrie de Laurent.
- El de segon ordre és combinació de $(x^1dx^2 - x^2dx^1)$, $(x^1dx^3 - x^3dx^1)$.

En llenguatge actual, això és equivalent al teorema 4.3 i a les simetries del tensor de Riemann.

Teorema 4.3. *En coordenades geodèsiques:*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}x^\alpha x^\beta + O(|x|^3).$$

Les simetries són:

$$R_{i\alpha\beta j} = -R_{i\alpha j\beta} = -R_{\alpha i\beta j} = R_{\beta ji\alpha},$$
$$R_{i\alpha\beta j} + R_{i\beta j\alpha} + R_{ij\alpha\beta} = 0.$$

Aquestes simetries són equivalents a la frase "El de segon ordre és combinació de $(x^1dx^2 - x^2dx^1)$, $(x^1dx^3 - x^3dx^1)$".

A partir d'aquí podem definir:

Definició 4.4. *El tensor $R_{i\alpha\beta j}$ s'anomena curvatura de Riemann.*

És a dir, utilitzant la multilinealitat definim un tensor pel seu valor en una base: R és l'únic tensor que satisfà $R(\partial_i, \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_j) = R_{i\alpha\beta j}$. Alternativament:

$$R(u^i\partial_i, v^\alpha\partial_\alpha, w^\beta\partial_\beta, z^j\partial_j) = u^iv^\alpha w^\beta z^j R_{i\alpha\beta j}.$$

Actualment aquesta no és la definició que se sol donar als llibres de text ni als cursos de geometria. Més endavant parlarem de connexions i de la definició actual, però val la pena veure com Riemann la dóna amb molt pocs prerequisits, tot i que quedi pendent de saber quins càlculs va fer per arribar a aquesta conclusió.

Un cop introduïda la seva curvatura, Riemann ens diu que recupera la curvatura de Gauss per superfícies. En llenguatge modern tindriem que si K és la curvatura de Gauss d'una superfície, aleshores

$$K = R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}.$$

Riemann no introdueix símbols pel tensor que més endavant portarà el seu nom, però que calcularà en un article que comentarem al paràgraf 5.1.

En el text ens diu:

> *Multiplicirt mit* $-3/4$ *wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche ganannt hat.*

Aqui el factor $1/4$ surt d'una normalització diferent a la nostra que Riemann fa, el signe es deu a una convenció diferent, mentre que el 3 prové del teorema 4.3.

4.5. **Part II. Secció 3. Curvatura seccional.** En la resta de seccions d'aquesta part II, Riemann desenvolupa la idea de curvatura i en dóna exemples.

En el cas bidimensional, Riemann ja ha explicat que la seva curvatura no és altra que la de Gauss. Per entendre-la en dimensió superior, Riemann explica a la secció tres el que actualment s'anomena *curvatura seccional*. Donat l'espai tangent a un punt base i un pla de l'espai tangent, és a dir un subespai vectorial de dimensió dos, podem considerar la superfície que conté totes les geodèsiques que passen pel punt base i són tangents a aquest pla. Obtenim d'aquesta manera una superfície, i la seva curvatura de Gauss és la curvatura de Riemann de les coordenades corresponents (una certa quantitat multiplicada per un factor $-3/4$), de la mateixa manera que el cas purament bidimensional. Riemann ens diu que quan ens restringim a plans lineals que passen per l'origen, en coordenades geodèsiques tornem a recuperar la curvatura de Gauss de les superfícies.

4.6. **Part II. Secció 4. Curvatura seccional constant.** Un cop introduïda la curvatura seccional, Riemann dóna l'expressió d'una mètrica de curvatura constant α. Amb una bona elecció de coordenades, aquesta mètrica s'expressa com:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma_i dx_i^2}.$$

Aquest càlcul és un altre exemple de bona elecció de coordenades, car ara ja no són les geodèsiques o normals que ha fet servir en la definició, sinó unes altres que li permeten tenir una expressió molt més senzilla.

Encara que Riemann no ho digui, aquesta fórmula porta implícit el resultat que, quan la curvatura seccional és constant, la mètrica queda determinada pel valor α de la curvatura, ja sigui localment, ja sigui globalment en el cas simplement connex.

Observem que dóna models de curvatura constant negativa, com els que havien construït Bolyai i Lobachevsky. Per exemple, per $\alpha = -1$ i amb el canvi de variable $x = 2y$, obtenim el que actualment s'anomena model de Poincaré.

A més, aquesta fórmula ens permet tenir una intuició sobre la curvatura. Per exemple, si mirem les esferes S_r de radi $r > 0$ (el conjunt de punts a distància r d'un punt donat) la distància a S_r és igual a la de l'esfera unitat de $\mathbf{R}^n$ multiplicada per un factor homotètic. Aquest

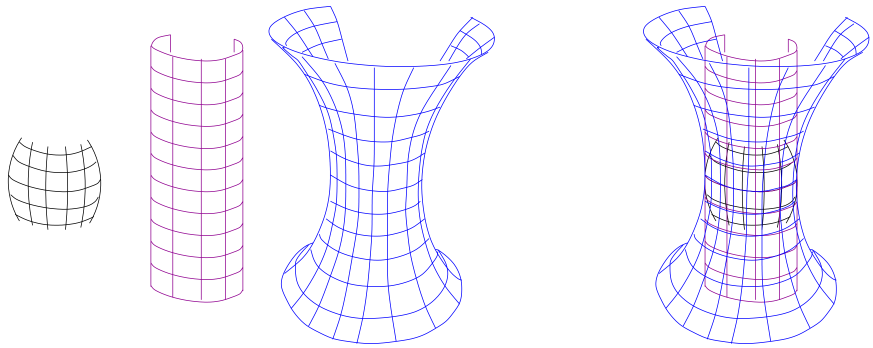

Figura 9. Superfícies de rotació de curvatura constant que són paral·leles a l'equador.

factor depén de la curvatura i el seu valor és

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin(r\sqrt{\alpha}) & \text{si } \alpha > 0; \\ r & \text{si } \alpha = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\sinh(r\sqrt{-\alpha}) & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Aquest factor fa referència a les distàncies, el tensor mètric s'hauria de multiplicar pel seu quadrat. Per tant en curvatura positiva les esferes "són menors" que les corresponents a l'espai euclidià, i en curvatura negativa, "són majors". En particular, per $\alpha > 0$ aquestes esferes col·lapsen quan $r = \pi/\sqrt{\alpha}$, que és el diàmetre de l'esferes de curvatura constant $\alpha > 0$.

4.7. **Part II. Secció 5. Superfícies de rotació.** Per acabar la part II, a la secció 5 Riemann descriu superfícies de rotació de curvatura constant, sense ni un dibuix, és clar. Si col·loquéssim superfícies de rotació amb un mateix paral·lel (òrbita de rotació d'un punt) que fossin tangents al cilindre corresponent, les superfícies de més curvatura estarien a dins de les menys curvades. En particular, les de curvatura positiva estarien a dins del cilindre, i les de curvatura negativa a fora. Vegeu la figura 9.

4.8. **Part III. Aplicacions a l'espai.** A la tercera part, Riemann discuteix com es pot intentar determinar quina és la mètrica de l'espai físic que ens envolta. En altres paraules, quina és la relació de la geometria amb el món real.

Les qüestions que planteja són: primer quina és la dimensió de l'espai i segon quina geometria descriu l'espai físic. En la primera qüestió, Riemann observa que la noció de dimensió assumeix una noció de continuitat, que per conjunts finits o discrets no té cap sentit. Suposant que l'espai físic es pugui veure com una varietat de dimensió finita, té límits o frontera? És acotat? Per exemple, si la curvatura és constant i positiva, necessàriament serà acotat.

La geometria just definida i més en general el càlcul infinitessimal li serveix a una certa escala, però es planteja la seva validesa a escala infinitessimal. En aquest sentit la visió de Riemann per la física és gairebé profètica:

"La questió de la validesa de la geometria en l'infinitament petit està relacionada amb la qüestió de la base interna de la relació mètrica de l'espai. Per a aquesta qüestió, que encara pot ser considerada part de la teoria de l'espai, l'observació prèvia és aplicable, és a dir que una varietat discreta té una relació mètrica inherent, mentre que en el cas continu ha de venir d'un altre lloc. Per tant o bé la realitat que està a la base de l'espai ha de formar una varietat discreta, o bé hem de buscar les bases per les relacions mètriques a fora, en forces de lligadura que hi actuen."

"La resposta a aquesta qüestió només es pot trobar començant des de la concepció dels fenòmens justificats previament per l'experimentació, en els quals Newton es fonamentà, i per canvis successius deguts a fenòmens no explicats. Investigacions com la que hem portat a terme aquí i que provenen de nocions generals només poden servir per garantir que aquest treball no està limitat per conceptes massa restringits, i que el progrés en el reconeixement de la relació entre les coses no està obstaculitzat per prejudicis tradicionals."

"Això ens porta als dominis d'una altra ciència, al reialme de la física, en el qual la natura de la present ocasió no ens permet d'entrar."

5. Desenvolupament posterior

A l'apartat 5.1 discutim una construcció de Riemann en què calcula el tensor de curvatura en altres coordenades i el veu efectivament com una obstrucció a la platitud. Això donà lloc als treballs de Christoffel i Lipschitz. A la resta del capítol comentarem treballs de Ricci-Curbastro i Levi-Civita i mencionarem breument Einstein i Grossmann.

5.1. **Tensor de curvatura en altres coordenades.** En la conferència d'habilitació, Riemann deia que la curvatura era una obstrucció a la platitud. Això no ho havia demostrat, ni tampoc no havia donat l'expressió de $R_{i\alpha\beta j}$ en un sistema de coordenades arbitrari. En un article [37] sotmés a l'academia de ciències el dia 1 de juliol de 1861, Riemann dóna la fórmula per $R_{i\alpha\beta j}$ en funció de g_{ij} i les seves derivades. L'article estableix un criteri de platitud per a una mètrica qualsevol.

Expliquem el càlcul fent servir el formalisme de Christoffel, introduït posteriorment en un article [8] que tracta sobre aquest treball de Riemann. Definim els símbols de Christoffel com

$$\Gamma_{ab|c} = \frac{1}{2}(\partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca}),$$

si fem servir la notació $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$. Aleshores

$$-\frac{1}{2}R_{i\alpha\beta j} = \partial_\alpha\partial_j g_{i\beta} + \partial_\beta\partial_i g_{j\alpha} - \partial_\alpha\partial_\beta g_{ij} - \partial_i\partial_j g_{\alpha\beta} + g^{lm}(\Gamma_{l\alpha|j}\Gamma_{mi|\beta} - \Gamma_{li|j}\Gamma_{m\alpha|\beta}),$$

on g^{lm} denota la matriu inversa de g_{ij}, i per tant

$$\sum_k g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La notació que Riemann utilitzava per a l'expressió $-\frac{1}{2}R_{i\alpha\beta j}$ era

$$(i\alpha, \beta j).$$

L'article va romandre gairebé desconegut fins a la publicació de les obres completes el 1876.

Riemann donava la condició necessària

$$R_{i\alpha\beta j} = 0$$

per tal que una varietat fos plana i va indicar vagament que era suficient. La demostració de la suficiència la donaren Christoffel (l'introductor dels símbols Γ) el 1867 [8] i Lipschitz el 1870 [24].


FIGURA 10. Christoffel (1829-1900) i Lipschitz (1832-1903).

5.2. **Derivada covariant.** A principis de 1887 [36], Gregorio Ricci-Curbastro va desenvolupar la derivació covariant de tensors. Comencem amb la derivada covariant de camps. A partir dels símbols $\Gamma_{jk|r}$ de l'apartat anterior, definim el que actualment es coneix com a símbols de Christoffel:

$$\Gamma^i_{jk} = \sum g^{ir}\Gamma_{jk|r}.$$

Aleshores la *derivada covariant* del camp $V = \sum v^i\partial_i$ en la direcció ∂_k és:

$$\nabla_{\partial_k} V = \partial_k v^i \partial_i + \Gamma^i_{jk} v^j \partial_i.$$

La derivada covariant és lineal respecte a la direcció de derivació:

$$\nabla_{u^k\partial_k} V = u^k \nabla_{\partial_k} V.$$

Per a les funcions, la derivada covariant s'entén que és la derivada direccional.

Aquesta derivada covariant de camps s'estén de manera natural a tensors, sempre utilitzant la regla de Leibnitz i la compatibilitat amb contraccions. És a dir, si X i Y són dos tensors, aleshores

$$\nabla_v(X \otimes Y) = \nabla_v X \otimes Y + X \otimes \nabla_v Y.$$

A més, ∇_v commuta amb les contraccions. Per posar un exemple de contracció, si X és un camp i ω una forma, aleshores $\omega(X)$ és una funció obtinguda per contracció del tensor $\omega \otimes X$. Per tant la regla de

Leibnitz i la compatibilitat amb les contraccions ens diu:

$$\nabla_v(\omega(X)) = (\nabla_v\omega)(X) + \omega(\nabla_v X).$$

Això ens permet calcular la derivada covariant de formes:

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_k}\omega = (\nabla_{\partial_k}\omega)(\partial_j)dx^j &= (\partial_k(\omega(\partial_j)) - \omega(\nabla_{\partial_k}\partial_j))dx^j \\ &= (\partial_k\omega_j - \Gamma^i_{jk}\omega_i)dx^j.\end{aligned}$$

Un altre exemple: si X i Y són camps, aleshores $g(X,Y)$ és una funció, i tenim:

$$v(g(X,Y)) = \nabla_v(g)(X,Y) + g(\nabla_v X, Y) + g(X, \nabla_v Y).$$

Per tant

$$\nabla_v(g)(X,Y) = v(g(X,Y)) - g(\nabla_v X, Y) - g(X, \nabla_v Y). \tag{1}$$

Pel fet de ser lineal respecte a v, complir la regla de Leibnitz i ser compatibles per contraccions, diem que ∇ és una derivada covariant o una *connexió*. Tal com l'hem definida, compleix dues propietats més que la caracteritzen entre totes les connexions possibles:

$$\begin{aligned}&\nabla g = 0,\\ &\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].\end{aligned}$$

De la primera propietat diem que el tensor de Riemann g és constant, i de la segona que és compatible amb el parèntesi de Lie. En particular $\nabla g = 0$ es llegeix, mitjançant l'equació 1, com:

$$v(g(X,Y)) = g(\nabla_v X, Y) + g(X, \nabla_v Y).$$

Aquesta connexió s'anomena precisament connexió de Levi Civita, de qui parlem al proper paràgraf.

5.3. **Transport paral·lel.** Levi Civita introduí el 1917 [23] la noció de transport paral·lel. El transport paral·lel d'un vector al llarg d'una corba consisteix a demanar que la derivada covariant respecte al vector tangent sigui zero. La teoria d'equacions diferencials lineals ens diu que el trasport paral·lel existeix i és únic, perquè per construir el transport paral·lel cal resoldre una equació diferencial lineal.

La noció de transport paral·lel serveix per derivar, car dóna la manera de transportar vectors i tensors al llarg dels espais tangents a una corba, i un cop en el mateix espai tangent té sentit parlar de derivada.

FIGURA 11. Ricci-Curbastro (1853-1925) i Levi-Civita (1873-1941).

El transport paral·lel i la derivada covariant són equivalents, i la paraula paral·lel s'ha d'entendre com constant.

Les geodèsiques poden definir-se com les corbes tals que el seu vector tangent és paral·lel, de la mateixa manera que les rectes a l'espai euclidià tenen vector tangent constant.

En general el transport paral·lel depén de la corba, llevat del cas pla, de curvatura constant zero.

Podem veure la curvatura de Riemman com una obstrucció a la commutativitat de les derivades covariants (per tant dels tranports paral·lels). Per camps de coordenades ∂_i, ∂_j, ∂_k i ∂_l tenim:

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = g(\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k, \partial_l).$$

Per camps en general, el tensor de curvatura es defineix com

$$R(X, Y, Z, T) = g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, T).$$

A partir d'aqui es pot veure com una mesura de la no commutativitat de ∇.

5.4. **Contracions o traces.** El tensor $R_{i\alpha\beta j}$ és força complicat de manipular i moltes vegades es pensa com un endomorfisme simètric del fibrat de 2-formes. A vegades se'n consideren contraccions, que enumerem a continuació.

- *Curvatura de Ricci.* Té el mateix ordre que la mètrica g_{ij}, és a dir és una forma bilineal simètrica:

$$R_{ij} = R_{\alpha i \beta j} g^{\alpha\beta} = -R_{i\alpha\beta j} g^{\alpha\beta}.$$

Recordem que $g^{\alpha\beta}$ denota la matriu inversa de g_{ij} i que utilitzem la convenció d'Einstein, per tant estem fent la suma $\sum_{\alpha,\beta}$.

Sense coordenades és un tensor $Ric(X, Y)$, on X i Y són camps. És a dir, $R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j)$ i donats dos camps $u^i\partial_i$ i $v^i\partial_i$,

$$Ric(u^i\partial_i, v^j\partial_j) = u^i v^j R_{ij}.$$

Com que és un tensor simètric, $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$, podem pensar en la forma quadràtica corresponent, de manera equivalent:

$$Ric(X, X).$$

- Curvatura escalar. Aquesta ja és una funció, perquè és una nova contracció de la curvatura de Ricci

$$s = R_{ij} g^{ij}.$$

Aquestes contraccions poden veure's com traces: per una base ortonormal $g^{ij} = \delta^i_j$, i així $s = \sum R_{ii}$ és la traça.

- Curvatura seccional d'un pla. Si escollim $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal per un pla, aleshores la curvatura seccional del pla que generen $\langle e_1, e_2\rangle$ es defineix com:

$$K(\langle e_1, e_2\rangle) = R(e_1, e_2, e_1, e_2).$$

Si la base no és ortonormal, aleshores

$$K(\langle e_1, e_2\rangle) = \frac{R(e_1, e_2, e_1, e_2)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)^2}.$$

La curvatura seccional ens permet recuperar la curvatura de Ricci. De fet si v és un vector unitari i el completem en una base ortonormal del tangent $\{v, e_2, \ldots, e_n\}$, aleshores

$$Ric(v, v) = \sum_{i=2}^{n} K(\langle v, e_i\rangle).$$

La curvatura de Ricci es relaciona amb el volum. En coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$, la forma de volum s'escriu com

$$d\,vol = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

L'anàleg del teorema 4.3 és:

Teorema 5.1. *En coordenades geodèsiques:*

$$d\,vol(x) = \left(1 - \frac{1}{6} R_{ij} x^i x^j + O(|x|^3)\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

5.5. **L'Equació d'Einstein.** Com que se situa en l'espai temps quatridimensional, per l'equació d'Einstein no parlem d'una mètrica de Riemann sinó d'una pseudomètrica o mètrica de Lorentz. L'única diferència és que el tensor g_{ij} no és una mètrica definida positiva, sinó que té signatura $(3, 1)$, és definida positiva a les direccions espaials i negativa en les temporals.

L'equació d'Einstein és la següent:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} s\, g_{ij} = T_{ij}.$$

A part del tensor mètric g_{ij}, els termes que hi intervenen són la curvatura de Ricci R_{ij}, la curvatura escalar s i el tensor impusió-energia T_{ij}. Aquest darrer descriu el flux d'energia i moment en l'espai temps, generalitzant el tensor d'impulsió en física de Newton. És la font del camp gravitacional en relativitat general, i l'equació d'Einstein ens descriu com es veu afectada la geometria per aquest tensor.

Més tard Einstein escrigué sobre aquell període:

> ...gairebé mai en la la meva vida no he treballat tant durament, i m'he imbuït de gran respecte per les matemàtiques, la part més subtil de la qual havia mirat des de la meva ingeniutat com una simple luxúria fins ara.

La teoria de la relativitat general va suposar la consolidació definitiva de la geometria de Riemann i del càlcul tensorial. Per fer el pas de la relativitat restringida a la general, Riemann va comptar amb l'ajut d'un matemàtic de Zurich, Marcel Grossmann [11].

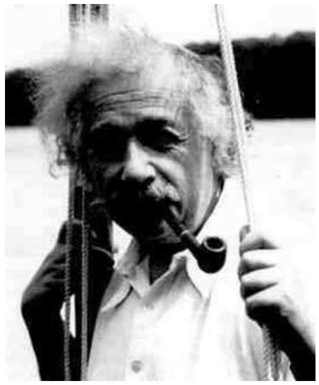


FIGURA 12. Einstein (1879-1955) i Grossmann (1878-1936).

A l'equació d'Einstein se li pot afegir un terme cg_{ij}, on c és una constant cosmològica i el valor de la qual els cosmòlegs no es posen d'acord a determinar.

6. Curvatura i topologia

Comentem breument alguns resultats que ens relacionen la curvatura amb la topologia. És a dir, tenir la curvatura d'un signe o un altre ens dóna informació sobre la topologia. Els resultats d'aquest capítol es poden trobar a molts llibres de geometria de Riemann, com per exemple [3, 6, 17, 33].

Comencem per un exemple de curvatura positiva, pel teorema de Myers, quan la curvatura de Ricci està acotada inferiorment. El tensor de Ricci R_{ij} i el de Riemann g_{ij} es poden comparar com a formes quadràtiques.

Una varietat de Riemann (M^n, g) s'anomena completa si és un espai mètric complet (les successions de Cauchy convergeixen). Equivalentment, pel teorema de Hopf-Rinow, les geodèsiques es poden allargar indefinidament.

Teorema 6.1 (Myers). *Sigui (M^n, g) una varietat de Riemann completa. Si $R_{ij} \geq (n-1)c\, g_{ij}$ per cert $c > 0$, aleshores* $\operatorname{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

El teorema ens diu que una cota inferior positiva a la curvatura de Ricci ens dóna una cota superior del diàmetre. En particular, aplicada al recobridor universal:

Corol·lari 6.2. *Sigui* (M^n, g) *una varietat de Riemann completa. Si* $R_{ij} \geq (n-1)c\, g_{ij}$ *per cert* $c > 0$*, aleshores* $\pi_1(M^n)$ *és finit.*

La curvatura de Ricci es pot veure com una suma de curvatures seccionals, per tant el teorema de Myers s'aplica a varietats de curvatura seccional positiva.

Corol·lari 6.3. *Sigui* (M^n, g) *una varietat de Riemann completa. Si la curvatura seccional és* $\geq c > 0$ *aleshores* $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$ *i* $\pi_1(M^n)$ *és finit.*

Teorema 6.4 (Cartan-Hadamard)**.** *Sigui* (M^n, g) *una varietat de Riemann completa. Si la seva curvatura seccional és negativa o nul·la, aleshores per tot punt* $p \in M^n$*, l'aplicació exponencial* $T_pM^n \to M^n$ *és un recobriment. En particular el recobridor universal de* M^n *és* $\mathbf{R}^n$*.*

Corol·lari 6.5. *Si* (M^n, g) *és una varietat de Riemann compacta de curvatura seccional negativa o nul·la, aleshores* $\pi_1(M^n)$ *és infinit.*

Per tant, és difícilment compatible la curvatura de Ricci positiva (o curvatura seccional positiva) amb la curvatura seccional negativa o nul-la.

Cal anar amb compte perquè la condició de curvatura de Ricci negativa no és cap restricció, de fet un teorema de Lohkamp [25] afirma que en dimensió superior o igual a tres tota varietat de Riemann admet una mètrica de curvatura de Ricci negativa.

Els dos teoremes següents ens diuen que curvatura seccional estrictament negativa i curvatura zero són incompatibles.

Teorema 6.6 (Preissman)**.** *Sigui* (M^n, g) *una varietat de Riemann completa. Si la seva curvatura seccional és estrictament negativa, aleshores* $\pi_1(M^n)$ *no conté cap subgrup isomorf a* $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$*.*

Teorema 6.7 (Bieberbach)**.** *Sigui* (M^n, g) *una varietat de Riemann plana de dimensió* n*. Aleshores* $\pi_1(M^n)$ *és una extensió finita del grup abelià lliure* $\mathbf{Z}^m$*, amb* $m \leq n$*. A més* $m = n$ *si i només si* M^n *és compacta.*

Les idees de geometria de comparació s'han extés a espais mètrics (espais d'Alexandrov, espais CAT) i s'han aplicat a teoria de grups, donant lloc a l'anomenada teoria geomètrica de grups. La idea de curvatura s'aplica doncs a diversos camps de les matemàtiques, més enllà de la geometria.

7. Curvatura i varietats tridimensionals

En aquesta darera secció volem explicar un desenvolupament recent, la demostració de la conjectura de Poincaré mitjançant la geometria de Riemann, en particular el flux de Ricci, introduït per R. Hamilton el 1982. Els fluxos per curvatura tenen moltes aplicacions i estan molt extesos, però aqui només ens ocuparem del flux de la curvatura de Ricci.

Recordem que la conjectura de geometrització fou enunciada per Thurston a la dècada dels 1970 [39] i afirma el següent:

Conjectura 7.1. *Tota varietat tridimensional compacta es descompon de manera canònica en trossos geomètrics.*

Per tros *geomètric* entenem una varietat amb interior equipat amb una mètrica localment homogènia, és a dir, que dos punts qualsevol de l'interior de la varietat tenen entorns isomètrics. Dit d'una altra manera, les propietats locals no ens permeten distingir els punts.

La descomposició canònica de la conjectura té dues etapes. Fa referencia a la descomposició en summa connexa, deguda a Kneser l'any 1929 [21], i a la descomposició en tors de obtinguda el 1979 de manera independent per Jaco-Shalen i Johannson [18, 19].

Aquesta conjectura implica la de Poincaré: tota varietat tancada de dimensió tres simplement connexa és homeomorfa a l'esfera S^3. Cal insistir en que Thurston va revolucionar la topologia de les varietats tridimensionals al fer intervenir la geometria. Sense la seva capacitat de visió és poc probable que en aquests moments la conjectura de Poincaré estigués demostrada.

Perelman conclogué la demostració de la conjectura de geometrització a partir del flux de Ricci construït per Hamilton. En particular demostrà la conjectura de Poincaré. Podem veure-ho com una altra aplicació de

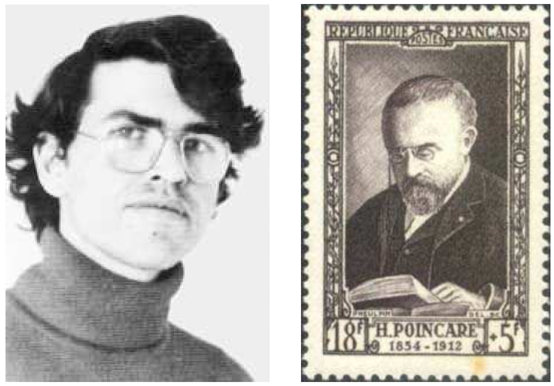

FIGURA 13. Thurston (1946) i Poincaré (1854-1912).

les idees de Riemann, que exemplifica el fet que no es poden deslligar les propietats topològiques de les varietats de les seves mètriques.

7.1. **Flux de Ricci.** Definim el flux de Ricci com la solució de l'equació d'evolució

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \text{ Ric},$$

on g denota la mètrica de Riemann i Ric el seu tensor de Ricci corresponent. Es tracta d'una equació en derivades parcials en l'espai de tensors de la varietat que són dues vegades covariants i simètrics. Aquest tipus d'equacions s'anomenen d'evolució, ja que la mètrica de la varietat anirà canviant al llarg del temps segons aquesta equació.

En coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$, l'equació s'escriu:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\, R_{ij}.$$

Podriem intentar escriure el terme R_{ij} en funció dels g_{ij} i les seves derivades parcials, però ens quedaria un sistema massa complicat.

7.2. **Existència.** L'existència de solucions en temps positius no és gens senzilla de demostrar. L'existència de solucions en temps negatius es falsa, com per l'equació de la calor.

Teorema 7.2 (Existència i unicitat en temps curt)**.** *Si M és una varietat compacta amb mètrica g_0, aleshores l'equació del flux de Ricci amb condició inicial g_0 té una única solució definida en temps $t \in [0, T)$ per cert $T > 0$.*

Aquest teorema fou provat per Hamilton [13], mitjançant un teorema de la funció inversa de Nash-Moser, i poc després DeTurck [10] va donar-ne una demostració molt més senzilla trencant la invariància per difeomorfismes.

Si la varietat no és compacta, l'existència i unicitat no tenen perquè ser certes. Es compleixen quan la varietat és completa i la curvatura està acotada [7], però es poden construir exemples no complets amb infinites solucions, o exemples amb curvatura no acotada sense solució.

7.3. **Exemples.** Comencem amb l'exemple més senzill possible: suposem que la mètrica inicial g_0 té curvatura seccional constant K, la qual cosa vol dir que el tensor de Ricci és un múltiple constant del tensor mètric:

$$\mathrm{Ric}_{g_0} = (n-1)K\, g_0,$$

on n és la dimensió. Aleshores, sabent l'existència i unicitat de solucions, ens restringim a mètriques homotètiques

$$g_t = f(t) g_0$$

i trobem solucions d'aquest tipus. Com que el tensor de Ricci és invariant per homotècies, $\mathrm{Ric}_{g_t} = \mathrm{Ric}_{g_0} = (n-1)K\, g_0$, l'equació esdevé:

$$f' = -2(n-1)K,$$

i la solució és

$$g_t = (1 - 2K(n-1)t)\, g_0.$$

Tenim tres tipus de comportament segons el signe de la curvatura seccional K inicial:

- Per $K = 0$, la solució és constant.
- Per $K < 0$ la solució s'expandeix durant un temps infinit, i la curvatura s'acosta a zero.
- Per $K > 0$ la solució es contrau fins a col·lapsar en un temps finit $T = \frac{1}{2\,K\,(n-1)}$, i la curvatura tendeix a infinit.

Essencialemnt veiem que, en el cas de curvatura constant, el flux es limita a fer homotècies, a diferents velocitats.

7.4. **Primers resultats.** A [13, 14], a més de l'existència, Hamilton provà que el flux de Ricci servia per demostrar la conjectura de geometrització quan la varietat tenia una mètrica amb curvatura de Ricci no negativa (primer quan $Ric > 0$ i després quan $Ric \geq 0$).

Teorema 7.3 (Hamilton 1982)**.** *Si una varietat compacta tridimensinal M^3 admet una mètrica amb* $\mathrm{Ric} > 0$*, aleshores el flux de Hamilton-Ricci convergeix, després d'homotècia, cap a una mètrica de curvatura seccional positiva.*

Hamilton va desenvolupar una sèrie de princips del màxim per a tensors, que li permeteren demostrar el resultat següent.

Teorema 7.4 (Hamilton 1984)**.** *Si una varietat compacta tridimensinal M^3 admet una mètrica amb* $\mathrm{Ric} \geq 0$*, aleshores tenim tres possibilitats:*

(1) *La mètrica és plana (curvatura constant zero).*
(2) $\mathrm{Ric} > 0$ *per $t > 0$, i per tant el flux convergeix a una mètrica de curvatura constant positiva, després de renormalitzar-la.*
(3) *La mètrica és localment un producte $g = g_1 + d\,x^2$. En aquest cas la varietat és $S^2 \times S^1$ o un quocient seu compatible amb el producte.*

El flux té molt bon comportament en dimensió tres per a varietats amb curvatura de Ricci positiva o nul·la, però ara veurem que es poden crear singularitats.

7.5. **Pinçament.** Veiem ara un exemple amb una singularitat. Apliquem el flux a l'esfera S^3 amb una mètrica que té un coll. Això vol dir que és una mètrica en la qual l'equador és molt més estret que els tròpics, cf. la figura 14.

Veiem el coll com $S^2 \times I$, de manera que per cada valor de $x \in I$ tenim una mètrica a l'esfera $S^2 \times \{x\}$. Escollim una mètrica tal que l'esfera del centre tingui un diàmetre molt més petit que les esferes de la vora del coll. Si a més escollim la longitud de l'interval molt llarga, això es pot fer de tal manera que el diàmetre de l'esfera del centre tendeixi a

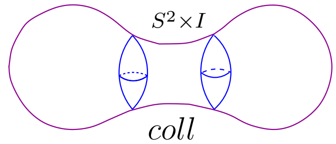

FIGURA 14. S^3 amb un coll.

zero abans, ja que un diàmetre molt petit correspon a molta curvatura seccional, i com que l'interval és molt llarg, en les altres direccions gairebé no hi ha curvatura. Això s'anomena una punxada (figura 15).

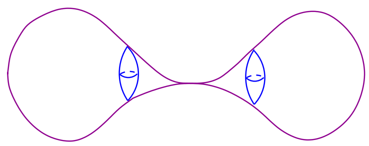

FIGURA 15. S^3 punxada.

Tot i que l'exemple sigui força intuitiu, no és gens fàcil de demostrar que es crea un pinçament [2].

7.6. **Heurística.** Per entendre perquè aquesta equació pot ser útil per la conjectura de geometrització, observem que en coordenades harmòniques (i.e. $\Delta(x^i) = 0$) l'equació del flux de Ricci s'escriu:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta(g_{ij}) + Q_{ij}(g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial x})$$

on $\Delta(g_{ij})$ és el laplacià de la funció escalar g_{ij} (no el tensor) i Q_{ij} és una expressió quadràtica. Aquesta és una equació de *reacció-difusió*. El terme del Laplacià és el de *difusió*, la seva contribució a l'equació s'interpreta que tendeix a repartir la mètrica de manera uniforme. És un comportament semblant al de l'equació de la calor: en un cos on hi ha zones fredes i calentes, la temperatura flueix de les parts calentes a les fredes per tendir a uniformitzar-se. El terme quadràtic Q_{ij} és el de *reacció*, perquè s'entén que contribueix a crear singularitats, per analogia amb les equacions que descriuen certes reaccions químiques. En conseqüència podriem pensar que l'heurística del programa de Hamilton és la següent:

> *"O bé $g(t)$ convergeix cap a una mètrica localment homogènia o bé crea singularitats que corresponen a una descomposició canònica."*

Evidentment les coses no seran tan senzilles. Hi haurà singularitats que donaran sumes connexes però potser sumes topològicament trivials (amb esferes), com de fet passa al pinçament descrit al paràgraf 7.5.

Els tors de Jaco-Shalen i Johannson no surten de singularitats, sinó que en el comportament a llarg terme del flux, hi ha parts que convergeixen en una mètrica hiperbòlica (de curvatura constant -1) i parts que s'enfonsen (part en què el radi d'injectivitat tendeix a zero despreés d'una homotècia que ens normalitza la curvatura 1). En les parts que s'enfonsa, no hi ha convergència de la mètrica, i és mitjançant l'estudi topològic de les varietats enfosades que sabem que la varietat és geomètrica [1].

Cal tenir en compte que la dimensió també compta en si guanya la part de difusió o de reacció. En dimensió dos guanya la part de difusió [15], perquè el flux sempre convergeix. De fet, el flux redemostra el teorema d'uniformització per a superfícies de Poincaré-Koebe dintre de la classe conforme, perquè el flux en superfícies no canvia la classe conforme. En dimensió quatre, guanya clarament la part de reacció, perquè no hi ha uniformització possible. Per tant és en dimensió tres quan es produeix un equilibri delicat.

Figura 16. Hamilton (1943) i Perelman (1966).

Per acabar, direm molt breument que, a partir dels resultats que ja havia aconseguit, Hamilton desenvolupà un programa per demostrar la conjetura de geometrització [16], que no pogué portar a terme perquè no controlava les singularitats del flux. Fou Perelman, ben conegut per les seves habilitats tècniques en geometria de Riemann, qui aconseguí entendre les singularitats i completà el programa de Hamilton en tres preprints [30, 32, 31]. La comprovació que els preprints de Perelmann donaven la demostració ha generarat molta activitat, [20, 28, 5, 29, 4, 26, 9], i tot i que moltes coses no hi eren, tothom està d'acord en que la demostarció final és de Perelman, i en conseqüència li donaren la medalla Fields el 2006. No la recollí, però això ja és una altra història.

Referències

[1] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti. *Weak collapsing and geometrisation of aspherical 3-manifolds*. Preprint. math.GT/0706.2065.

[2] Sigurd Angenent and Dan Knopf. An example of neckpinching for Ricci flow on S^{n+1}. *Math. Res. Lett.*, 11(4):493–518, 2004.

[3] Arthur L. Besse. *Einstein manifolds.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 10. Berlin etc.: Springer-Verlag. XII, 510 p. DM 198.00 , 1987.

[4] Gérard Besson. Preuve de la conjecture de poincaré en déformant la métrique par la courbure de ricci [d'après g. perel'man]. *Astérisque*, (307):Exp. No. 947, 309–347, 2006. Séminaire Bourbaki, Vol. 2004/2005.

[5] Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian J. Math.*, 10(2):165–492, 2006.

[6] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[7] Bing-Long Chen and Xi-Ping Zhu. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. *J. Differential Geom.*, 74(1):119–154, 2006.

[8] E. B. Christoffel. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke 2^{ten} Grades. *J. Reine Angew. Math.*, 70:46–70, 1869.

[9] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3):561–569 (electronic), 2005.

[10] Dennis M. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Differential Geom.*, 18(1):157–162, 1983.

[11] A. Einstein and M. Grossmann. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. *Zs. f. Math u. Phys.*, 62:225–261, 1914.

[12] Joan Girbau i Badó. La geometria diferencial, de Gauss a Riemann. In *El desenvolupament de les matemàtiques al segle XIX*, Arx. Sec. Cièn., LXXV, pages 41–53+photo on p. 40. Inst. Estudis Cat., Barcelona, 1984.

[13] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.

[14] Richard S. Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. *J. Differential Geom.*, 24(2):153–179, 1986.

[15] Richard S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. In *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 71 of *Contemp. Math.*, pages 237–262. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[16] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[17] Emmanuel Hebey. *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés.* Fondations. Paris: Diderot Editeur. viii, 406 p. FF 195.00 , 1997.

[18] William H. Jaco and Peter B. Shalen. Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 21(220):viii+192, 1979.

[19] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundaries*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, 1979.

[20] Bruce Kleiner and John Lott. *Notes on Perelman's papers.* Preprint. math.DG/0605667.

[21] H. Kneser. Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht D. M. V.*, 38:248–260, 1929.

[22] Detlef Laugwitz. *Bernhard Riemann. 1826-1866. Turning points in the perception of mathematics. (Bernhard Riemann. 1826-1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik.).* Vita Mathematica. 10. Basel: Birkhäuser. 346 p. , 1996.

[23] T. Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura *riemanniana. Palermo Rend.*, 42:172–205, 1917.

[24] R. Lipschitz. Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. *J. Reine Angew. Math.*, 72:1–56, 1869.

[25] Joachim Lohkamp. Metrics of negative Ricci curvature. *Ann. of Math. (2)*, 140(3):655–683, 1994.

[26] John Milnor. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(10):1226–1233, 2003.

[27] Mikhail Monastyrskij. *Riemann, topology, and physics. Transl. from the Russian by James King and Victoria King, ed. by R. O. Wells jun. With a foreword by Freeman J. Dyson.* Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser. XIII, 158 p.; DM 82.00 , 1987.

[28] John Morgan and Gang Tian. *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, volume 3 of *Clay Mathematics Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[29] John W. Morgan. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42(1):57–78 (electronic), 2005.

[30] Grisha Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. Preprint. math.DG/0211159.

[31] Grisha Perelman. *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*. Preprint. math.DG/0307245.

[32] Grisha Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. Preprint. math.DG/0303109.

[33] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[34] H. Poincaré. *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion. 284 S. 12^{mo} , 1902.

[35] A. Reventós and J.C. Rodríguez. Gauss i la geometria. *Conferències FME*, III:155–214, 2006.

[36] G. Ricci. Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale. *Rom. Acc. L. Rend. (4)*, III:15–18, 1887.

[37] Bernhard Riemann. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Zweite Auflage bearbeitet von Heinrich Weber.* Leipzig. B. G. Teubner. X u. 558 S. gr. 8° , 1892.

[38] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II. 2nd ed.* Berkeley, California: Publish or Perish, Inc. XIII, 423 p., 1979.

[39] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):357–381, 1982.