Geometria de Riemann

Joan Porti (UAB)

Jornada Riemann

FME – UPC

20 de febrer de 2008

Goettingen

Uns mesos abans del 10 de juny de 1854
8:30 del matí

Goettingen

Uns mesos abans del 10 de juny de 1854

8:30 del matí

Mathematischesinstitut Göttingen (Niedersachsen)

Uns mesos abans del 10 de juny de 1854

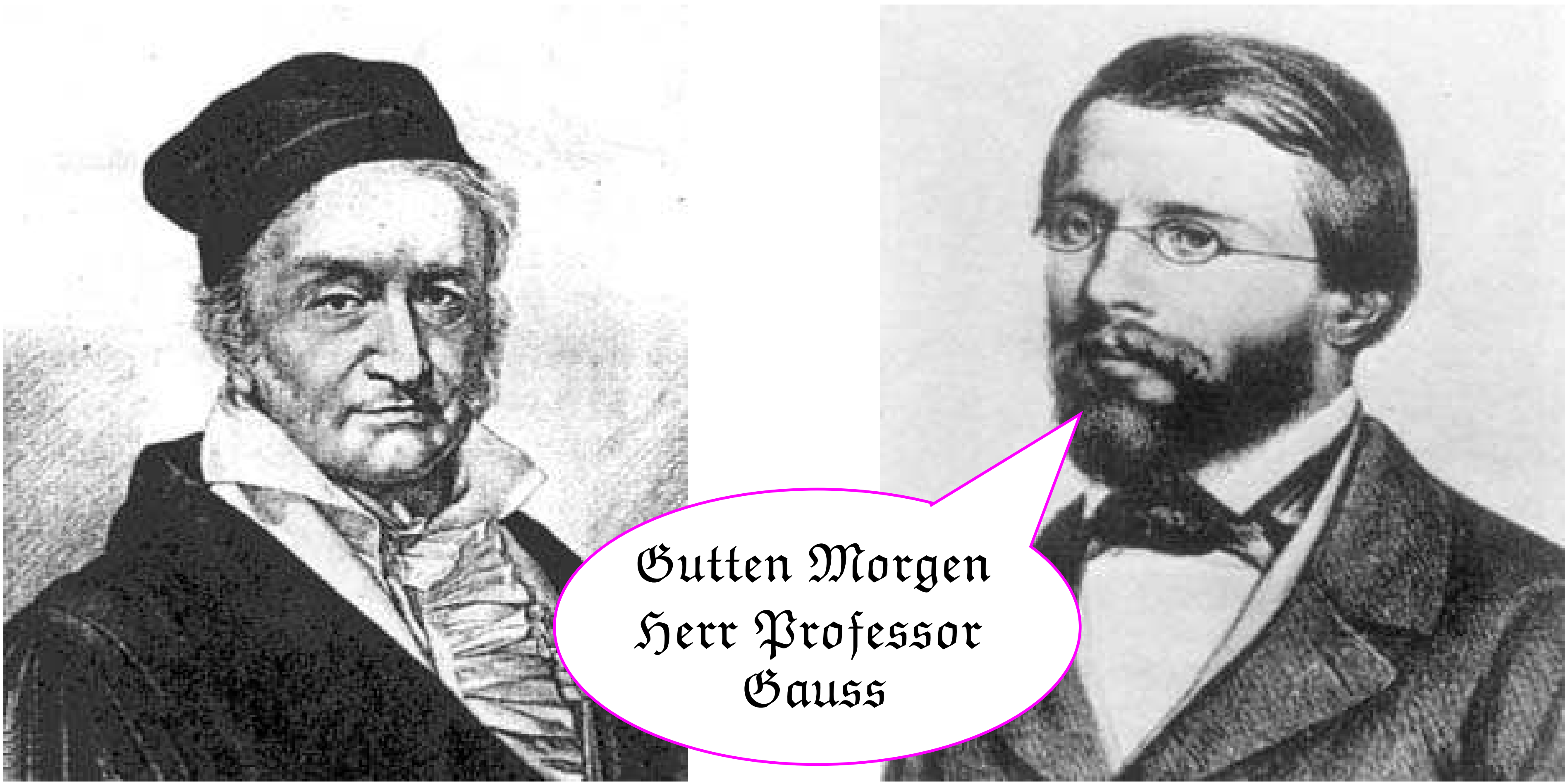
8:30 del matí

Mathematischesinstitut Göttingen (Niedersachsen)

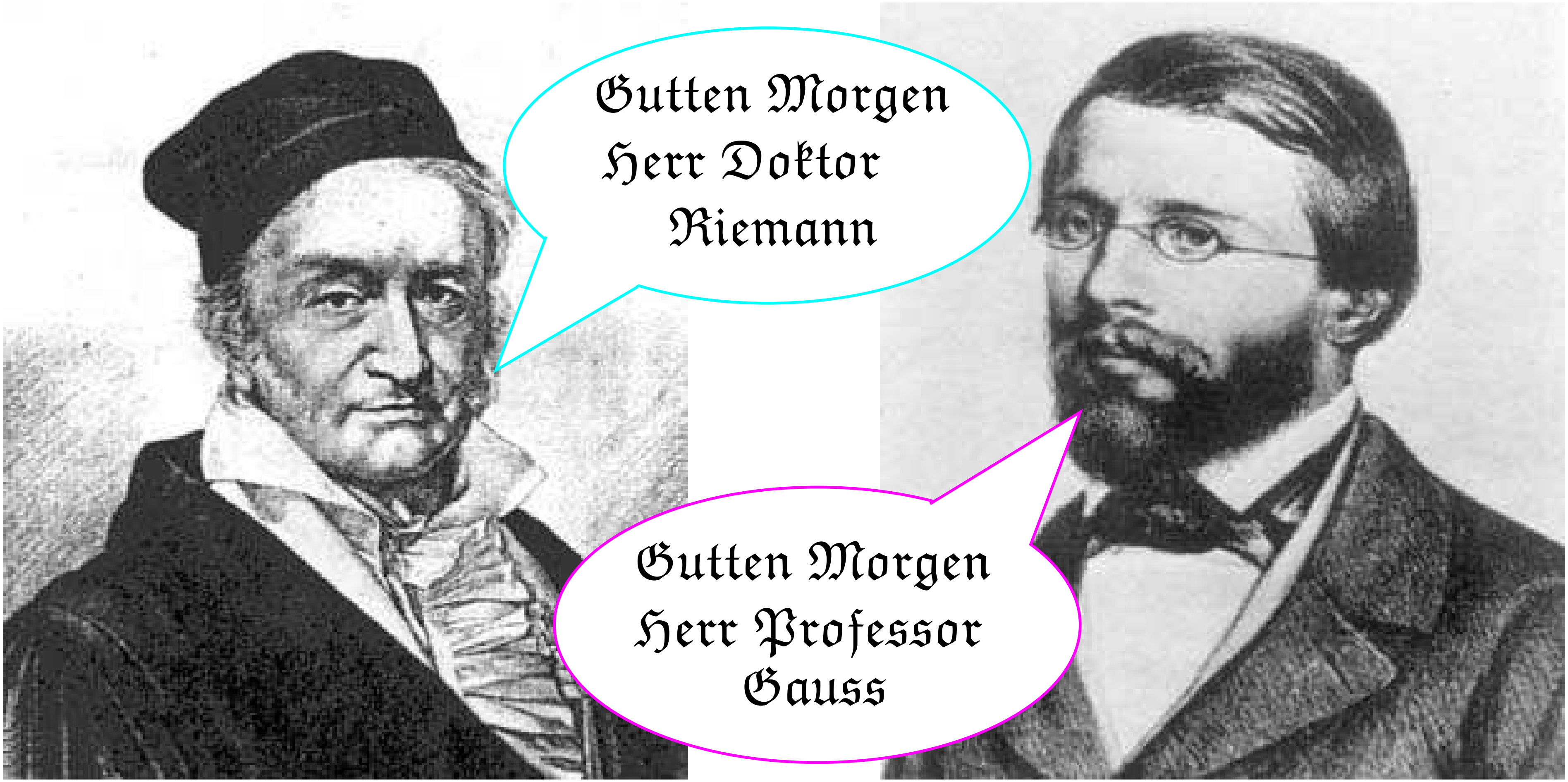
Herr Professor Gauß i Herr Doktor Riemann conversen

Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann

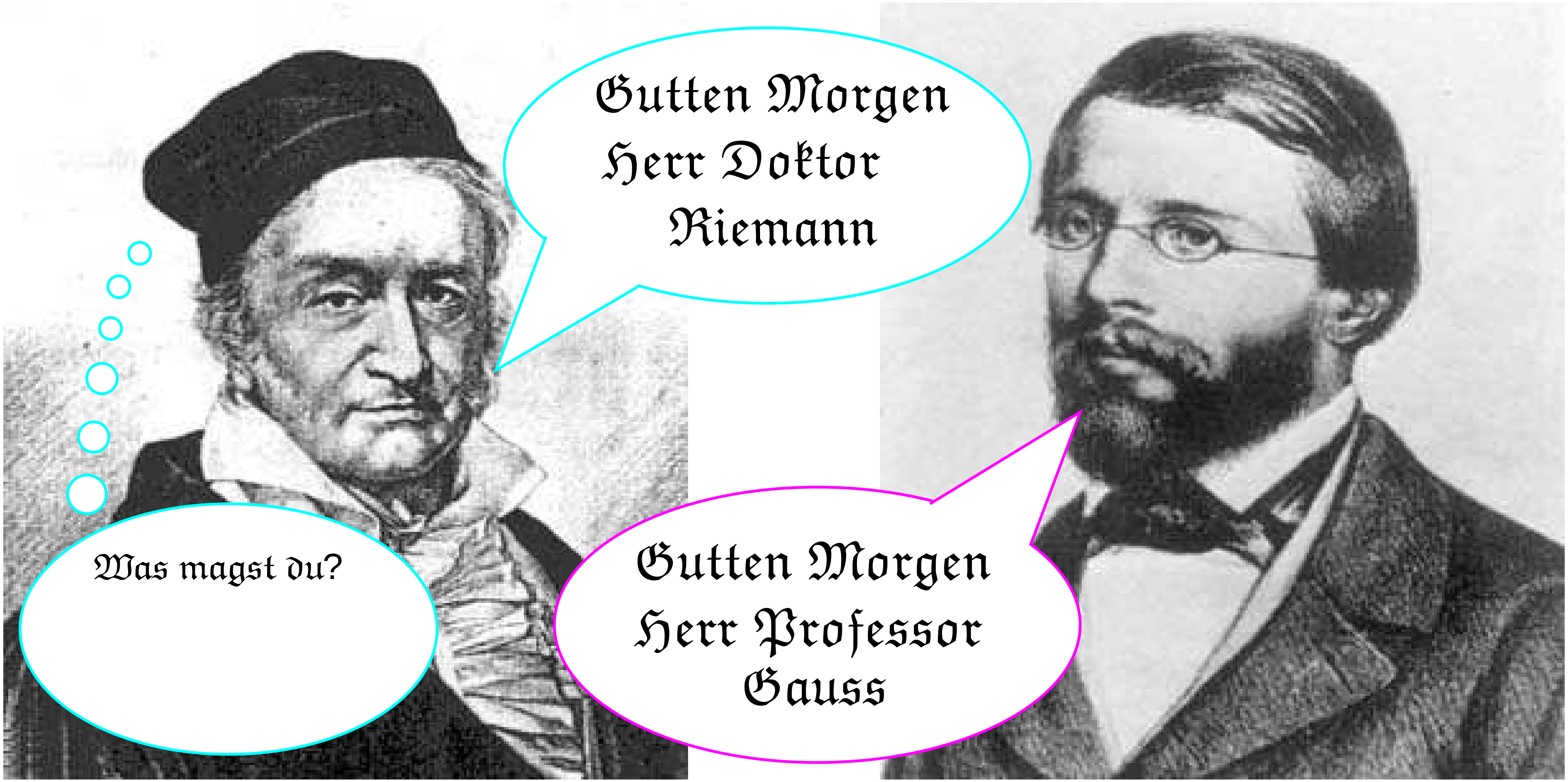
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



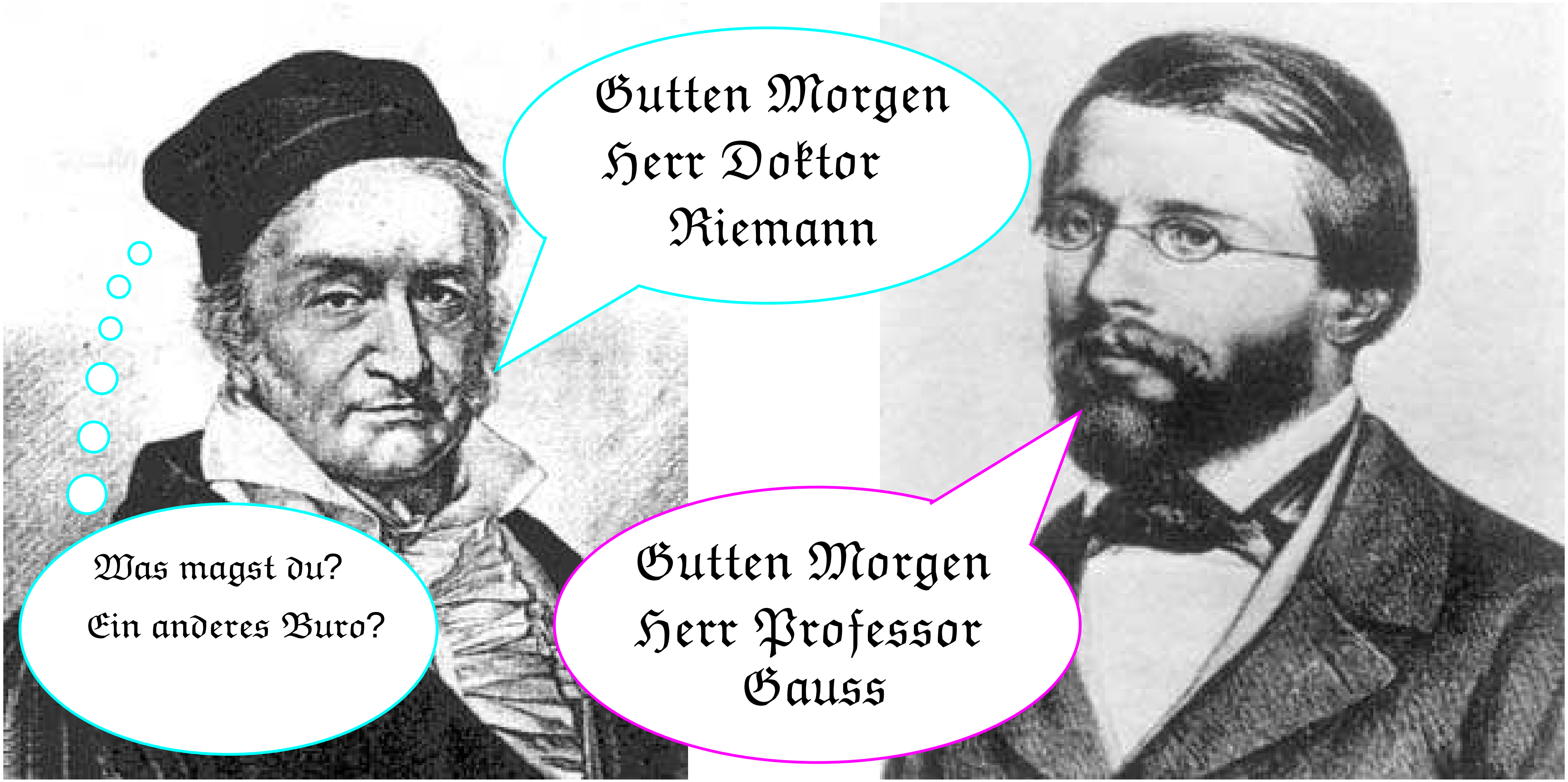
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



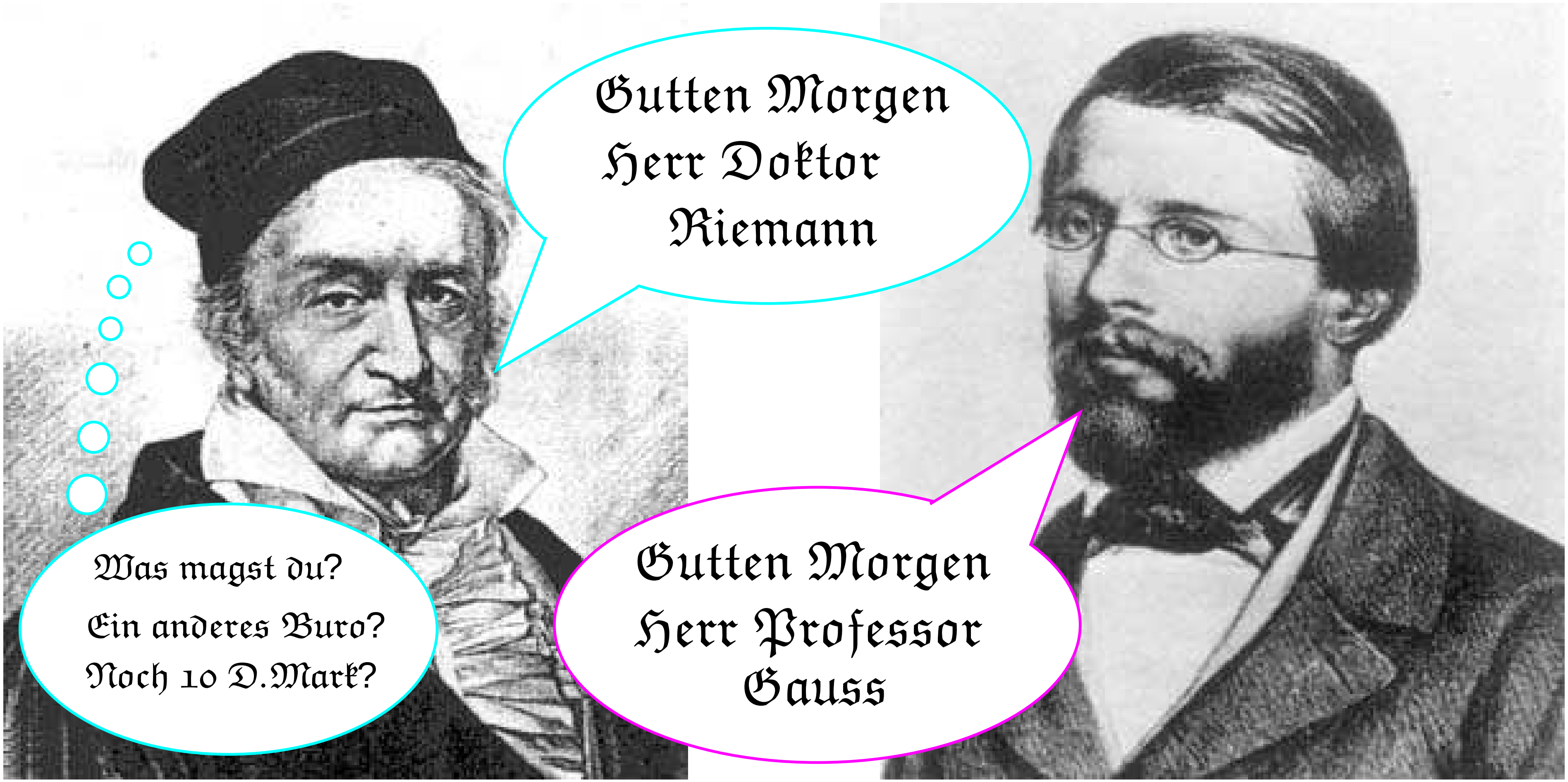
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



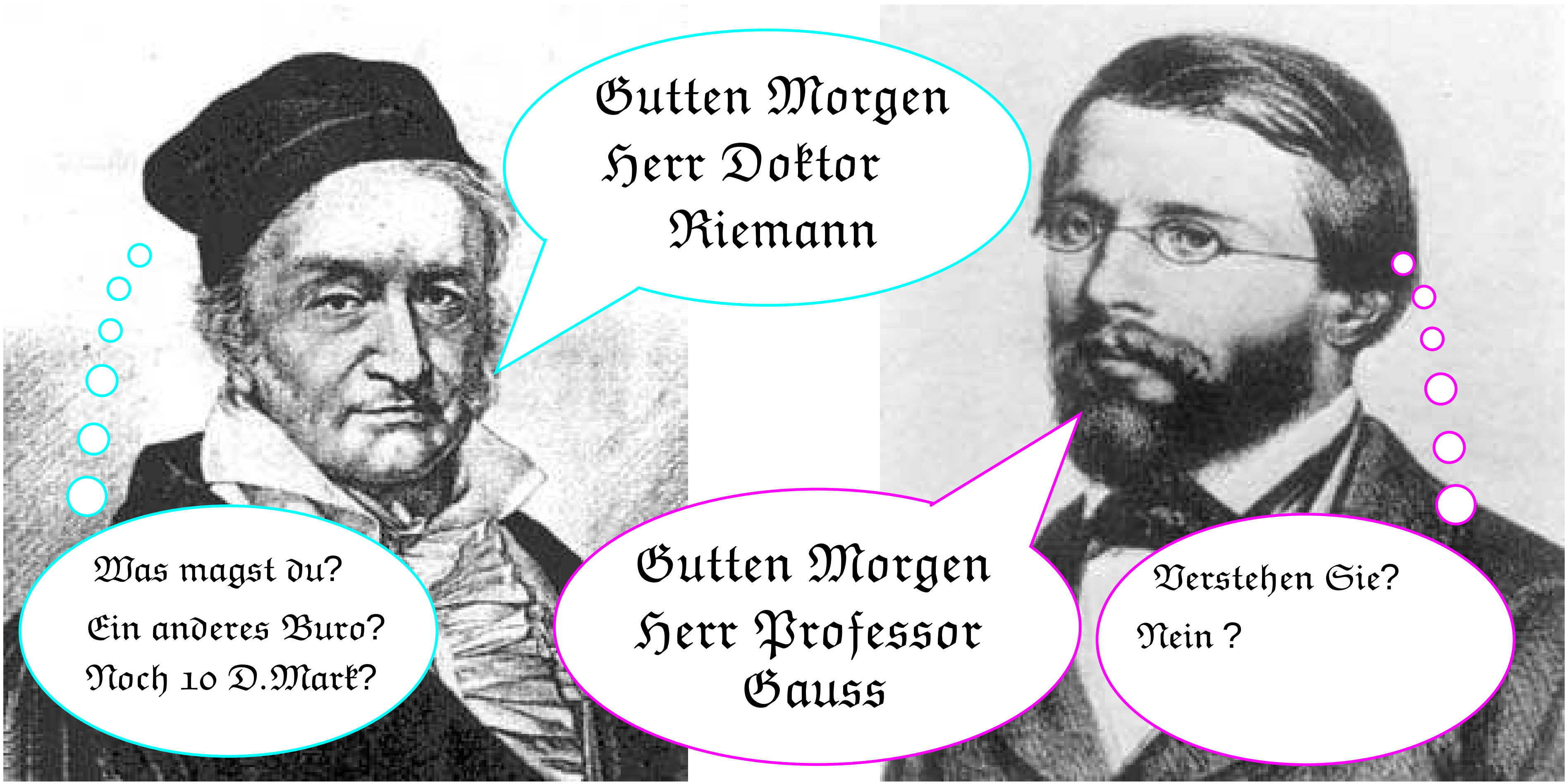
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



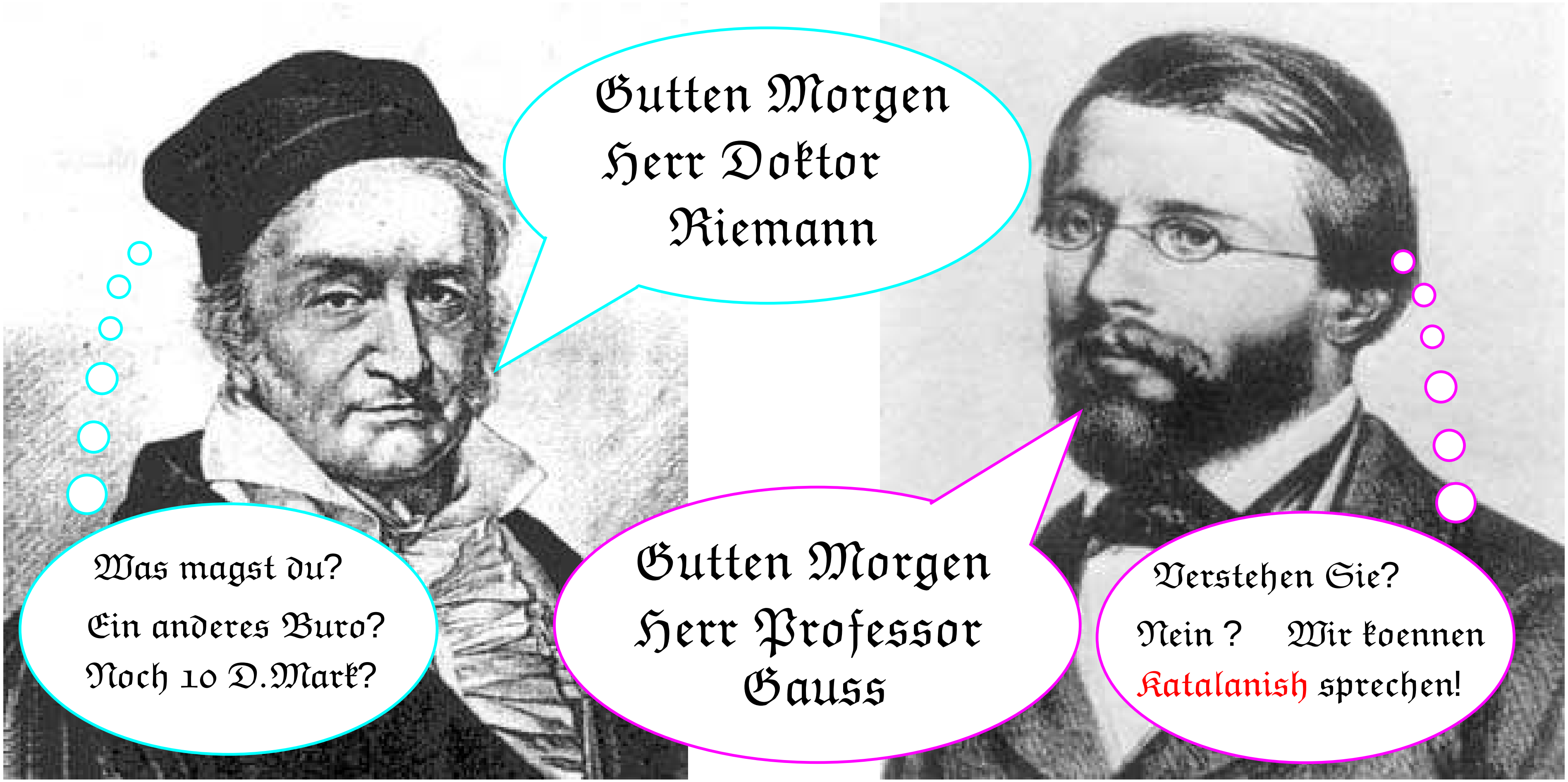
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



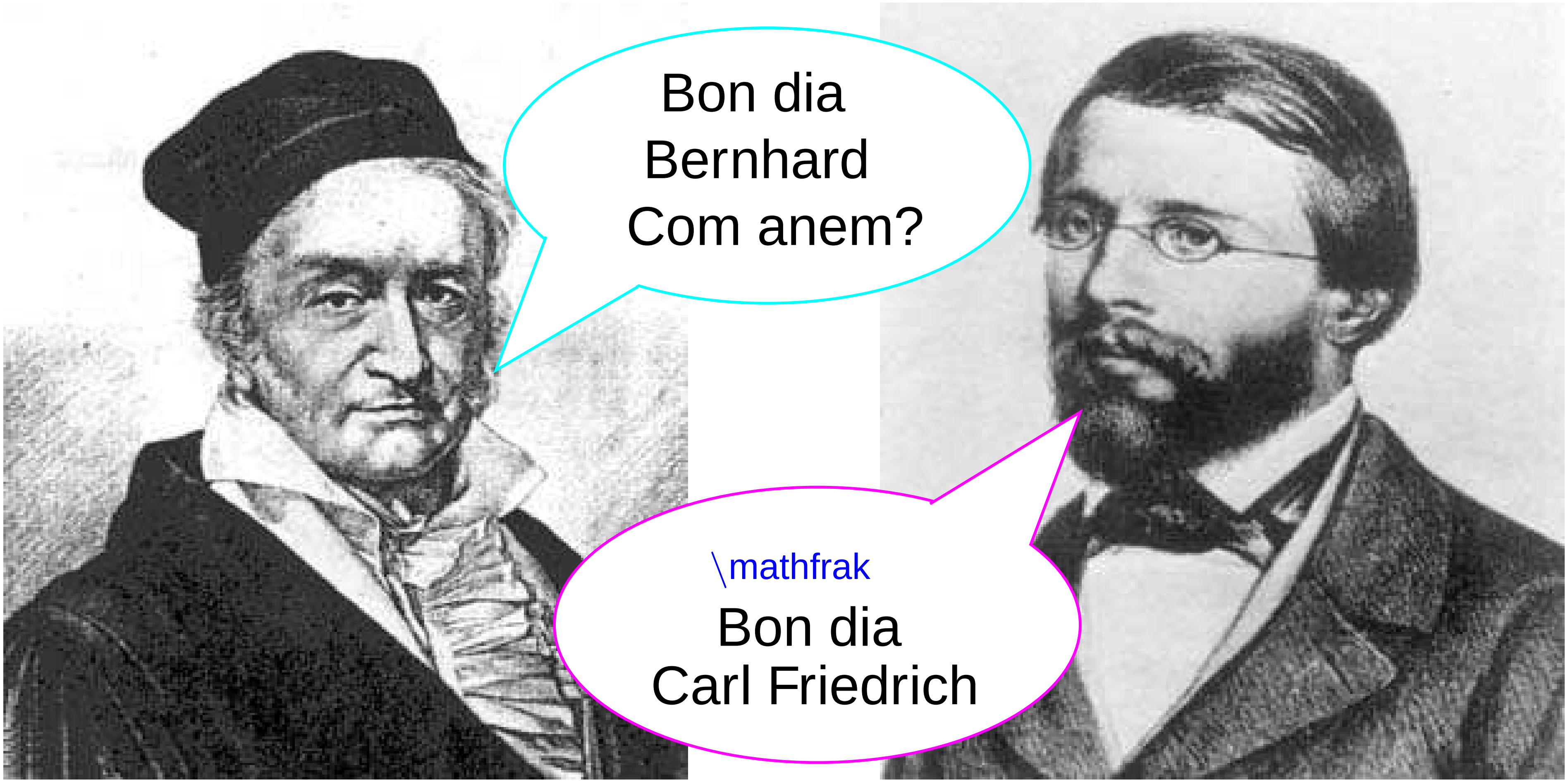
Herr Professor Gauss und Herr Doktor Riemann



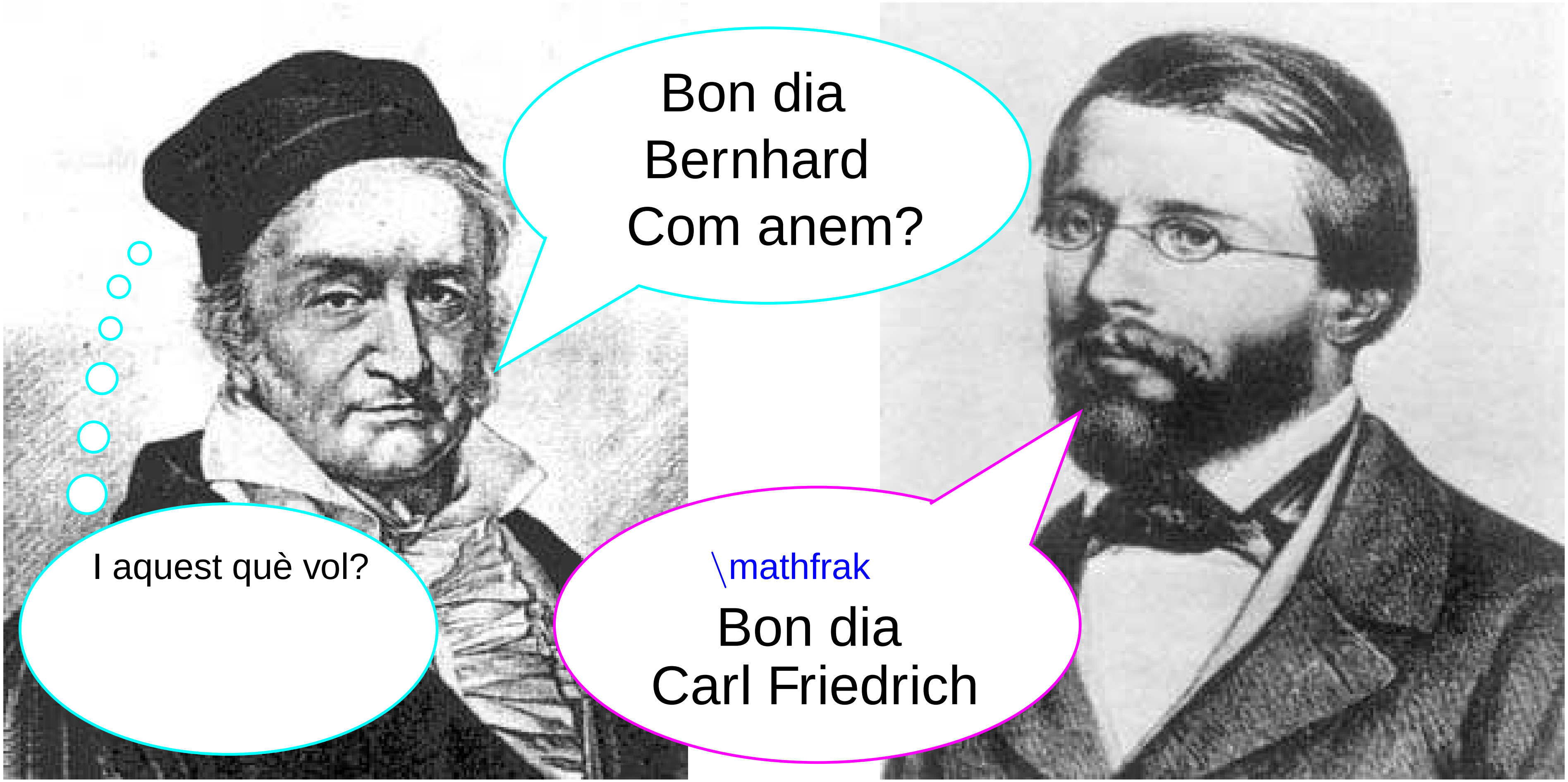
Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

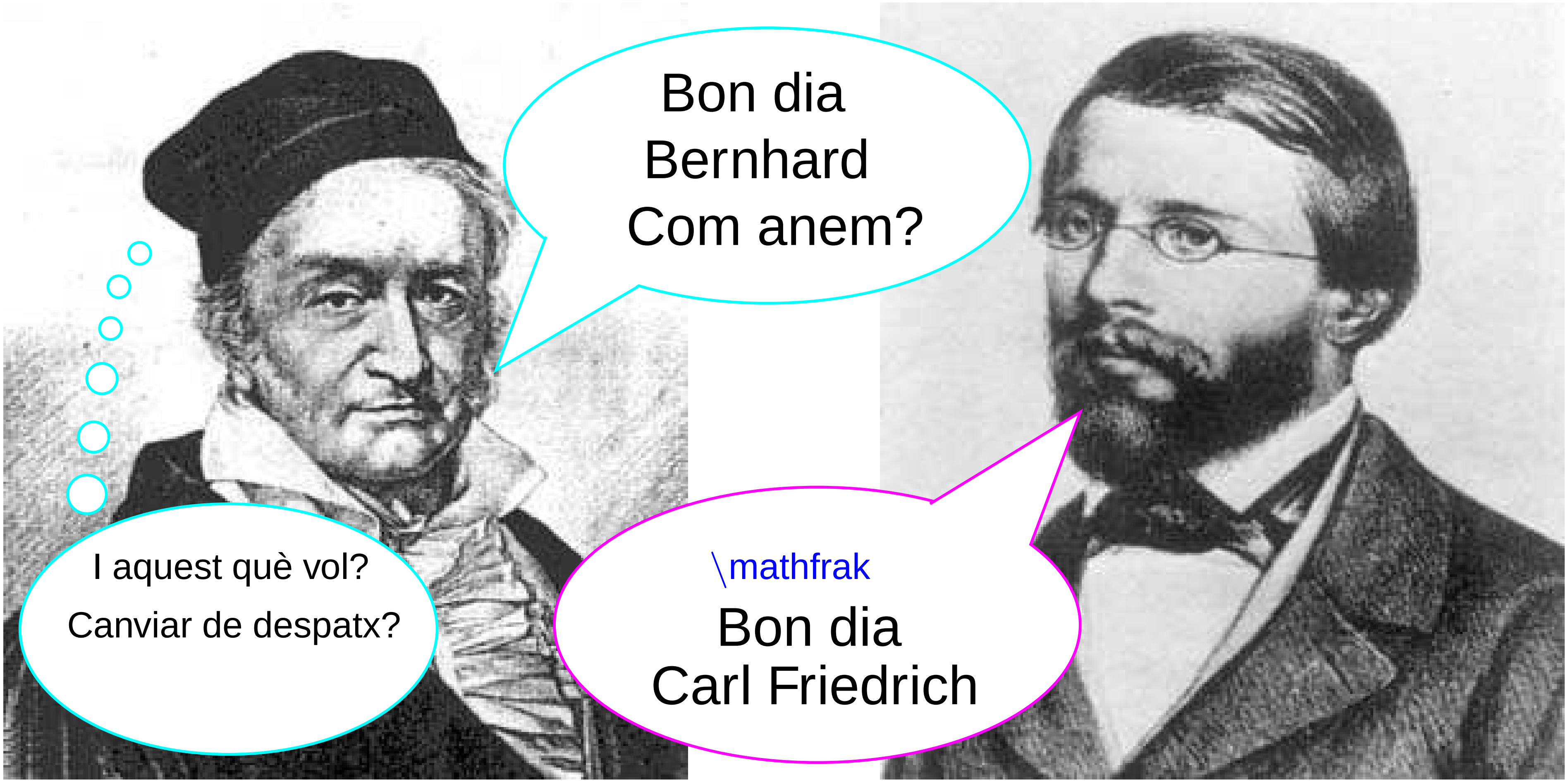
Gauss i Riemann (apòcrif)



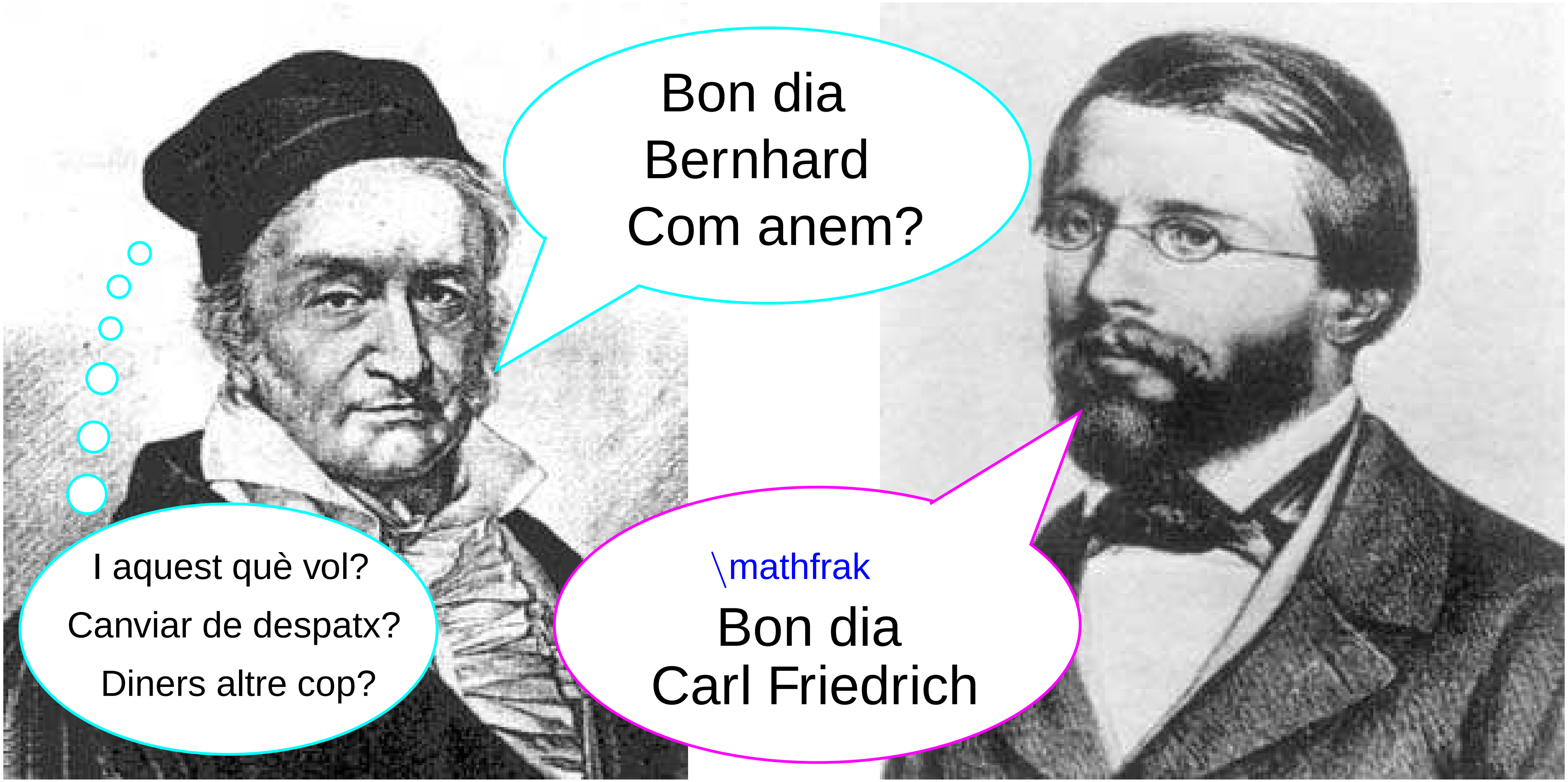
Gauss i Riemann (apòcrif)



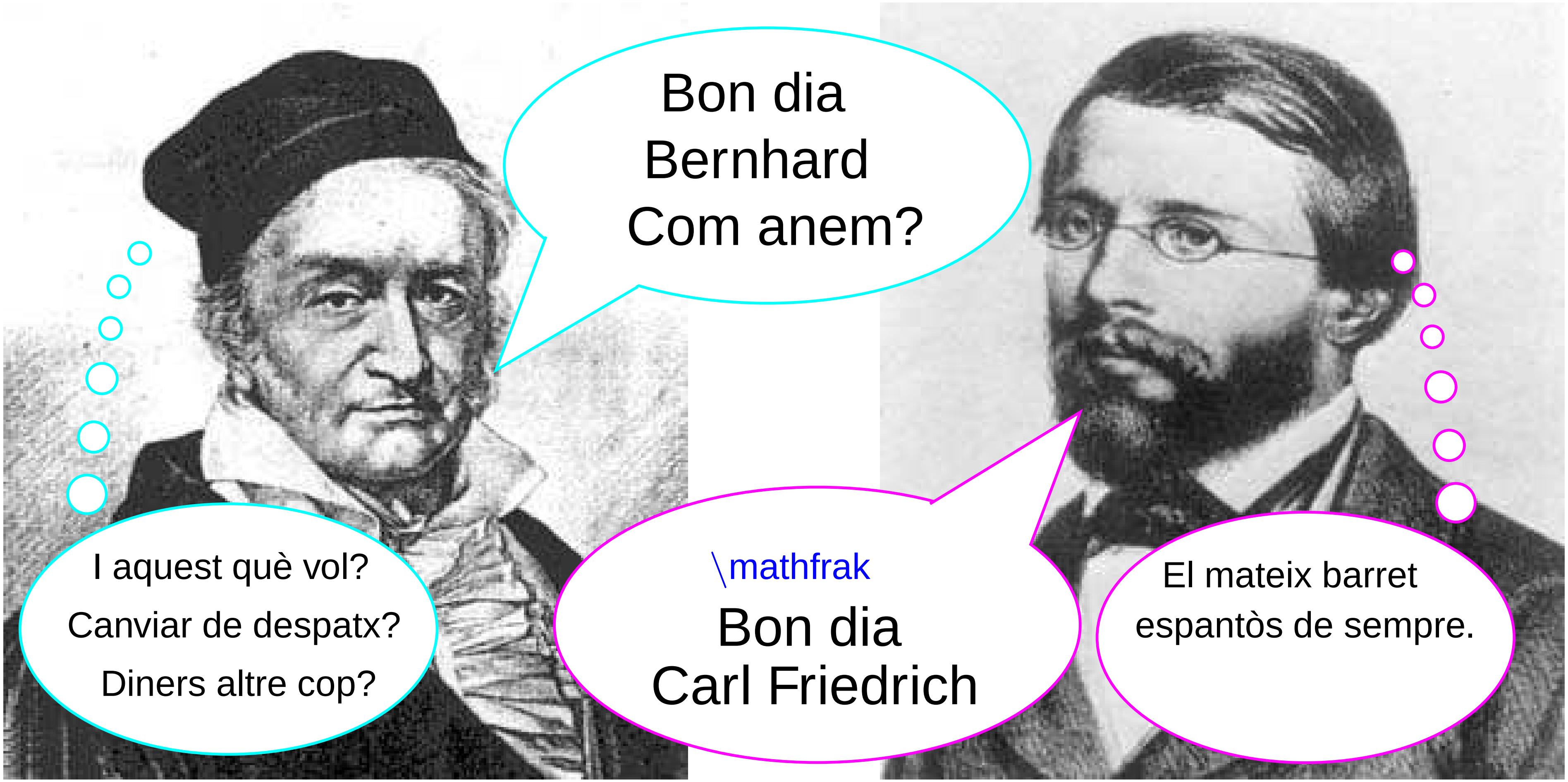
Gauss i Riemann (apòcrif)



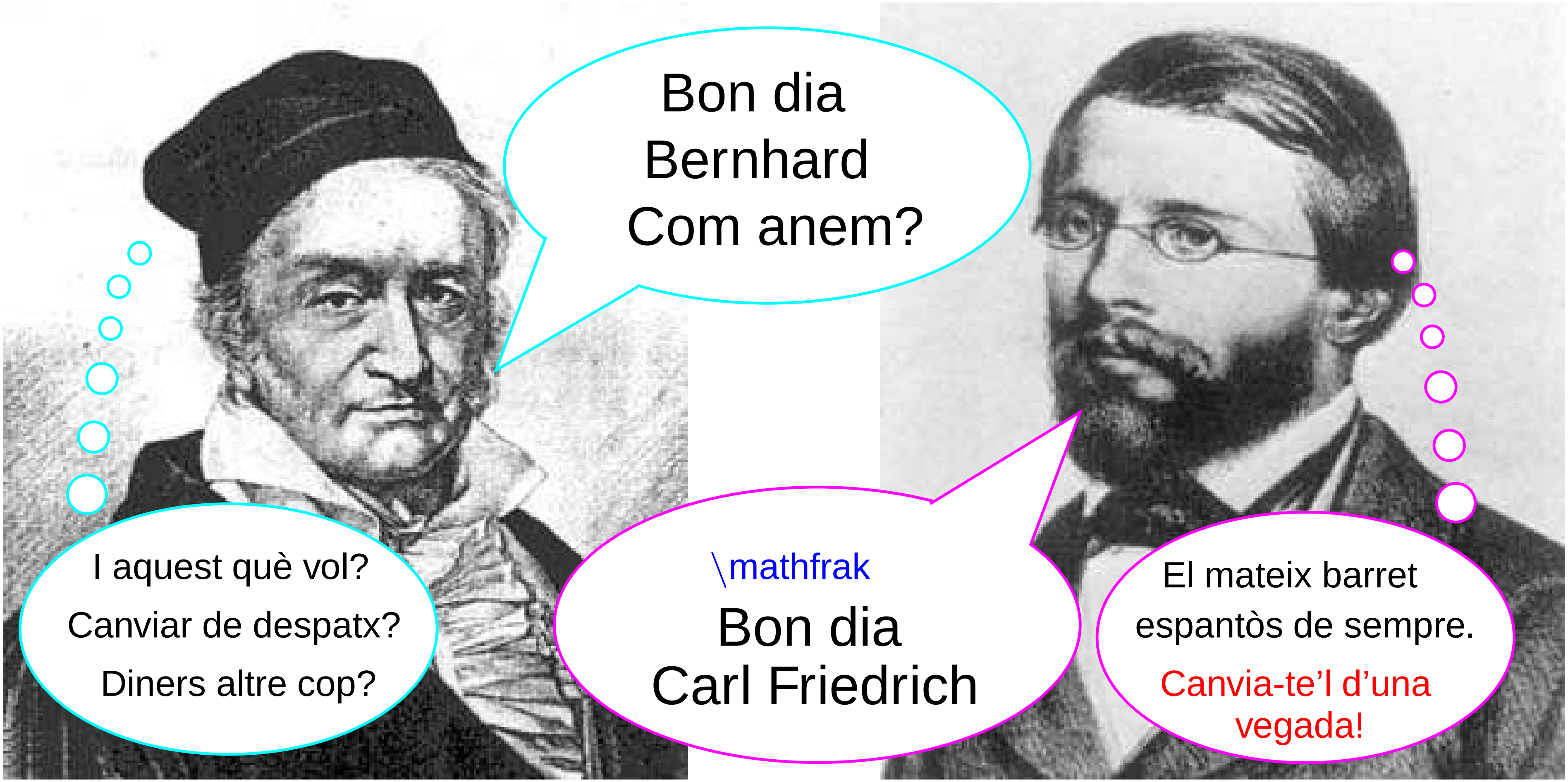
Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)

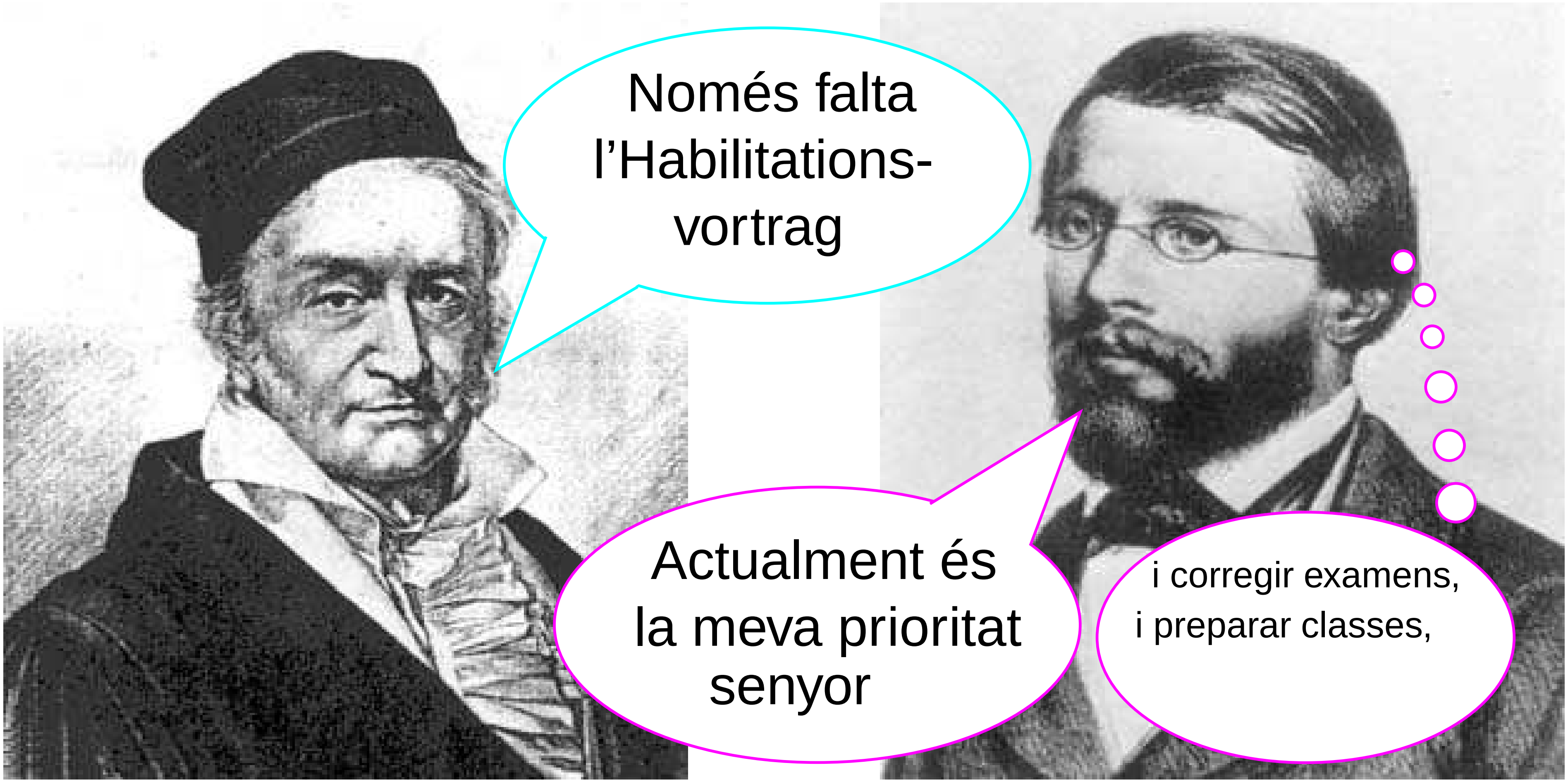


Gauss i Riemann (apòcrif)

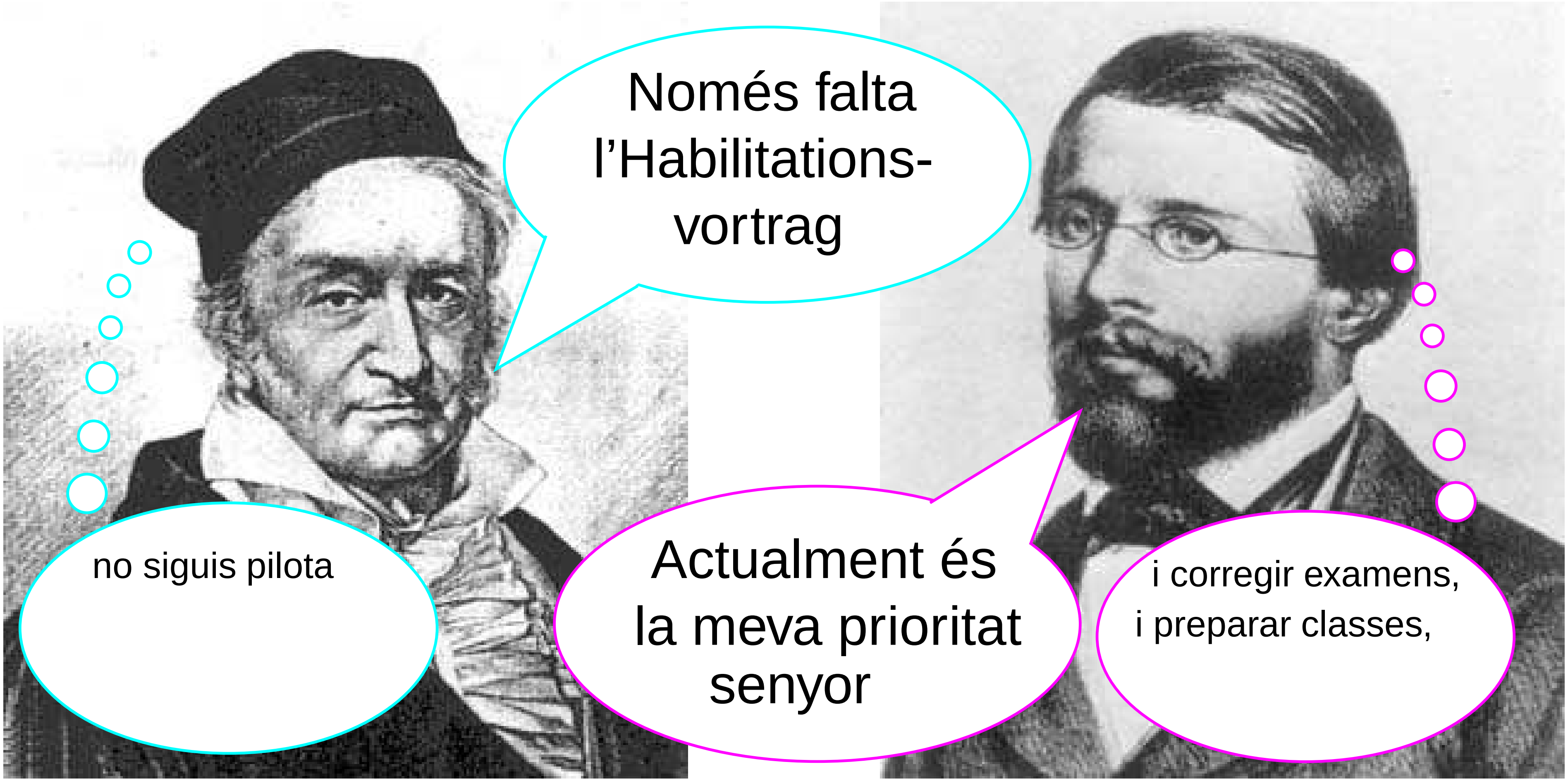
Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

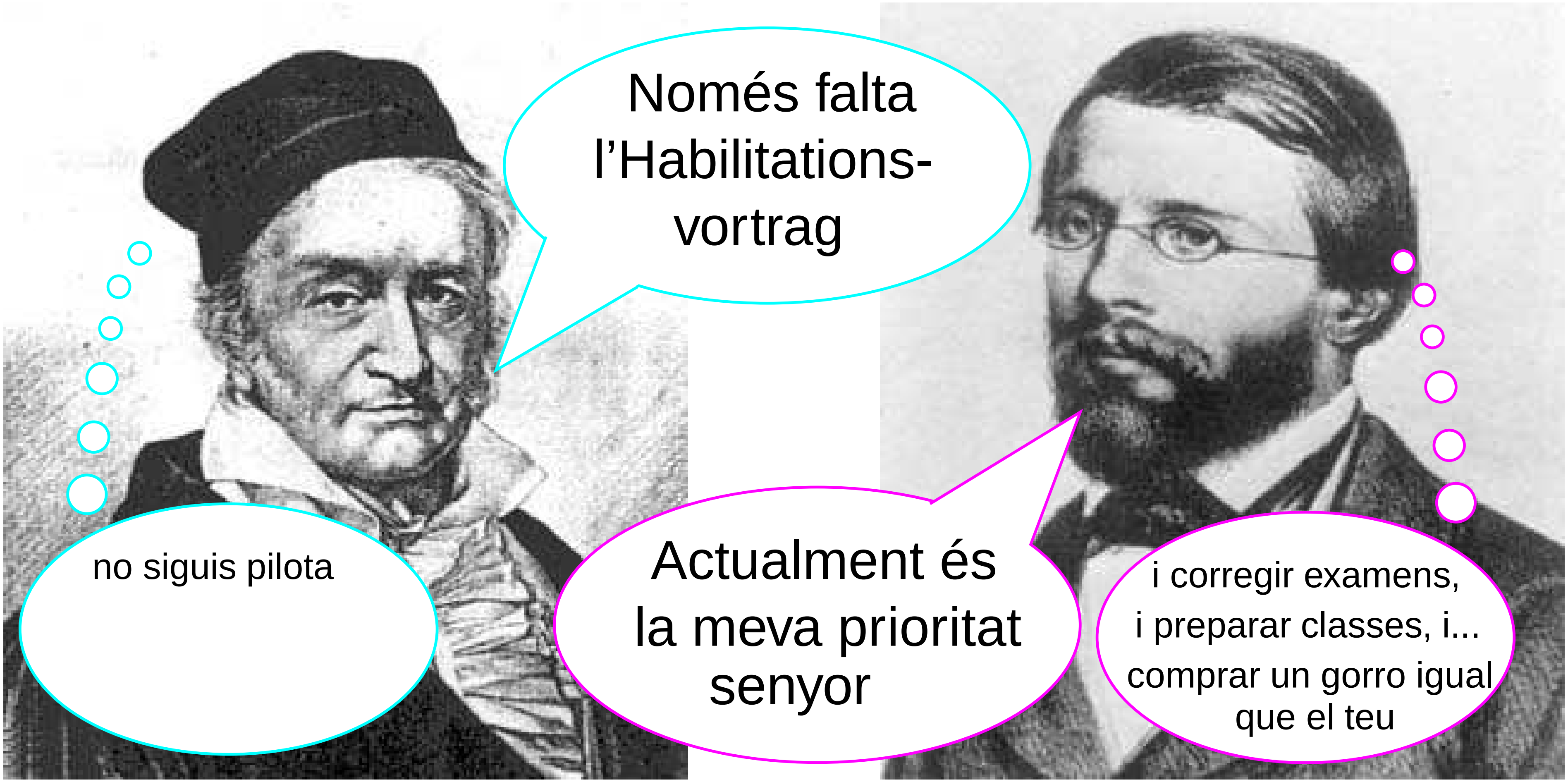
Gauss i Riemann (apòcrif)



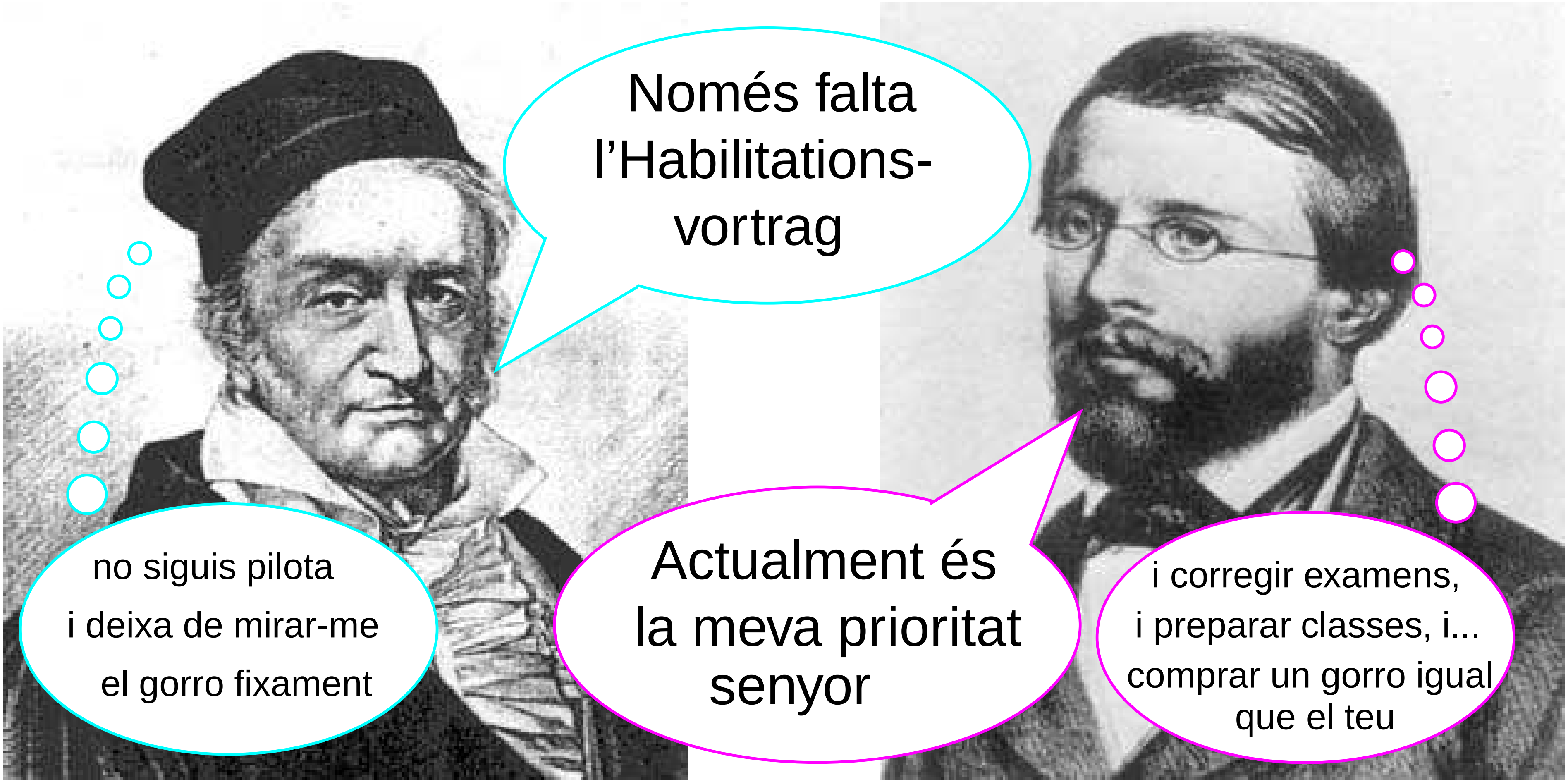
Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

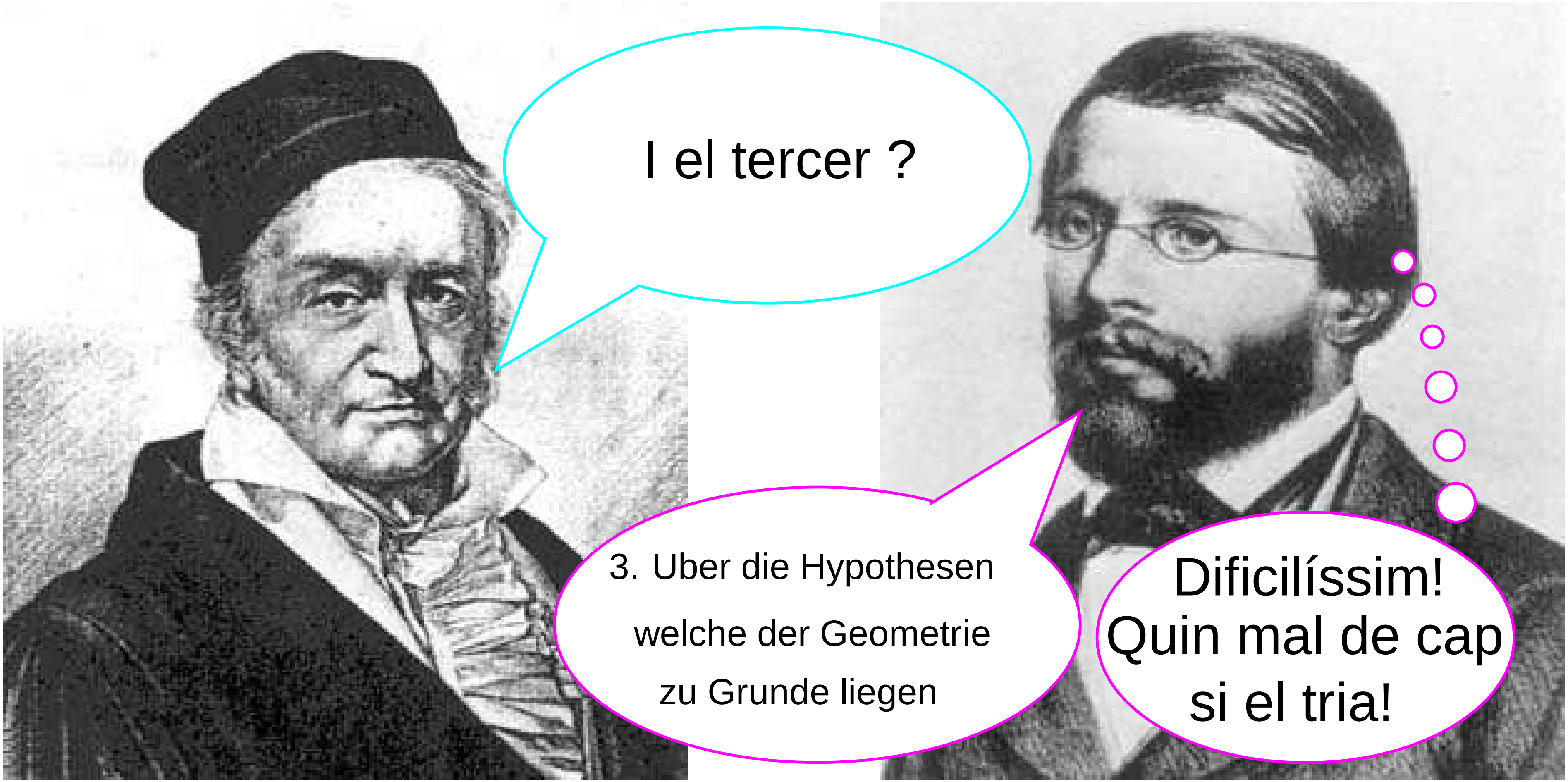
Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)



Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)

Gauss i Riemann (apòcrif)


Trio el...
tercer
And the
winner is...
Excel·lent el·lició
Carl Friedrich
!!!

Habilitationvortrag

10 de JUNY de 1854:

Conferència d'habilitació

Publicada pòstumament

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

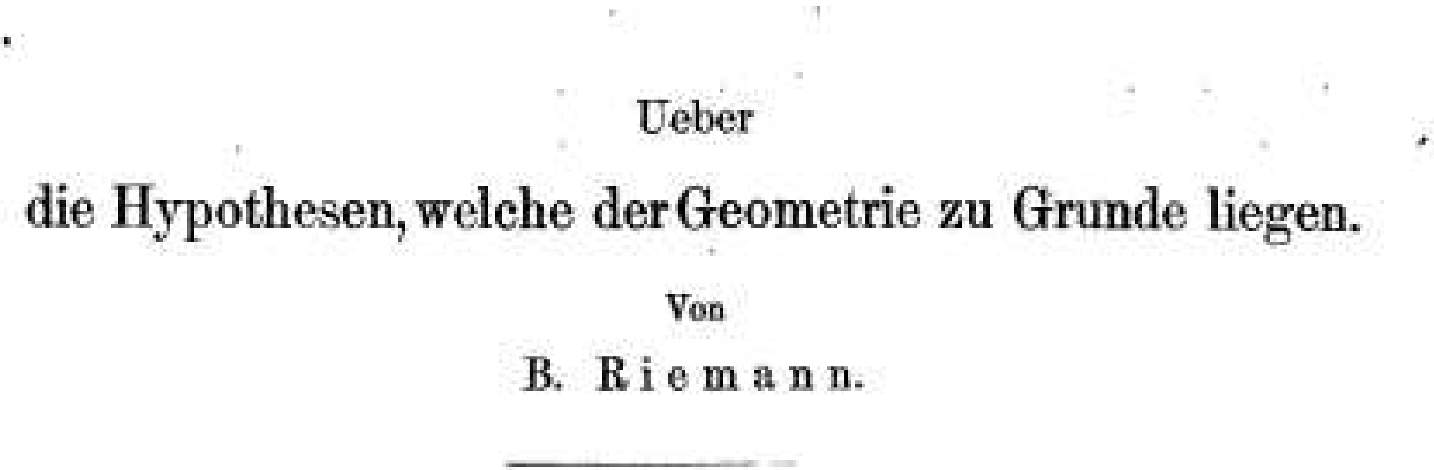
B. Riemann.

Habilitationvortrag

10 de JUNY de 1854:

Conferència d'habilitació

Publicada pòstumament


Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

- Inesperadament Gauß escollí el tercer títol proposat per Riemann, que estava interessat en electricitat.

Habilitationvortrag

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

- Posa les bases del que serà la geometria de Riemann.

  En particular la <u>curvatura de Riemann</u>.

- Forma actual de la geometria de Riemann (tensors, connexions): Christoffel, Ricci-Curbastro, Levi-Civitta.

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

- Dedekind escriu sobre la impressió de Gauß:

```
...va sobrepassar totes les seves expectatives, amb gran sorpresa,
    i tornant de la facultat va parlar a Wilhem Weber sobre la
  profunditat de les idees presentades per Riemann, amb una gran
           apreciació i amb una animació rara per ell.
```

Habilitationvortrag

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

- Trigà temps en ser comprès.

- Poincaré:

  `Les geometries de Riemann, tan interessants en molts camps, mai no seran, però, altra cosa que ens purament analítics, i no conduiran a demostracions anàlogues a les de Euclides.`

Habilitationvortrag

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

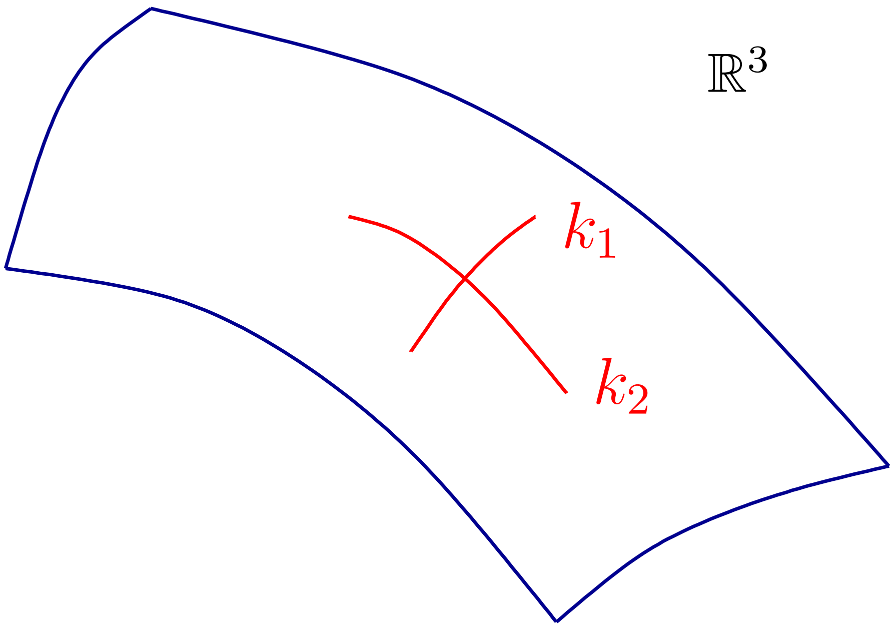
Von

B. Riemann.

Text adreçat a un públic ampli,
sense cap càlcul

QUÈ SE N'HA FET DELS CÀLCULS DE RIEMANN?

Antecedent: Gauß i superfícies a l'espai



$K = k_1 k_2$

K curvatura de Gauß k_1, k_2 curvatures principals

Teorema Egregi

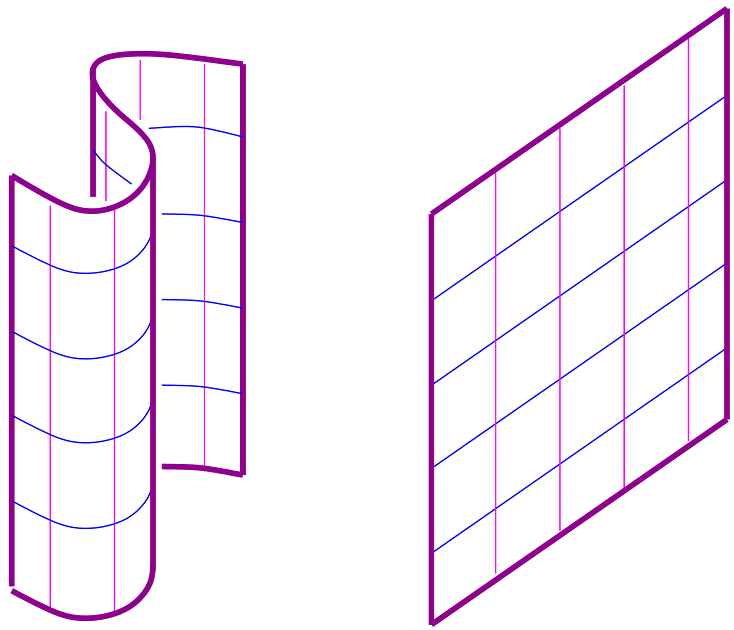
La curvatura de Gauß és invariant per isometries.

Antecedent: Gauß i superfícies a l'espai

Teorema Egregi

La curvatura de Gauß és invariant per isometries.

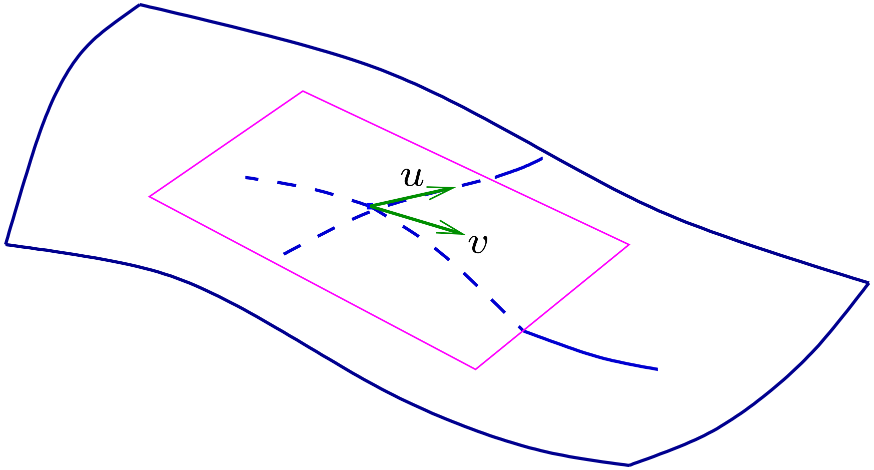
Superfícies isomètriques



$$K \equiv 0$$

Què entem actualment per geometria de Riemann

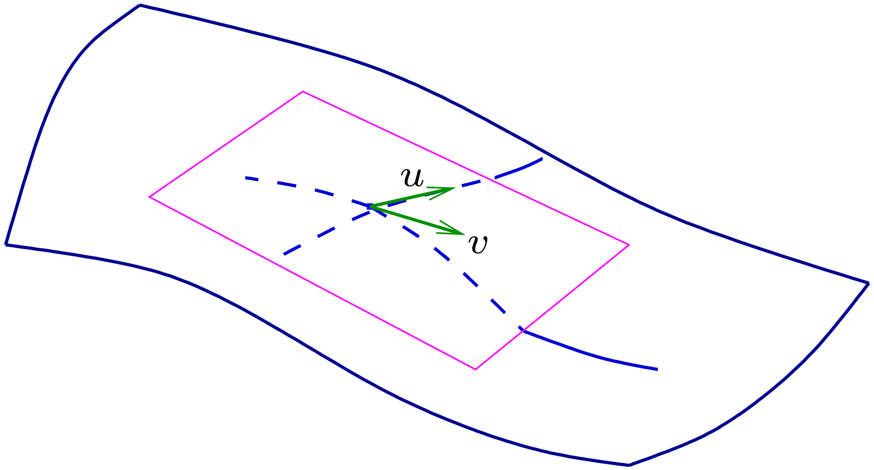
En el tangent de cada punt, tenim un producte escalar.



$$\langle u, v \rangle$$

Què entem actualment per geometria de Riemann

En el tangent de cada punt, tenim un producte escalar.



$\langle u, v \rangle$

En coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$, $\quad g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\left.\begin{array}{l} u = u^i \partial_i \\ v = v^j \partial_j \end{array}\right\} \langle u, v \rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \cdots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

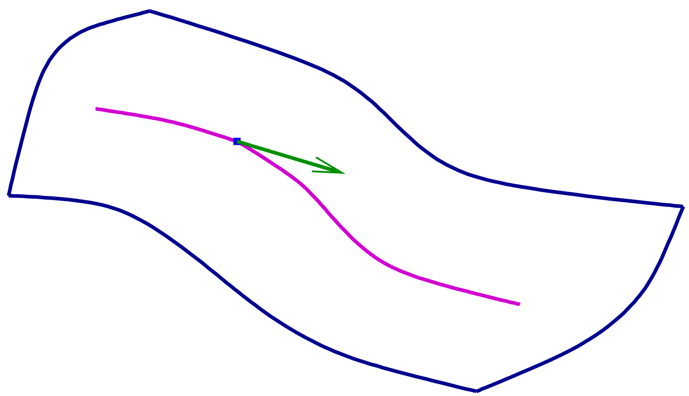
És un exemple de tensor

Què entem actualment per geometria de Riemann

En coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$, $\quad g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\left.\begin{array}{l} u = u^i \partial_i \\ v = v^j \partial_j \end{array}\right\} \langle u, v\rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \cdots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Element de línia: $\boxed{ds = \sqrt{\sum g_{ij} dx^i dx^j}} \qquad L = \int ds$

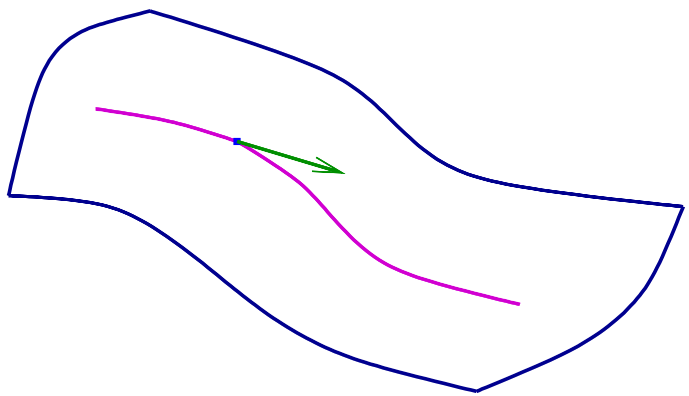


Què entem actualment per geometria de Riemann

En coordenades $(x^1, \ldots, x^n)$, $\quad g_{ij}(x) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\left.\begin{array}{l} u = u^i \partial_i \\ v = v^j \partial_j \end{array}\right\} \langle u, v \rangle = \sum u^i g_{ij}(x) v^j = (u^1 \cdots u^n) \begin{pmatrix} g_{11}(x) & \cdots & g_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Element de línia: $\boxed{ds = \sqrt{\sum g_{ij} dx^i dx^j}} \qquad L = \int ds$



Curvatura de Riemann, de Ricci, escalar i seccional.

Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

III. Anwendung auf den Raum.

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Noció de magnitud de n graus d'extensió

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

III. Anwendung auf den Raum.

Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Varietats de dimensió n

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

III. Anwendung auf den Raum.

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Varietats de dimensió n

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

Geometria Riemanniana

III. Anwendung auf den Raum.

Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Varietats de dimensió n

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

Geometria Riemanniana

III. Anwendung auf den Raum.

Aplicació a l’espai (físic)

Part I: noció de varietat n dimensional

`I. Begriff einer` n`fach ausgedehnten Größe`

- Riemann tenia clar que una varietat es localment homeomorfa a l’espai Euclidià.

`I. Begriff einer `n`fach ausgedehnten Größe`

- Riemann tenia clar que una varietat es localment homeomorfa a l'espai Euclidià.
- Les varietats de dim $n+1$ s'obtenen variant amb un paràmetre les de dim n.

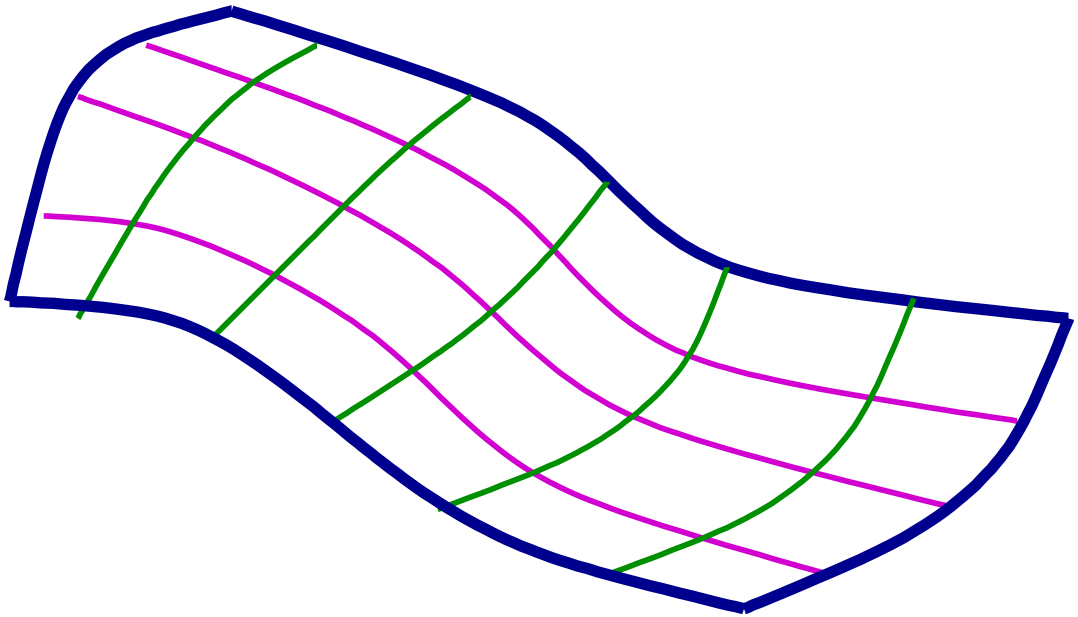
Part I: noció de varietat n dimensional

`I. Begriff einer` n`fach ausgedehnten Größe`

- Riemann tenia clar que una varietat es localment homeomorfa a l'espai Euclidià.
- Les varietats de dim $n+1$ s'obtenen variant amb un paràmetre les de dim n.
- Els conjunts de nivell de certes funcions són varietats d'una dimensió menys. Això dóna les coordenades locals.

`I. Begriff einer` n`fach ausgedehnten Größe`

- Riemann tenia clar que una varietat es localment homeomorfa a l'espai Euclidià.
- Les varietats de dim $n+1$ s'obtenen variant amb un paràmetre les de dim n.
- Els conjunts de nivell de certes funcions són varietats d'una dimensió menys. Això dóna les coordenades locals.



n coordenades locals.

> Es folgt nun, nachdem der Begriff einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit construirt und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, dass sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Grössenbestimmungen zurückführen lässt, als zweite der oben gestellten Auf-

..havent construit la noció de varietat n-dimensional i donat que la seva característica essencial és el fet que la posició es redueix a la determinació de n valors numèrics,...

- Es restringeix a corbes en que “les raons de les quantitats dels dx varia continuament” (Classe C^1 en llenguatge actual).

Part II: geometria de Riemann. 1. Element de línia

- Es restringeix a corbes en que “les raons de les quantitats dels dx varia continuament” (Classe C^1 en llenguatge actual).
- La longitud d’una corba es la integral de l’element de línia ds: $\int_\gamma ds$

- Es restringeix a corbes en que “les raons de les quantitats dels dx varia continuament” (Classe C^1 en llenguatge actual).
- La longitud d’una corba es la integral de l’element de línia ds: $\int_\gamma ds$
- L’expressió que proposa per un element de línia és l’actual:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)\, dx^i dx^j}$$

ben Verhältnisse ändern; er ist also = const. ds^2 und folglich ist ds = der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Function zweiten Grades der Grössen dx, in welcher die Coefficienten stetige Functionen der Grössen x sind. Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Falle enthalten. Der nächst

Part II: geometria de Riemann. 1. Element de línia

- Es restringeix a corbes en que "les raons de les quantitats dels dx varia continuament" (Classe C^1 en llenguatge actual).
- La longitud d'una corba es la integral de l'element de línia ds: $\int_\gamma ds$
- L'expressió que proposa per un element de línia és l'actual:

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)\, dx^i dx^j}$$

ds =l'arrel quadrada d'una funció sempre positiva,
homogènia de segon grau en les quantitats dx
i amb coeficients funcions de x.
Per l'espai amb coordenades rectilínies tenim $ds = \sqrt{\sum dx^2}$,
l'espai és el cas més senzill.

Problema: $\boxed{\text{Canvi de coordenades}}$

- Dues mètriques $g_{ij}(x)$ són equivalents si podem passar d'una a l'altre per un canvi de coordenades.

- Varietats planes: Les que són equivalents a

$$ds = \sqrt{\Sigma dx_i^2}, \qquad (g_{ij} = \delta_{ij})$$

Part II: geometria de Riemann. 1. Element de línia

Problema: Canvi de coordenades

- Dues mètriques $g_{ij}(x)$ són equivalents si podem passar d'una a l'altre per un canvi de coordenades.

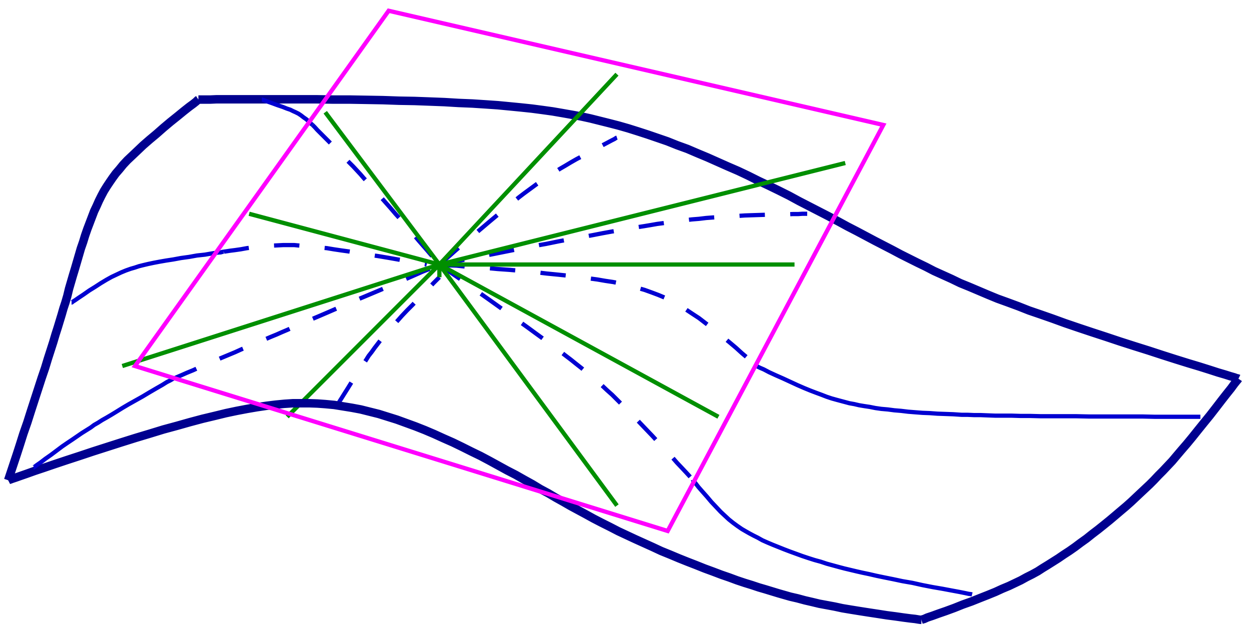
- Varietats planes: Les que són equivalents a

$$ds = \sqrt{\Sigma dx_i^2}, \qquad (g_{ij} = \delta_{ij})$$

- Riemann veurà que la curvatura és una obstrucció a la platitud.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



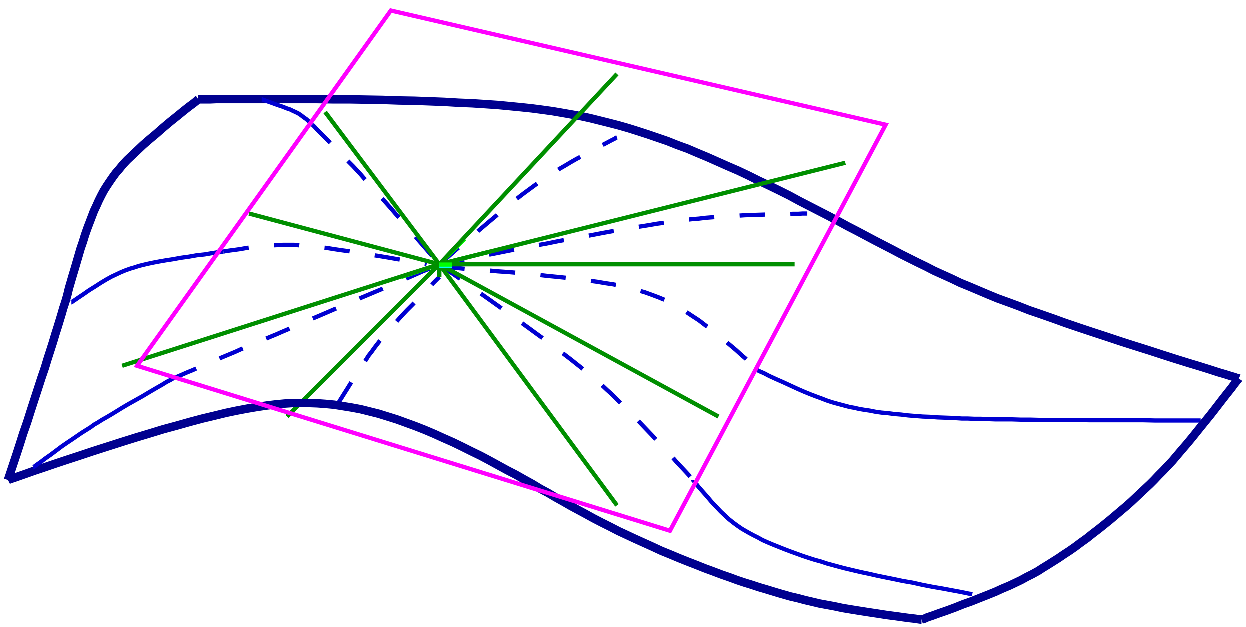
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



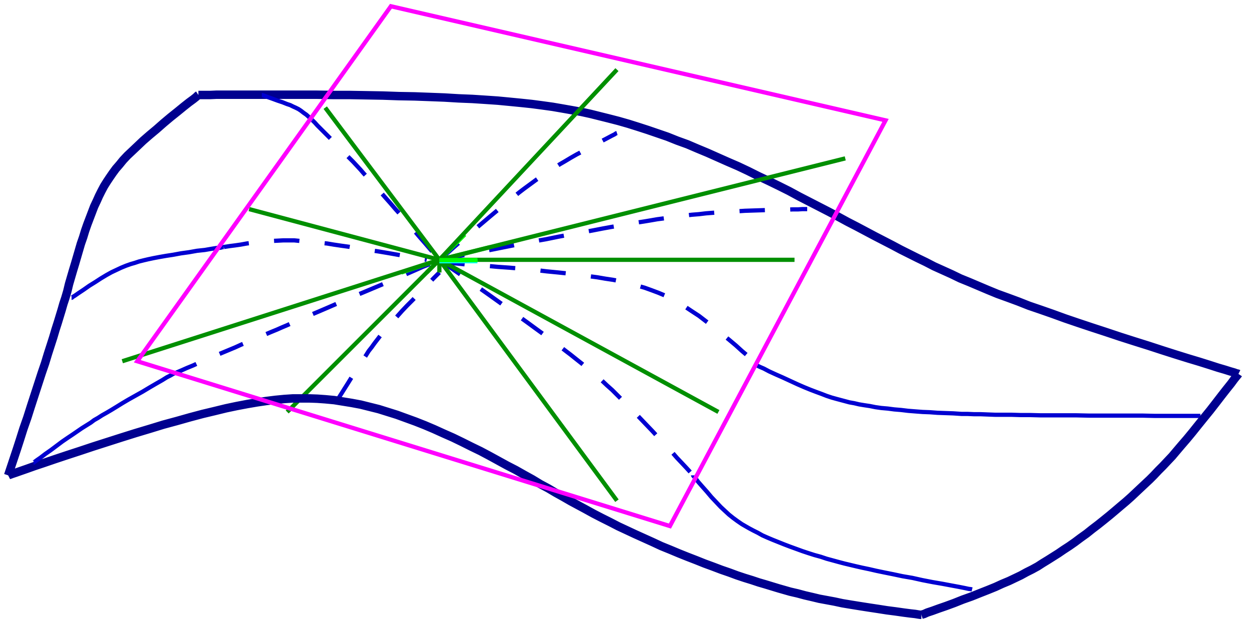
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



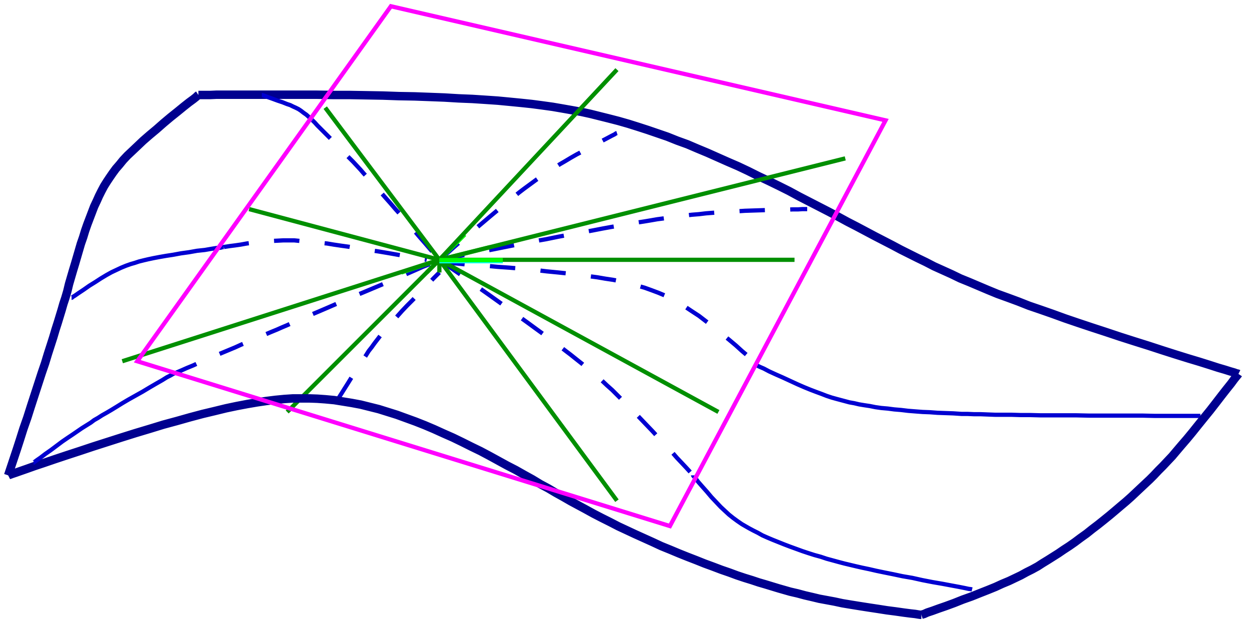
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



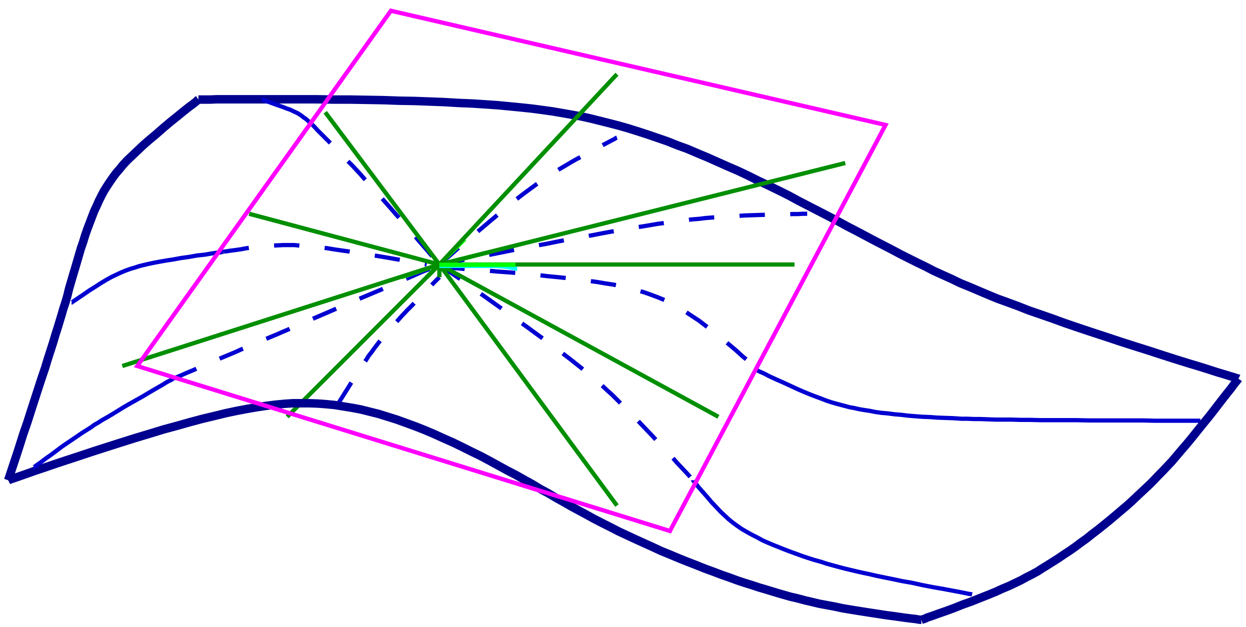
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



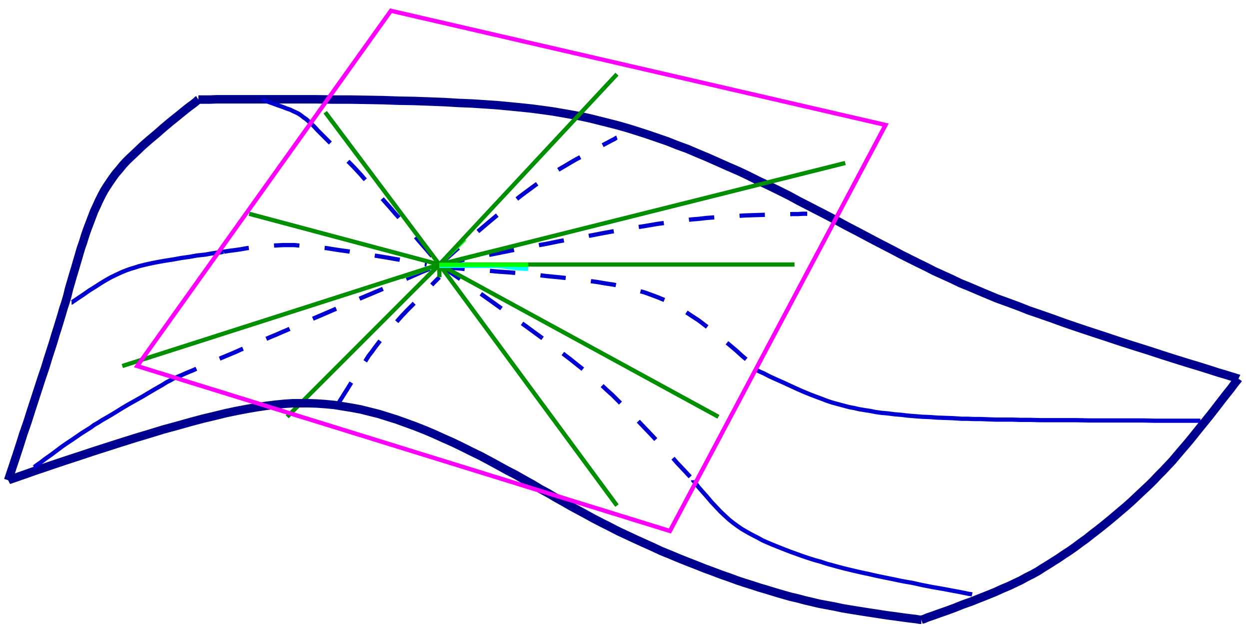
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



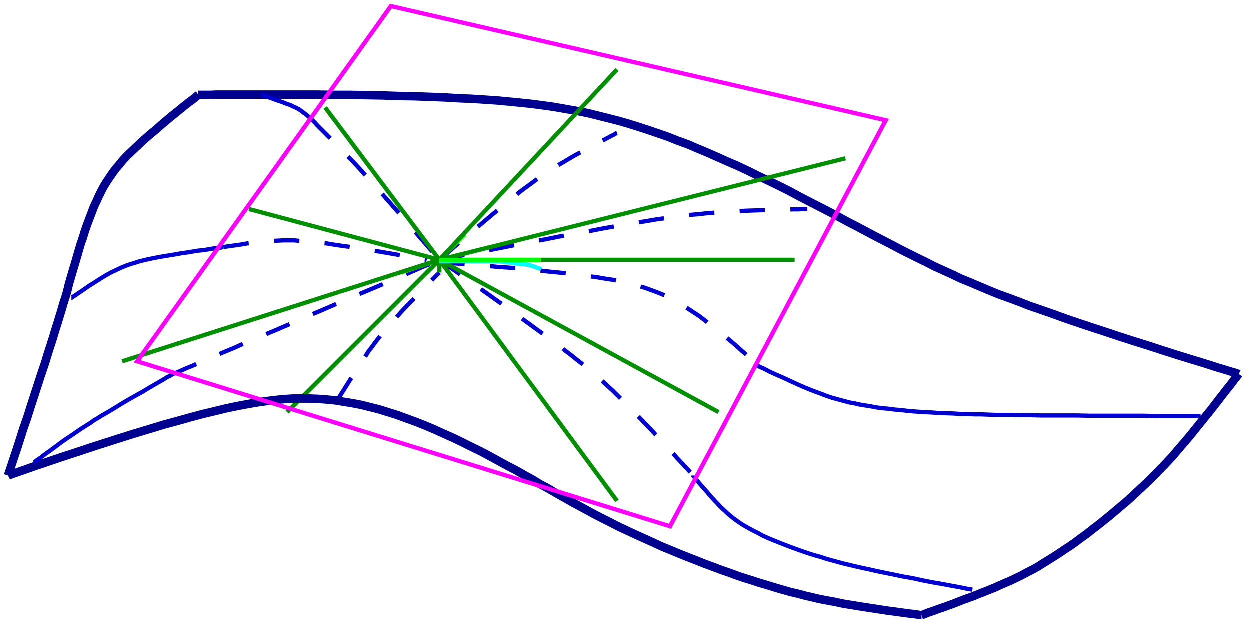
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



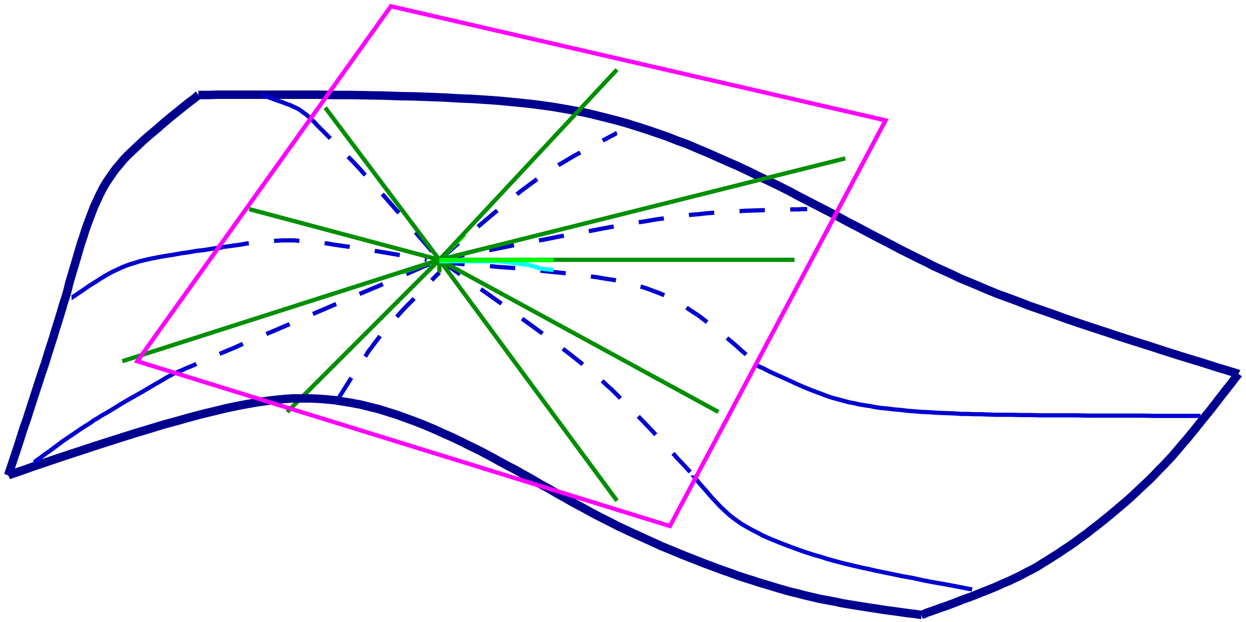
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



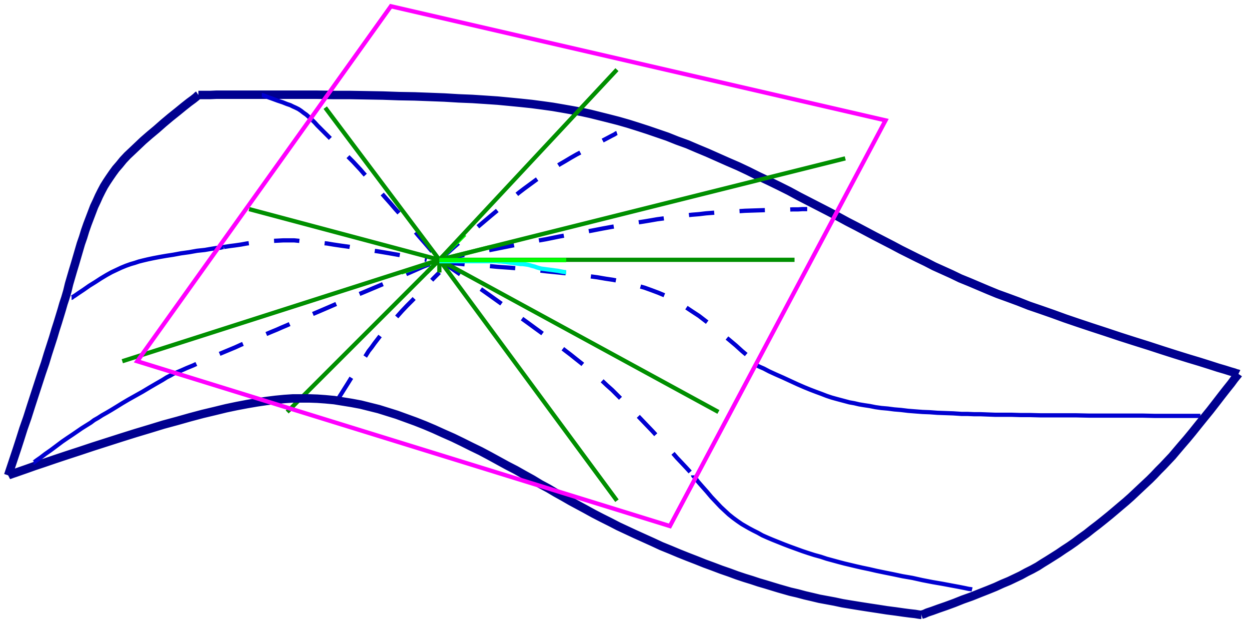
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



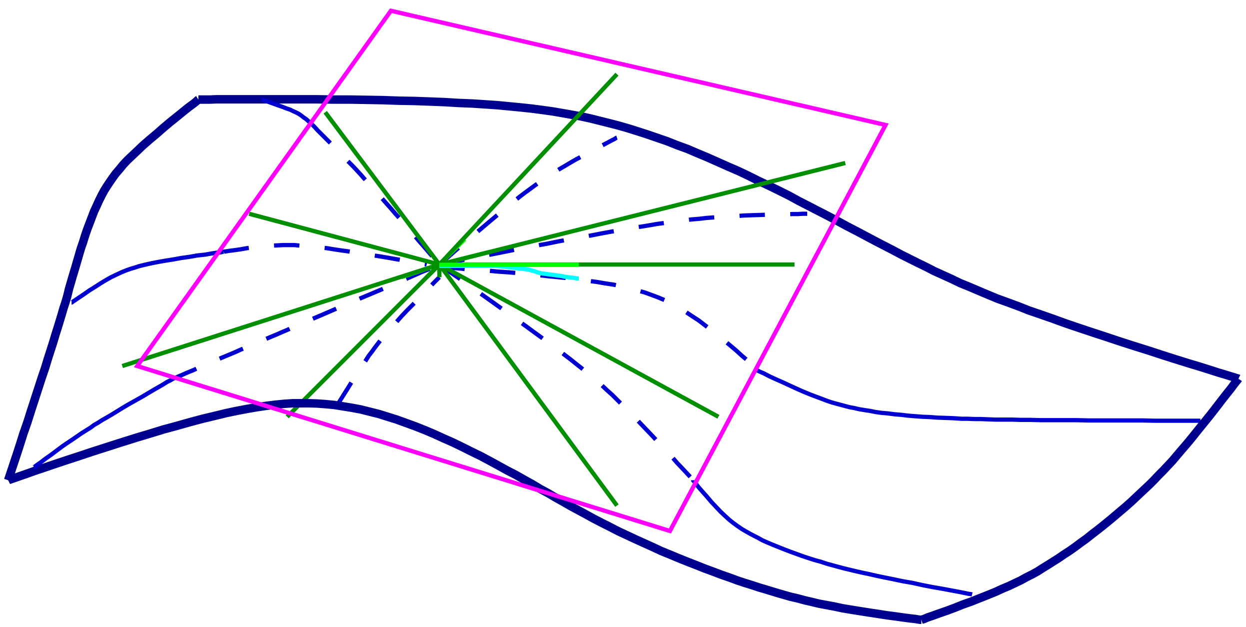
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



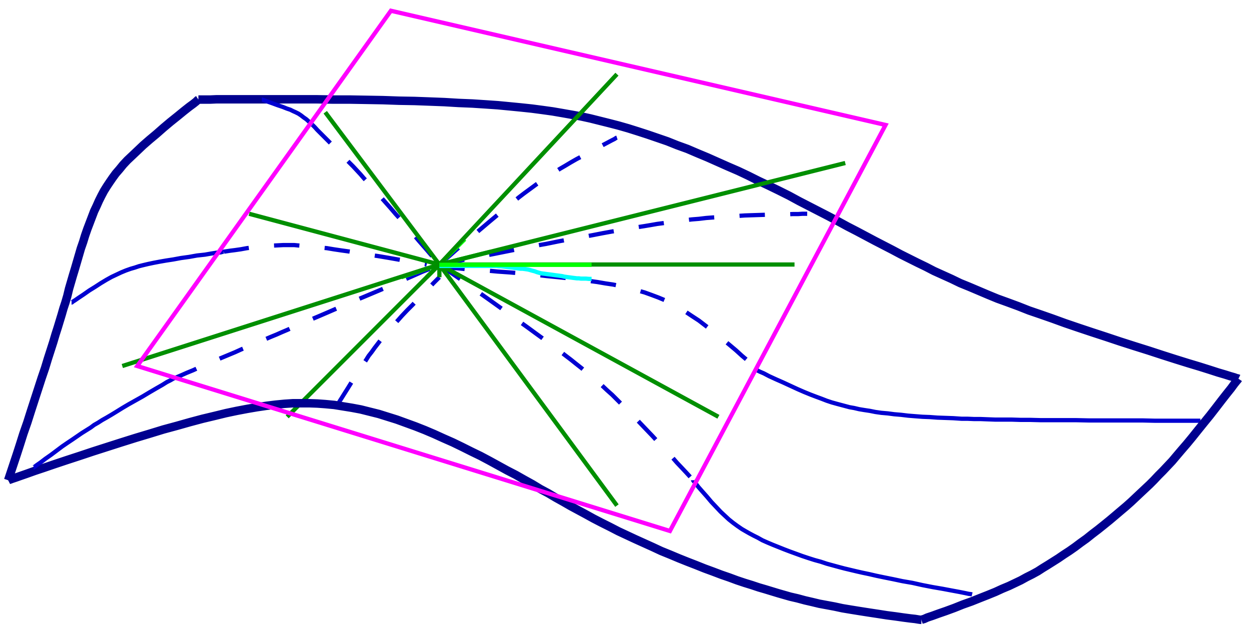
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



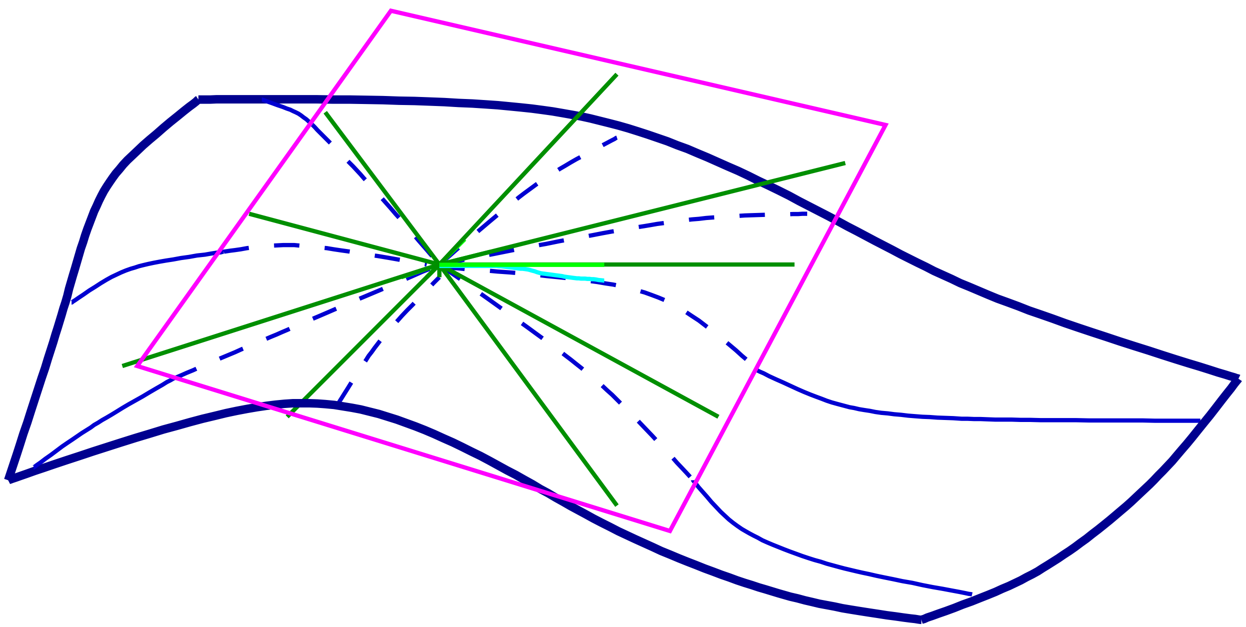
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



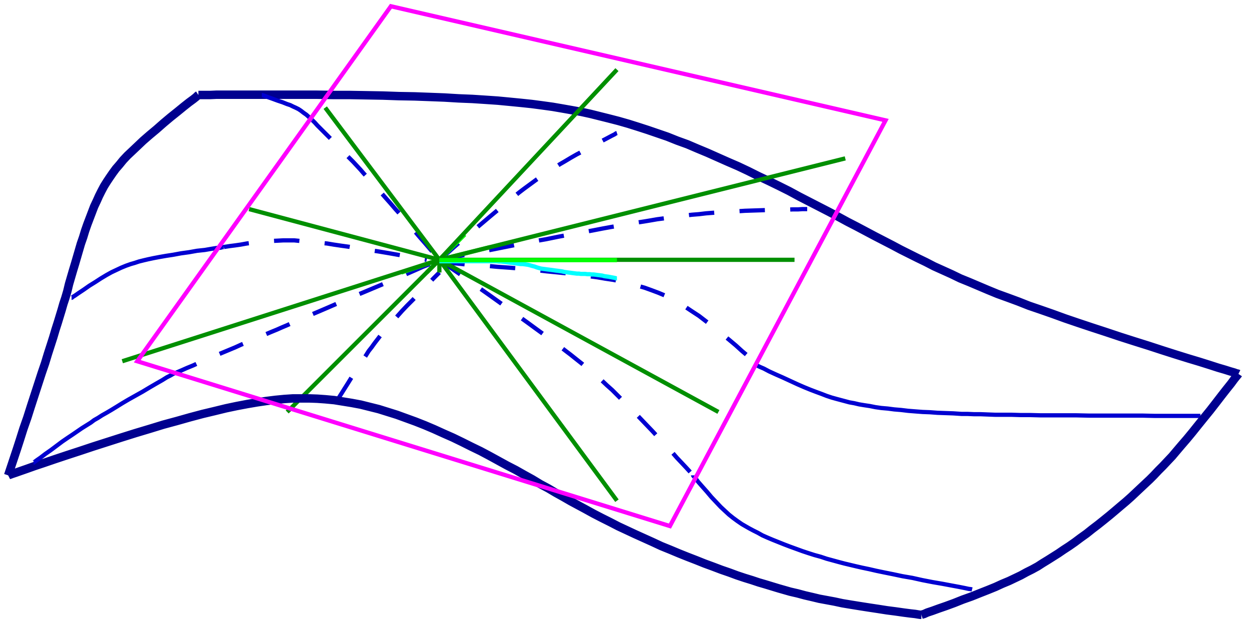
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



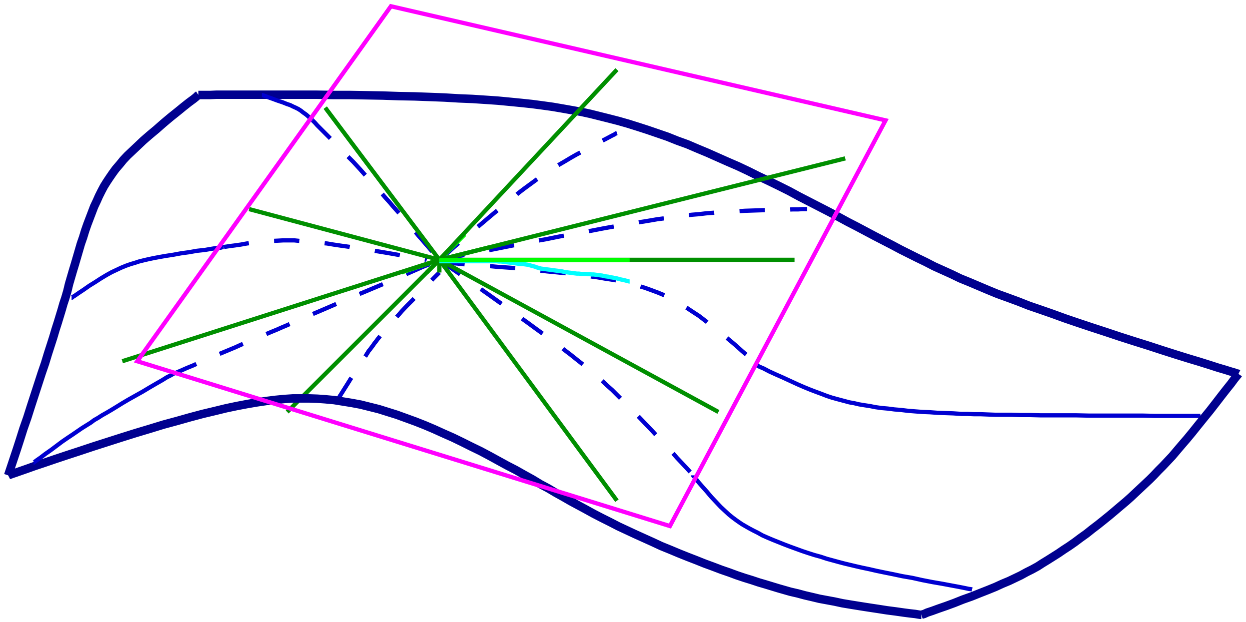
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



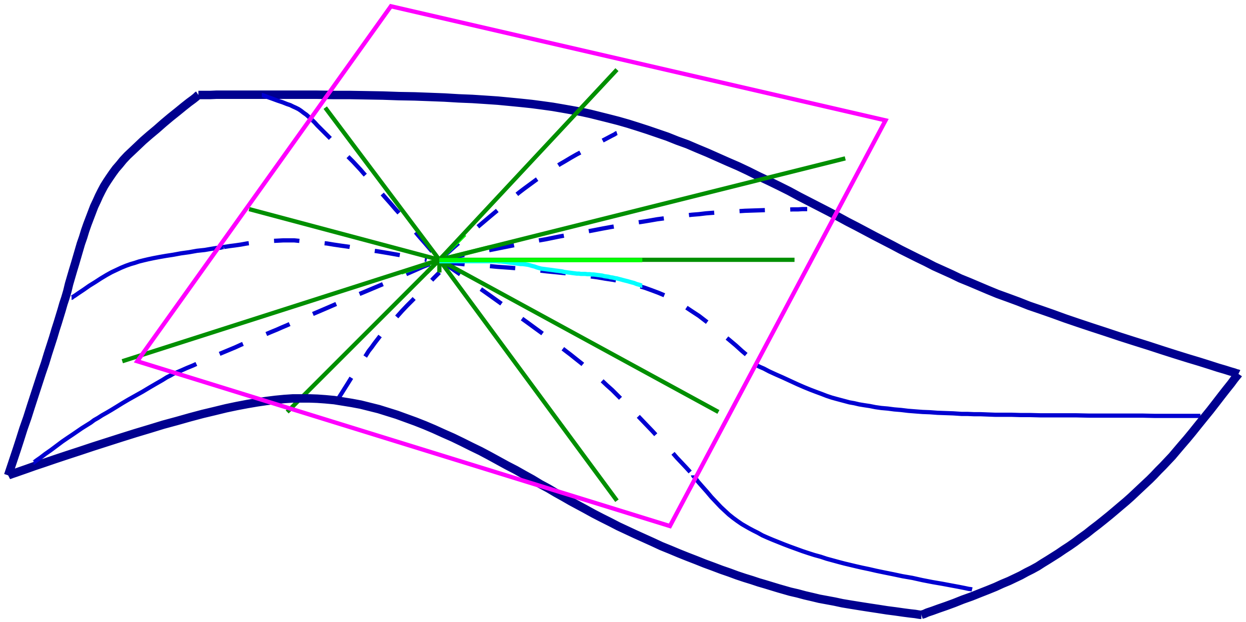
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



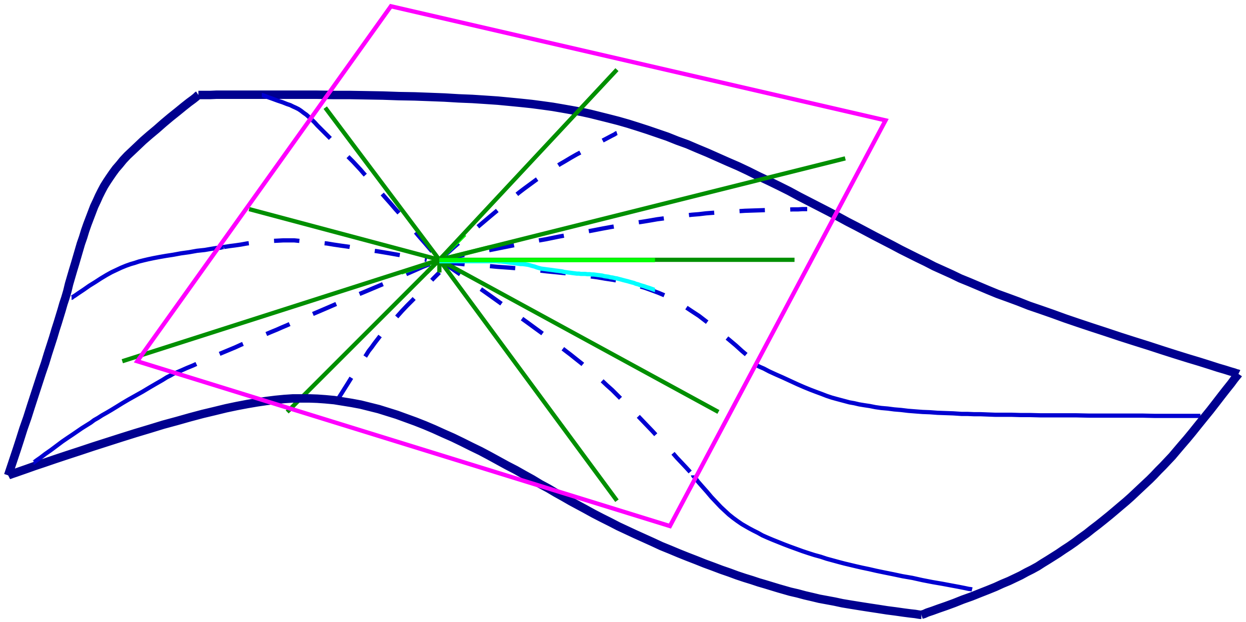
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



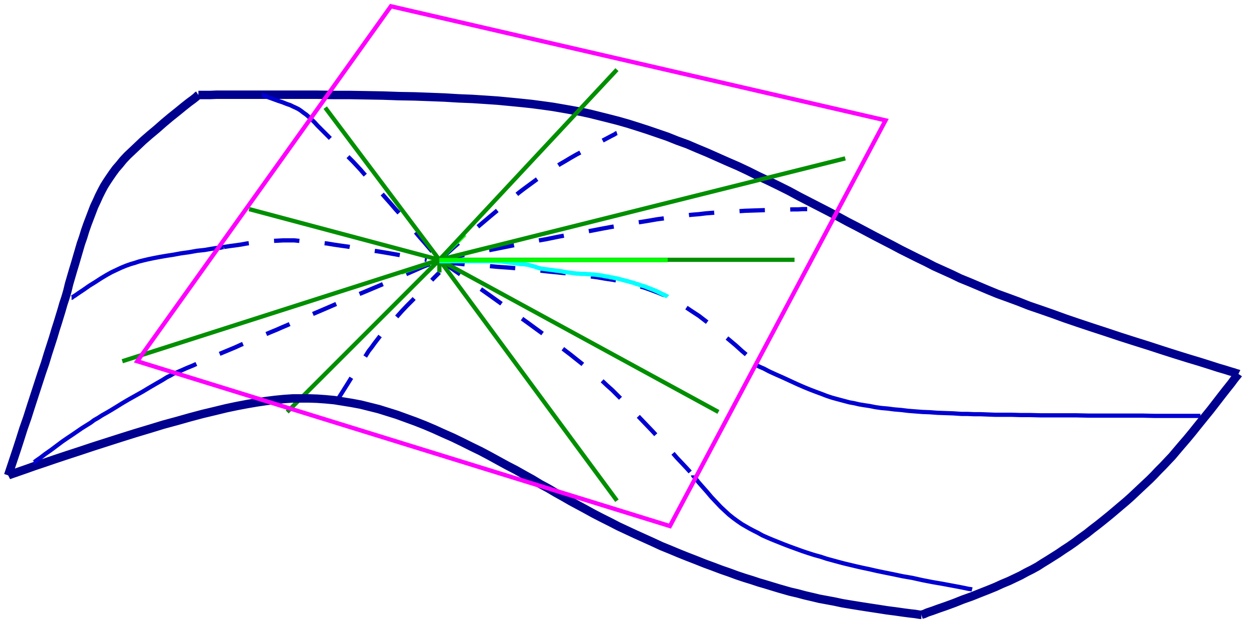
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



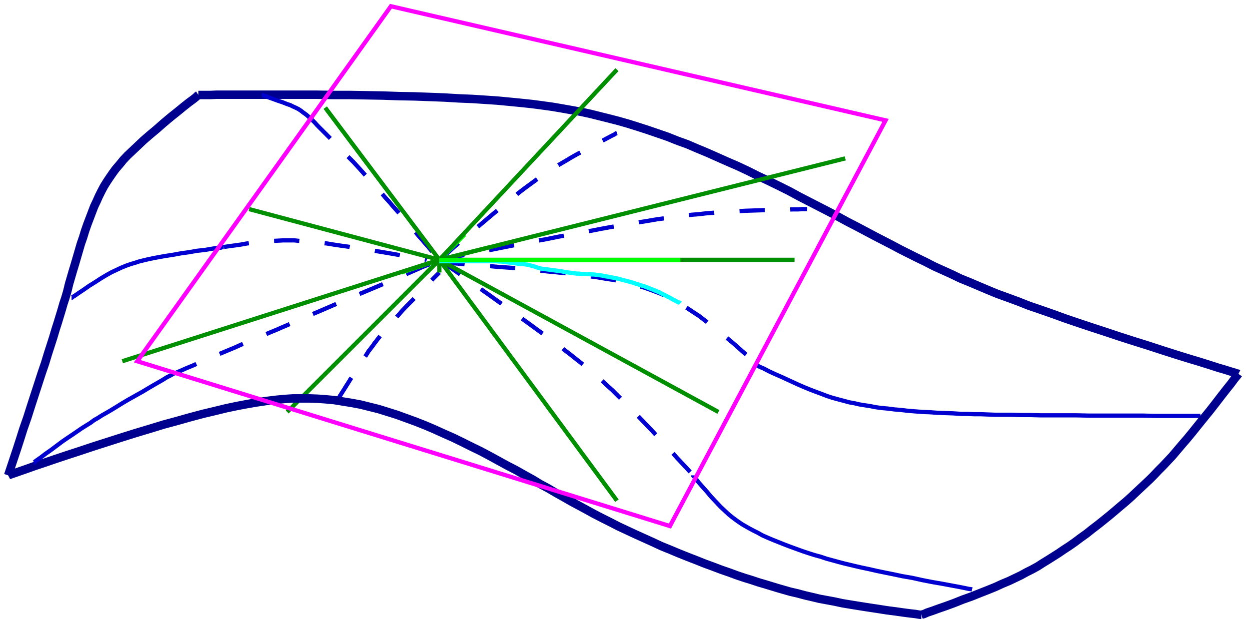
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



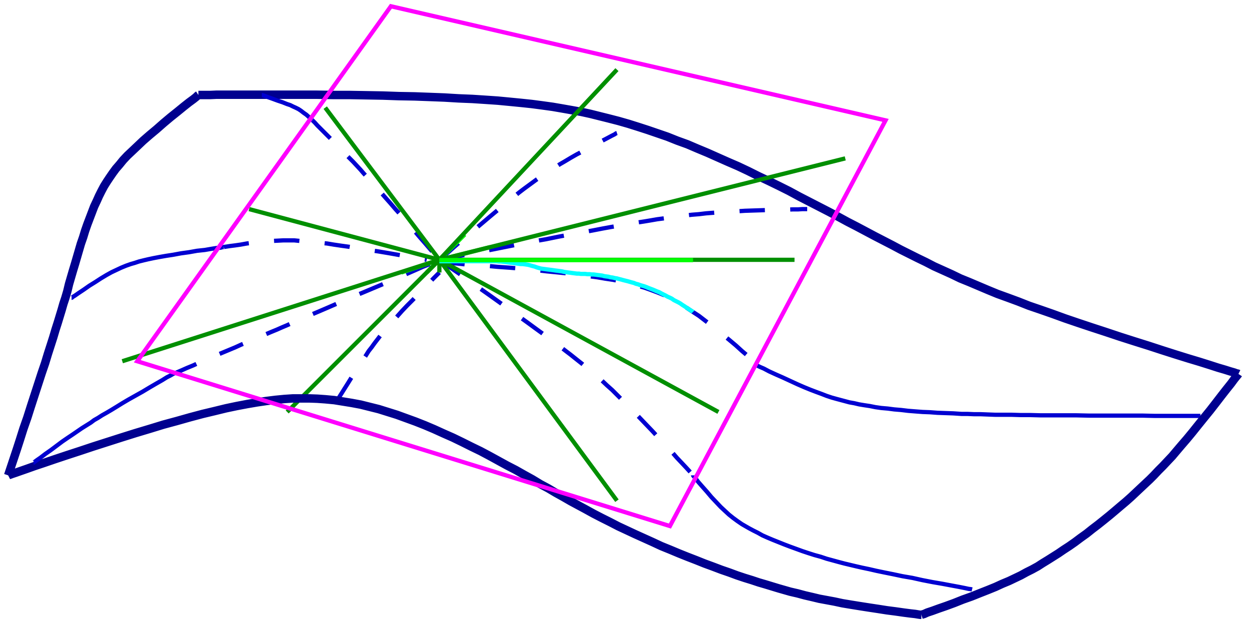
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



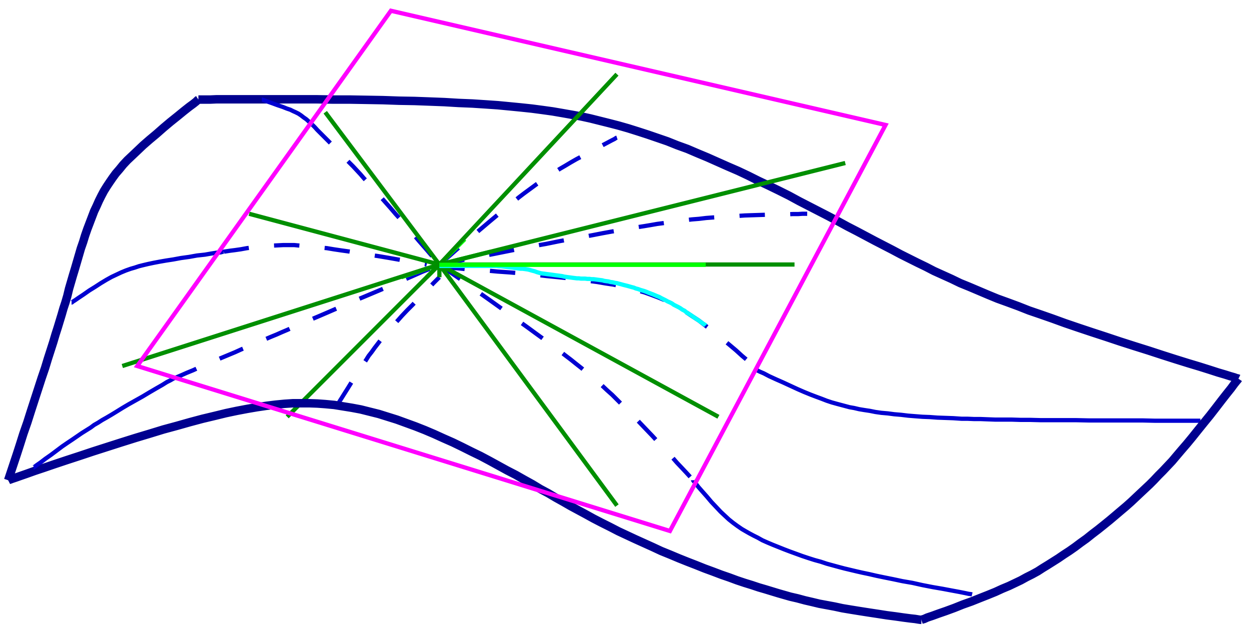
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



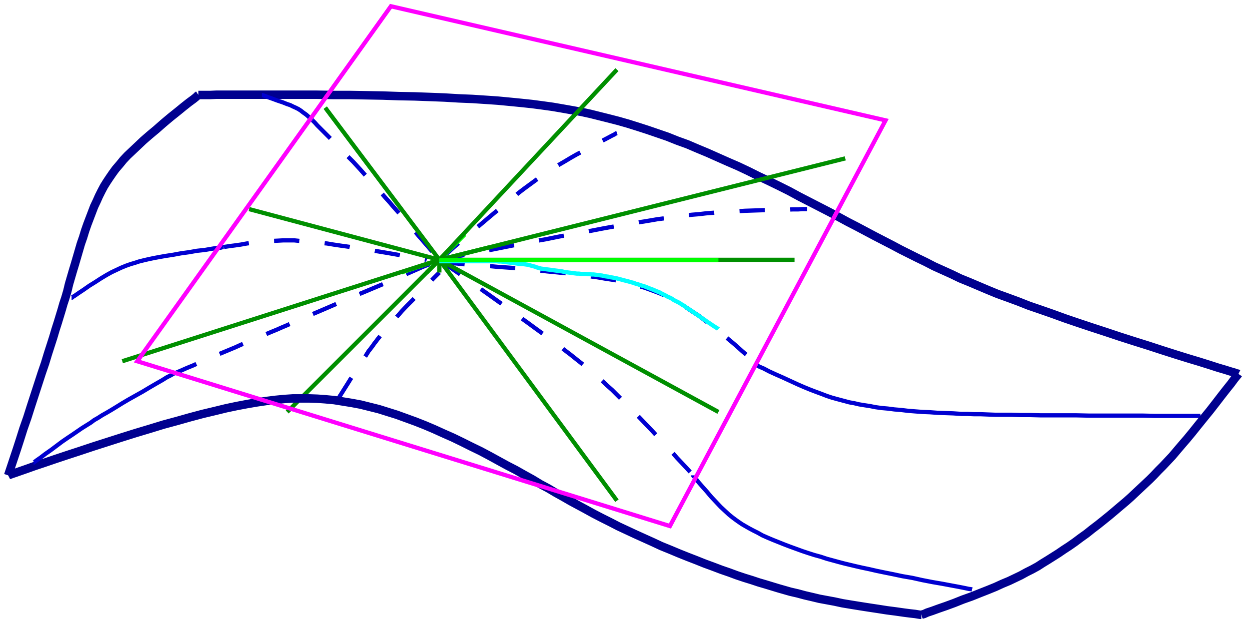
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



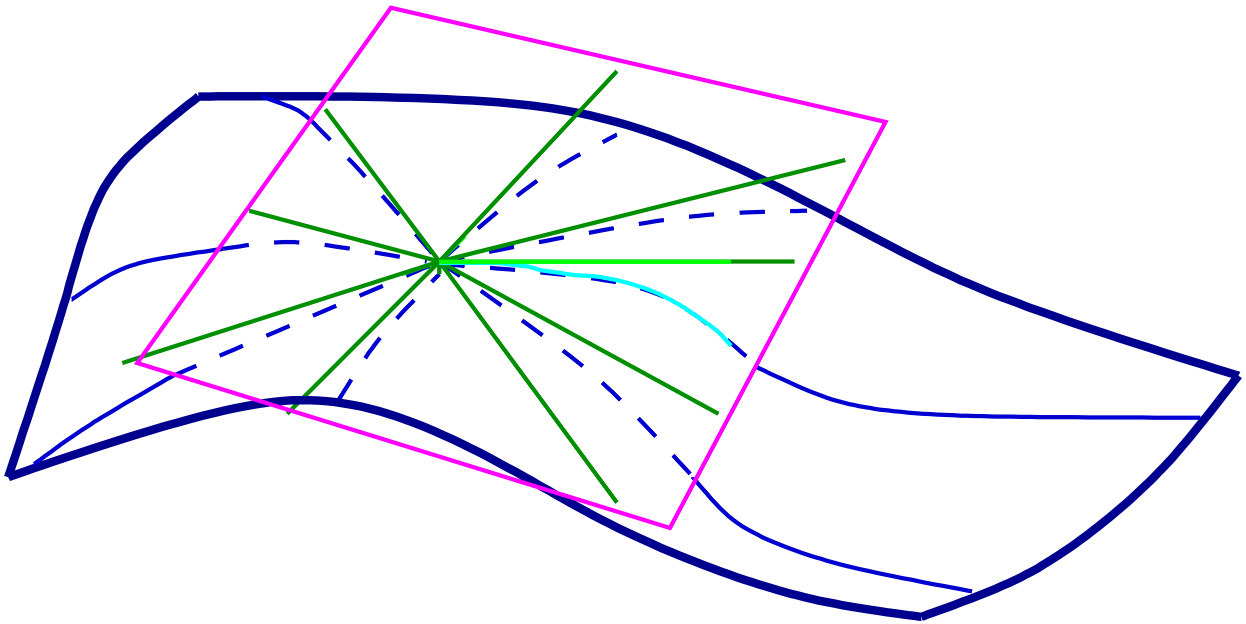
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



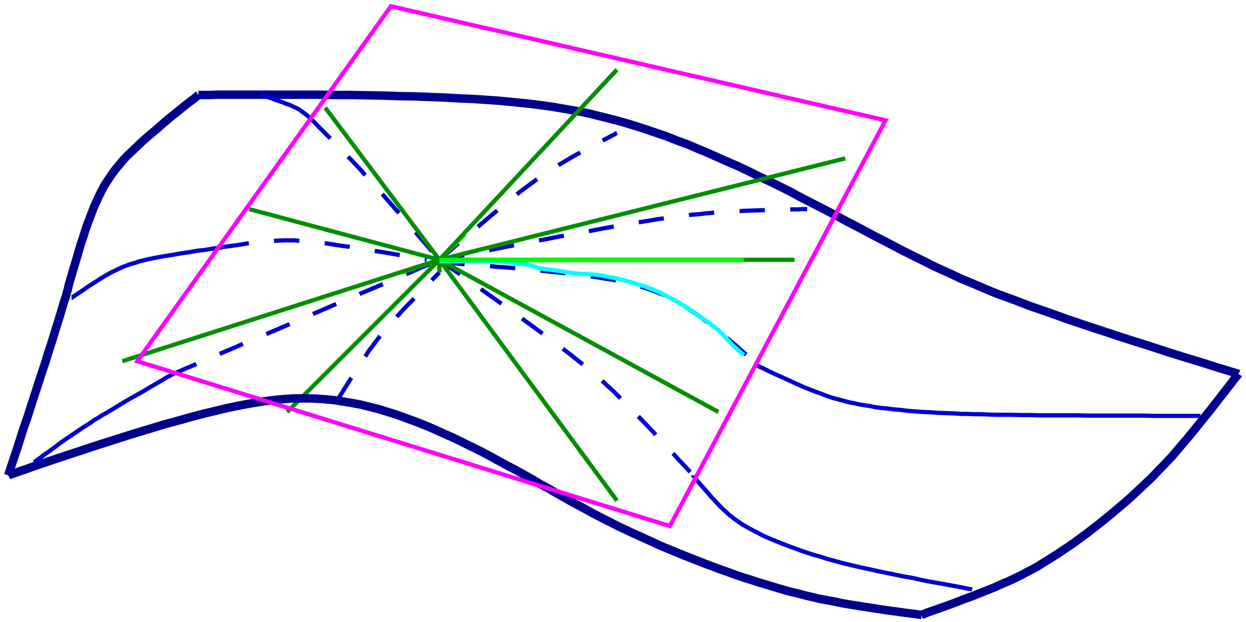
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



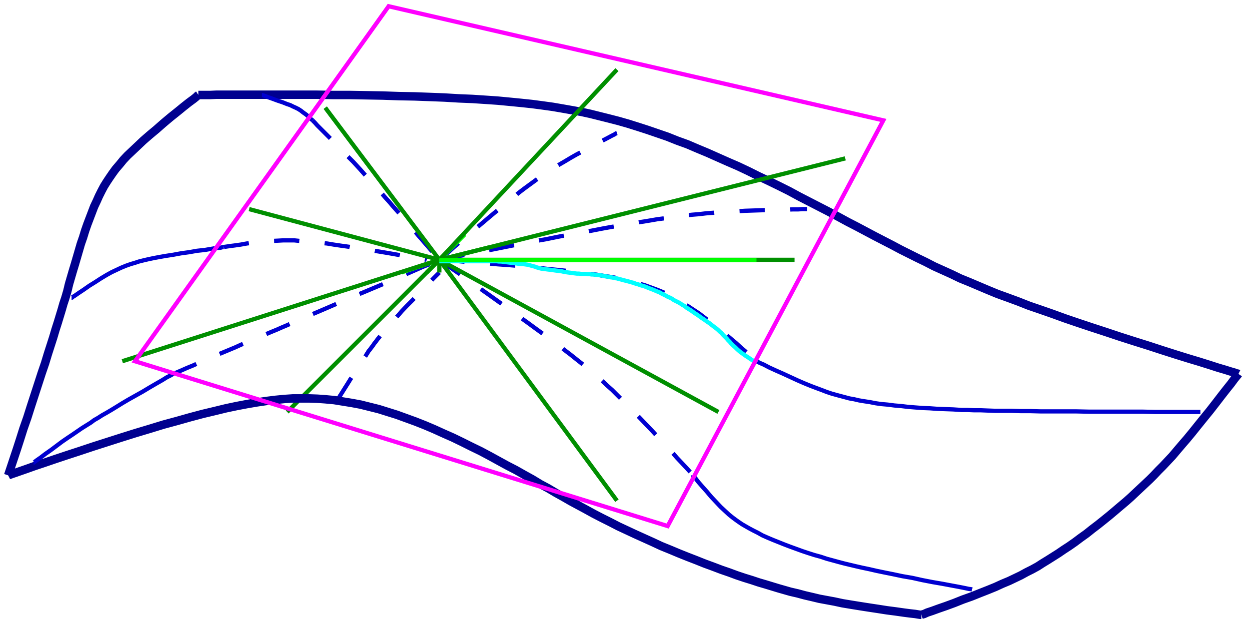
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



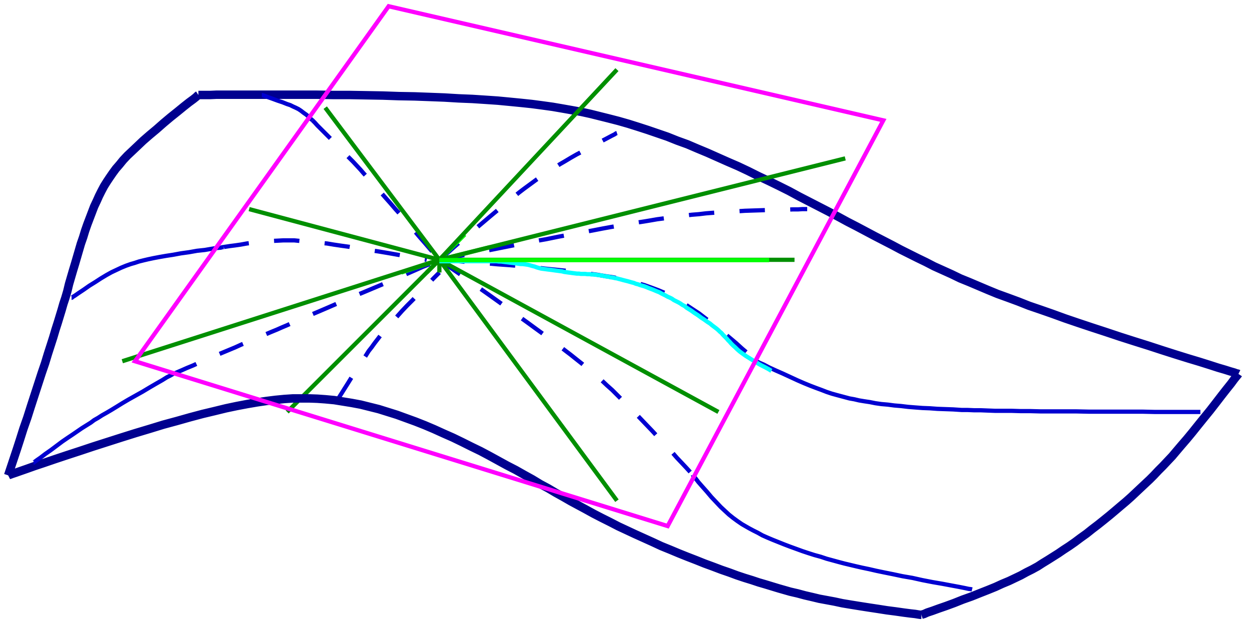
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



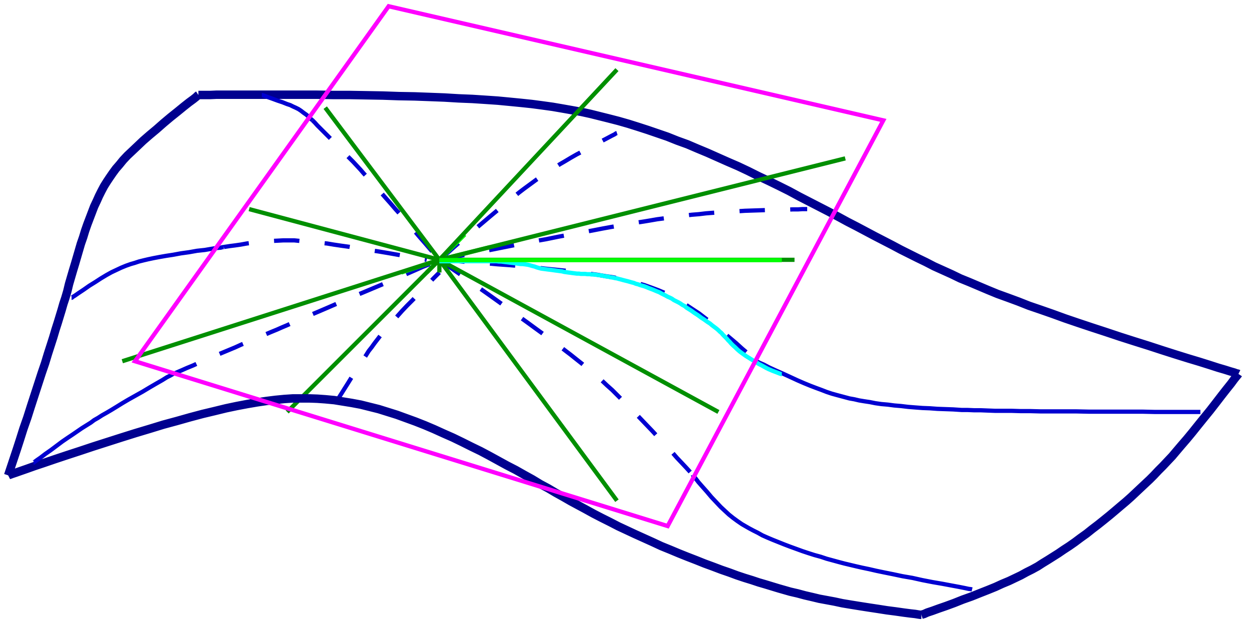
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



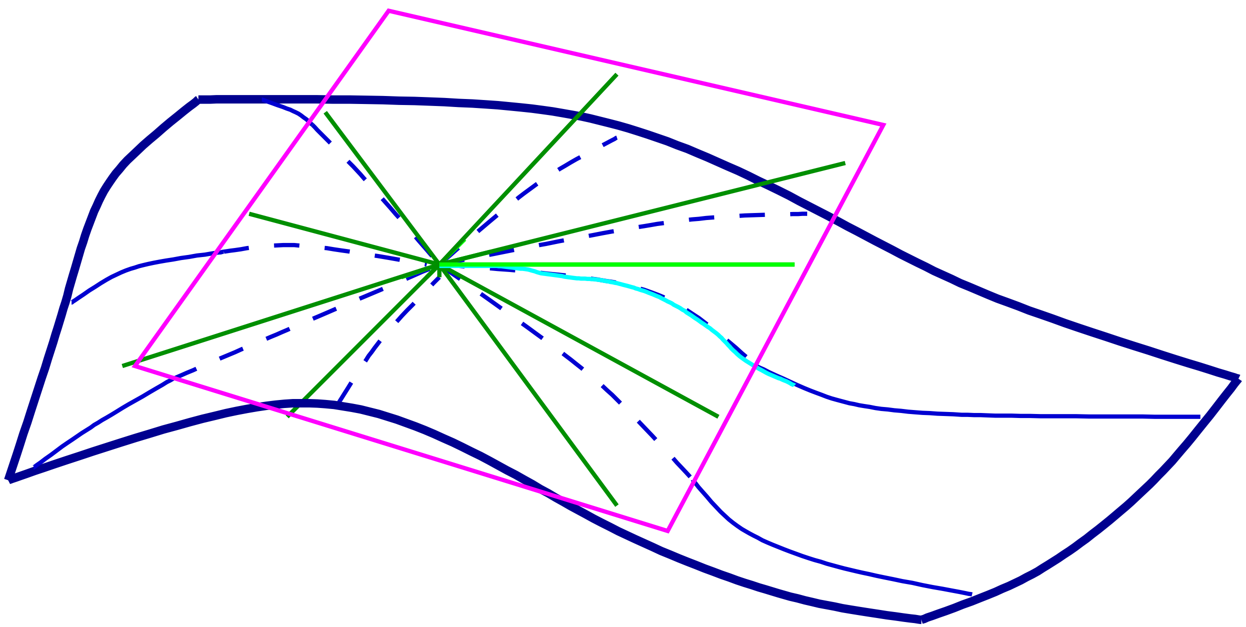
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



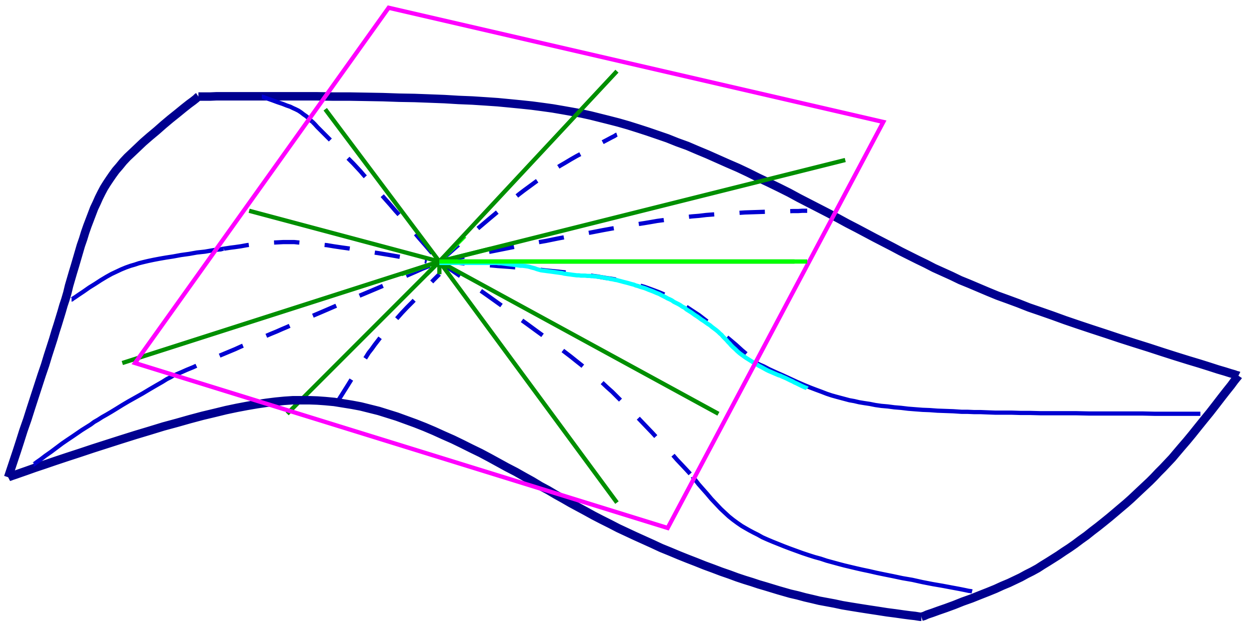
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



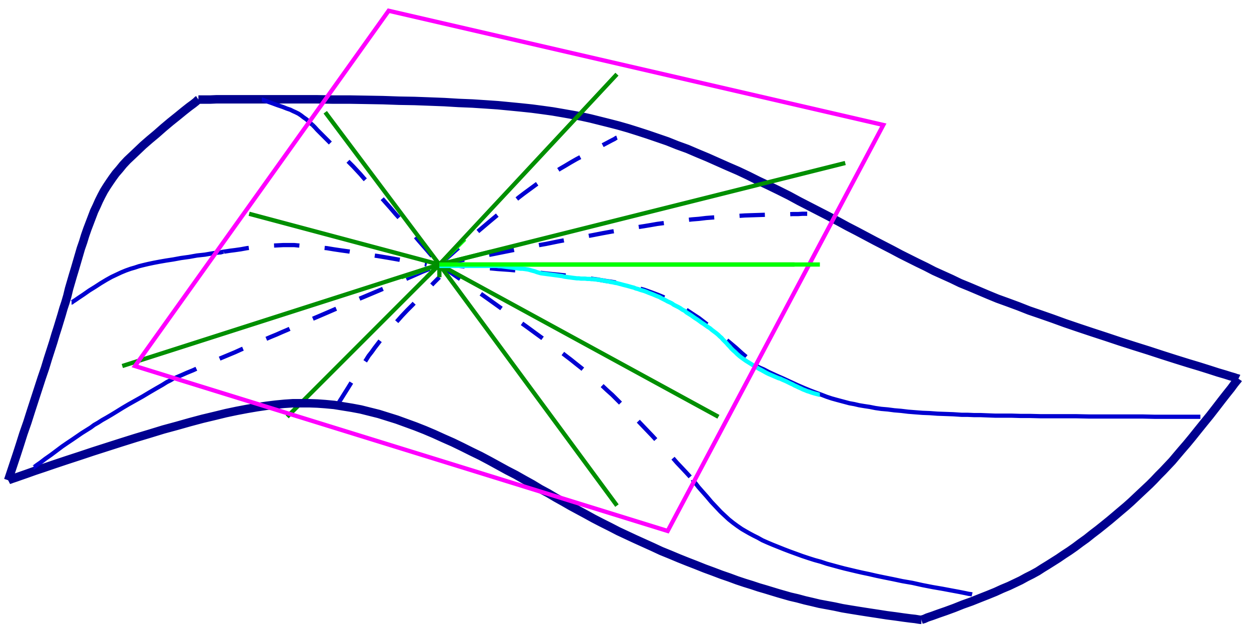
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



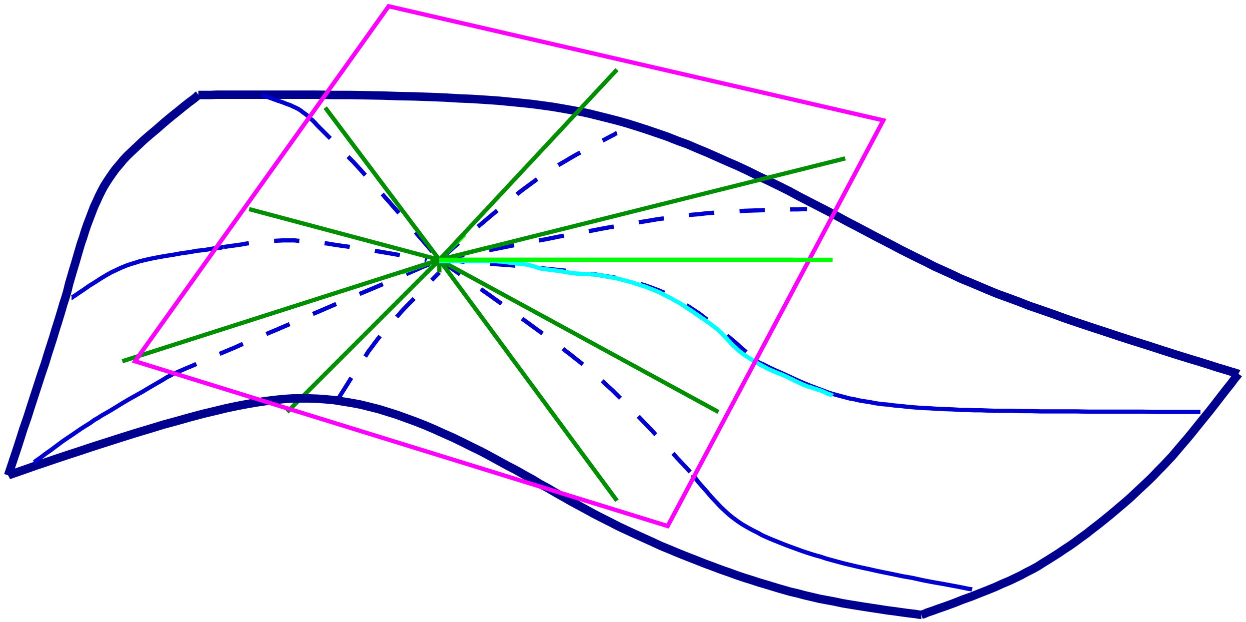
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals



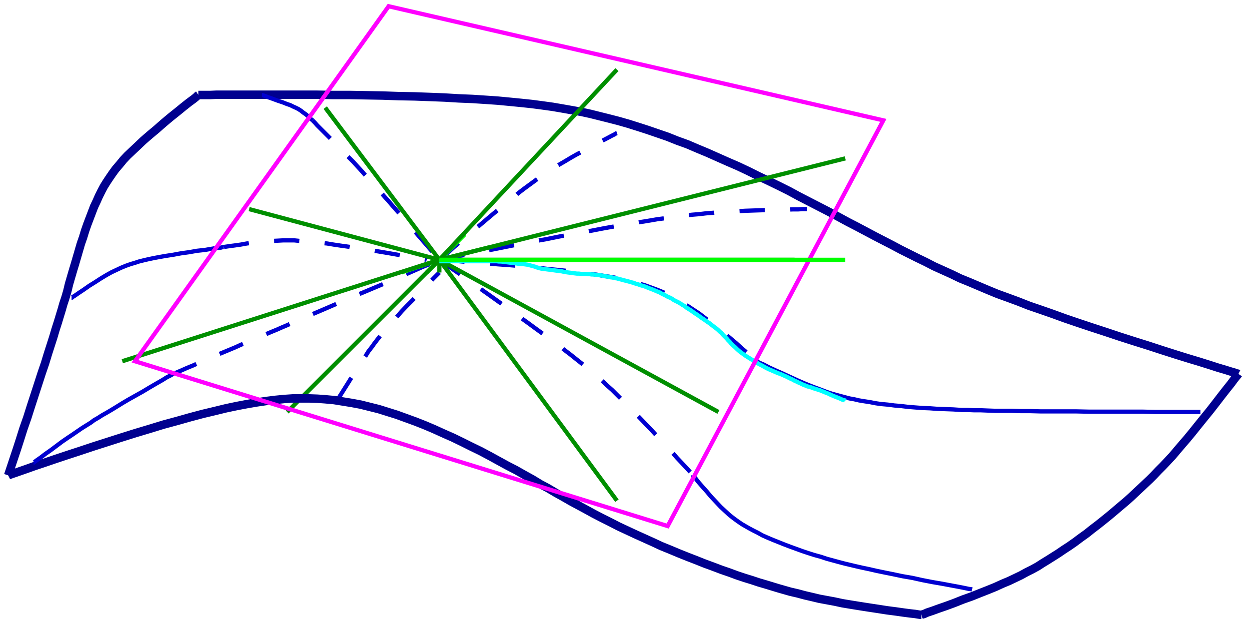
L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

Comencem escollint unes bones coordenades pels càlculs

- Coordenades geodèsiqes o normals

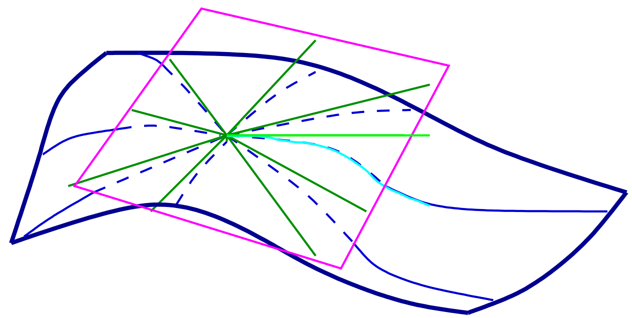


L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.

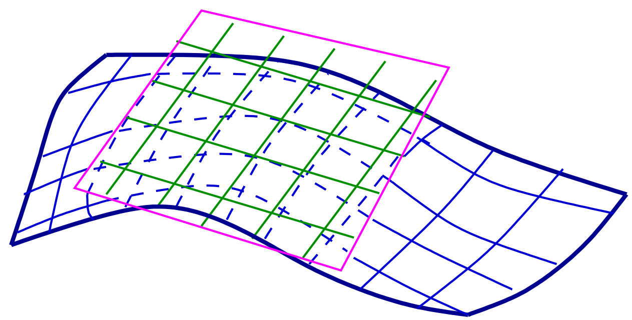
- Coordenades geodèsiqes o normals



L'aplicació exponencial geodèsica identifica

— rectes radials que surten de l'origen, al tangent,

— amb geodèsiques (minimitzants) que surten del punt, a la varietat.



Coordenades normals $\longleftrightarrow$ coordenades rectilínies del tangent

Riemann veu que en coordenades geodèsiques:

1. A l'origen ds^2 val $\sum(dx^i)^2$ (és a dir, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$)
2. No hi ha terme de primer ordre en la sèrie de Laurent.
3. El de 2^n ordre és combinació de $(x_1dx_2 - x_2dx_1)$, $(x_1dx_3 - x_3dx_1)$

Riemann veu que en coordenades geodèsiques:

1. A l'origen ds^2 val $\sum(dx^i)^2$ (és a dir, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$)
2. No hi ha terme de primer ordre en la sèrie de Laurent.
3. El de 2^n ordre és combinació de $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$, $(x_1 dx_3 - x_3 dx_1)$

En llenguatge actual:

$$\boxed{g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \tfrac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)}$$

$$R_{i\alpha\beta j} = -R_{i\alpha j\beta} = -R_{\alpha i\beta j} = R_{\beta j i\alpha},\ R_{i\alpha\beta j} + R_{i\beta j\alpha} + R_{ij\alpha\beta} = 0.$$

Aquests simetries equivalen a 3.

$$\boxed{R_{i\alpha\beta j} = \text{curvatura de Riemann}}$$

En coordenades geodèsiques:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$$

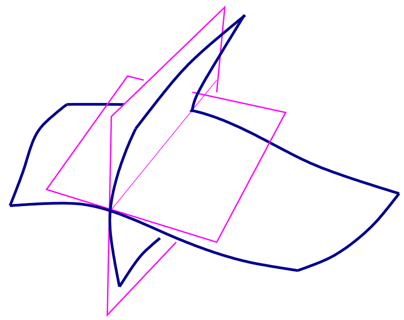
I Riemann troba la curvatura de Gauß K per superfícies:

$$K = R_{1212} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{2121}$$

nigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Mass-

El factor $1/4$ prové d'una normalització en els càlculs...

3. (Curvatura seccional): curvatura de superfícies que són imatge per l'exponencial de plans.



4. En el cas de curvatura seccional constant α

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma_i dx_i^2}$$

(Les coordenades no són geodèsiques)

Part II: geometria de Riemann, 3 , 4 i 5

4. En el cas de curvatura seccional constant α

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma_i dx_i^2}$$

(Les coordenades no són geodèsiques)

das Linienelement die Form

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

gegeben werden kann.

§. 5.

4. En el cas de curvatura seccional constant α

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma_i dx_i^2}$$

(Les coordenades no són geodèsiques)

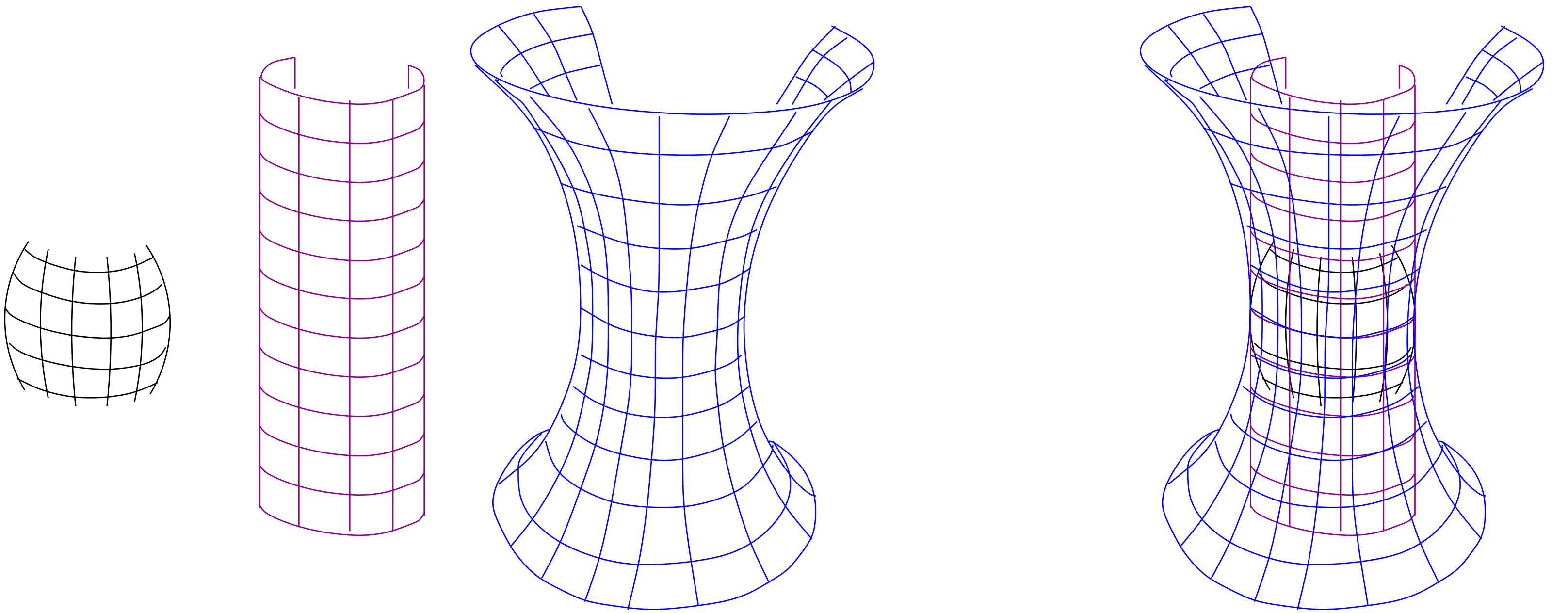
$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2)^2} = \delta_{ij}(1 - \frac{\alpha}{2}\Sigma x_i^2 + O(|x|^4))$$

4. En el cas de curvatura seccional constant α

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma_i dx_i^2}$$

(Les coordenades no són geodèsiques)

5. Superfícies de curvatura constant

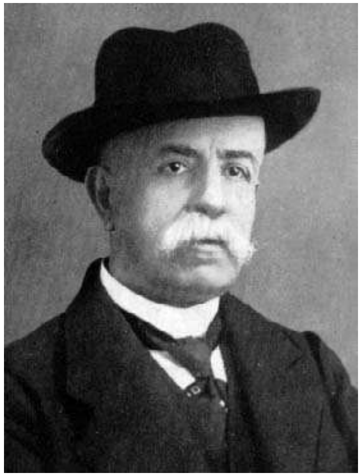


1 Com determinar la geometria de l'espai.
Si és homogeni i isòtrop, té curvatura constant
i utilitzem triangles per saber la curvatura.

2 Il·limitat i/o infinit (sense fontera i/o no compacte).
Cas de curvatura constant positiva (ha de ser compacte).

3 Infinitament petit. Física.

Els tensors, les connexions i el transport paral·lel
del llenguatge actual arriben amb


Christoffel	Ricci-Curbastro	Levi-Civita
1829-1900	1853 - 1925	1873 - 1941

Com a tensor, $R_{i\alpha\beta j} = R(\partial_i, \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_j)$

En coordenades geodèsiques:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$$

$$R_{i\alpha\beta j} = R(\partial_i, \partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_j)$$

En general Si X, Y, Z, T són camps qualsevols, es defineix:

$$R(X, Y, Z, T) = g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z, T)$$

Curvatures en coordenades geodèsiques

En coord. geodèsiques: $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$

- Curvatura de Ricci (Té el mateix ordre que la mètrica g_{ij}):

$$R_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha i\beta j} = -\sum_{\alpha,\beta} R_{i\alpha\beta j}$$

- Curvatura escalar:

$$s = \sum_i R_{ii}$$

- Curvatura seccional del pla de coordenades i i j:

$$K_{ij} = R_{ijij}$$

En coordenades no geodèsiques, les fòrmules són més complicades

Equació d'Einstein

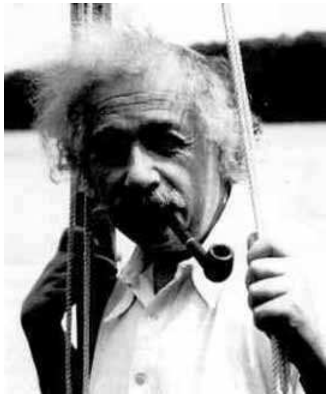
$$R_{ij} - \frac{1}{2} s\, g_{ij} = T_{ij}$$

$T_{ij} =$ tensor d'impulsió energia

$R_{ij} =$ curvatura de Ricci, $s =$ curvatura escalar

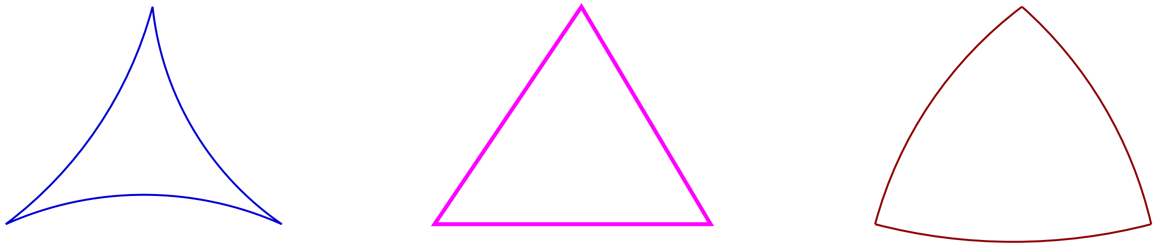
g_{ij} és una mètrica de Lorentz a l'espai temps

(no es un producte escalar perquè té signatura (3,1))



Comparació: curvatura seccional

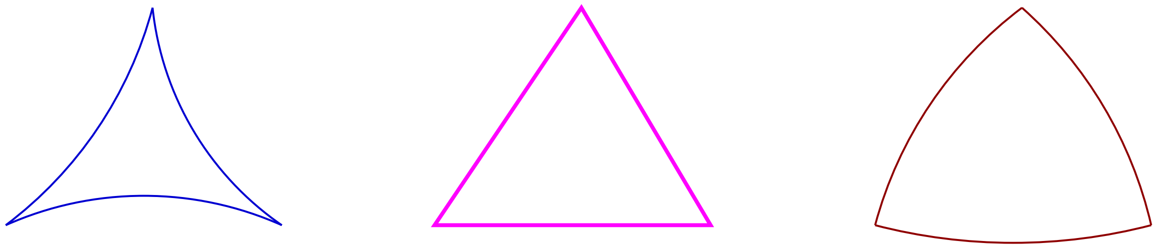
Triangles en curvatura constant K.



$K < 0$ $\qquad$ $K = 0$ $\qquad$ $K > 0$

Comparació: curvatura seccional

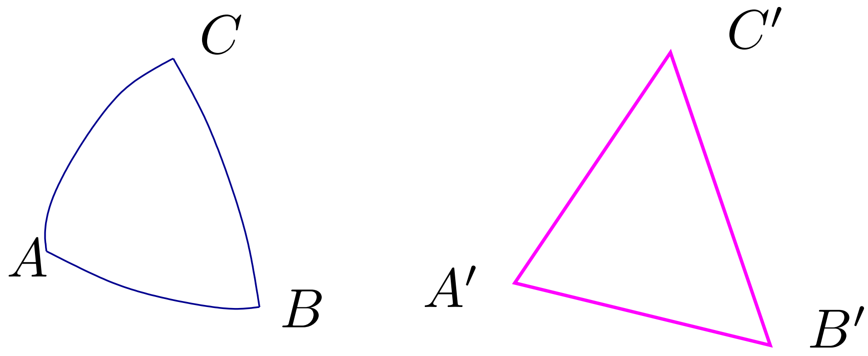
Triangles en curvatura constant K.



$K < 0$ $K = 0$ $K > 0$

Triangle $ABC \rightsquigarrow$ Triangle de comparació $A'B'C'$
a la superfície de curvatura constant κ

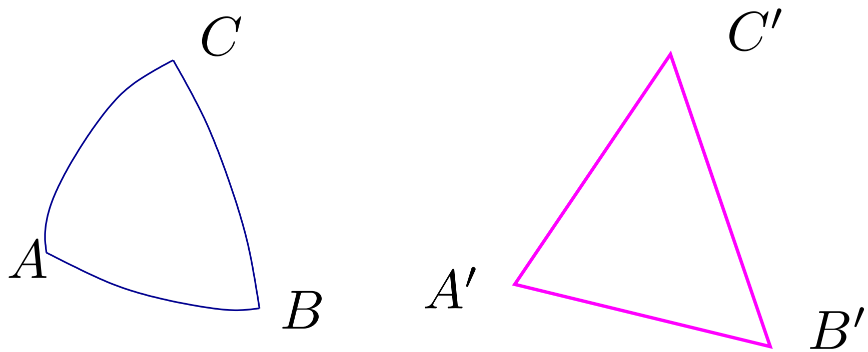
$|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|CA| = |C'A'|$



Comparació: curvatura seccional

Triangle $ABC \rightsquigarrow$ Triangle de comparació $A'B'C'$
a la superfície de curvatura constant κ

$$|AB| = |A'B'|,\ |BC| = |B'C'|,\ |CA| = |C'A'|$$



Teorema de

Toponogov, 1959

En una varietat de curvatura $\geq \kappa$,

els angles de $ABC \geq$ angles de $A'B'C'$

Comparació: curvatura de Ricci

$B(p,r) =$ bola de centre p i radi r.
$v(n,\kappa,r) =$ volum de la bola de radi r a l'espai de curvatura constant κ

R_{ij} i g_{ij} es poden comparar com a formes quadràtiques

$B(p, r) =$ bola de centre p i radi r.

$v(n, \kappa, r) =$ volum de la bola de radi r a l'espai de curvatura constant κ

R_{ij} i g_{ij} es poden comparar com a formes quadràtiques

Teorema Bishop-Cheeger-Gromov

(M^n, g) varietat completa, $(R_{ij}) \geq (n-1)\kappa(g_{ij})$, aleshores

$$r \mapsto \frac{\operatorname{vol} B(p,r)}{v(n,\kappa,r)}$$

és una funció no creixent que tendeix a 1 quan $r \to 0$

$B(p,r) =$ bola de centre p i radi r.
$v(n,\kappa,r) =$ volum de la bola de radi r a l'espai de curvatura constant κ

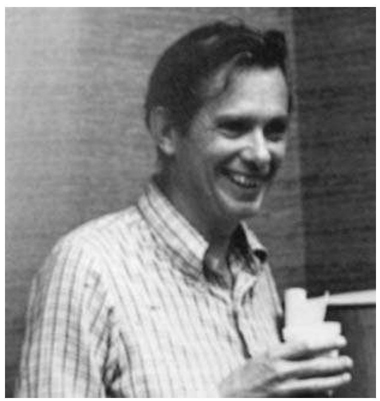
R_{ij} i g_{ij} es poden comparar com a formes quadràtiques

Teorema Bishop-Cheeger-Gromov

(M^n, g) varietat completa, $(R_{ij}) \geq (n-1)\kappa(g_{ij})$, aleshores

$$r \mapsto \frac{\operatorname{vol} B(p,r)}{v(n,\kappa,r)}$$

és una funció no creixent que tendeix a 1 quan $r \to 0$



Un exemple:

Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

"Les geodèsiques s'ajunten en curvatura positiva"

Un exemple:

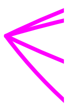
Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

“Les geodèsiques s’ajunten en curvatura positiva”



Un exemple:

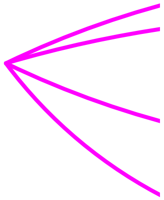
Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

"Les geodèsiques s'ajunten en curvatura positiva"



Un exemple:

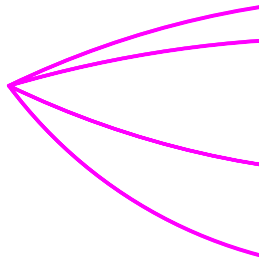
Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

"Les geodèsiques s'ajunten en curvatura positiva"



Un exemple:

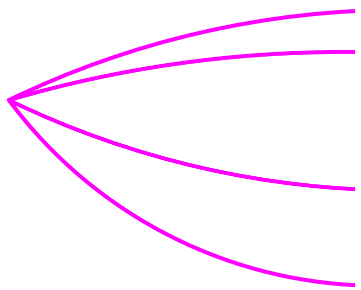
Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

"Les geodèsiques s'ajunten en curvatura positiva"



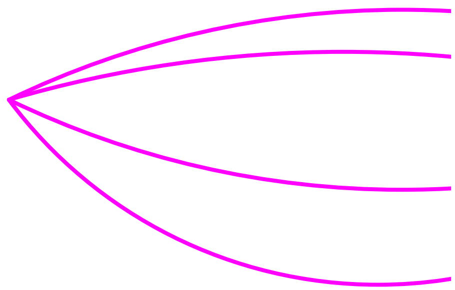
Un exemple:

Teorema de Myers:

$$\boxed{\begin{array}{c}(M^n, g) \text{ Riemanniana completa} \\ \text{Si } (R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij}) \text{ aleshores } \mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}\end{array}}$$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

“Les geodèsiques s’ajunten en curvatura positiva”



Un exemple:

Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

“Les geodèsiques s’ajunten en curvatura positiva”

Un exemple:

Teorema de Myers:

(M^n, g) Riemanniana completa

Si $(R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij})$ aleshores $\mathrm{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

“Les geodèsiques s’ajunten en curvatura positiva”

Un exemple:

Teorema de Myers:

$$(M^n, g) \text{ Riemanniana completa}$$

$$\text{Si } (R_{ij}) \geq (n-1)c(g_{ij}) \text{ aleshores } \operatorname{diam}(M^n) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}$$

En particular M es compacta amb $\pi_1(M)$ finit.

"Les geodèsiques s'ajunten en curvatura positiva"

Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

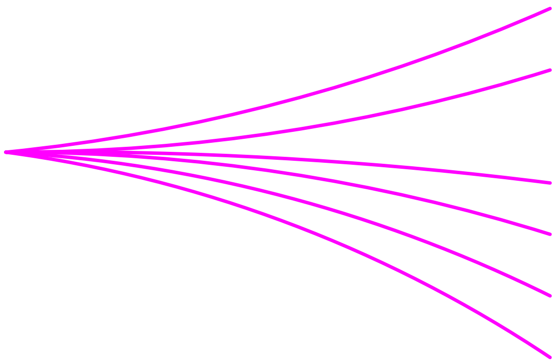
(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"

Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"

Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

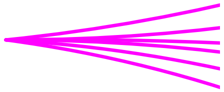
(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

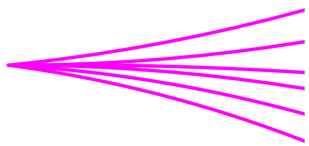
(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

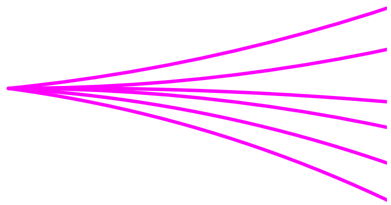
(M,g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

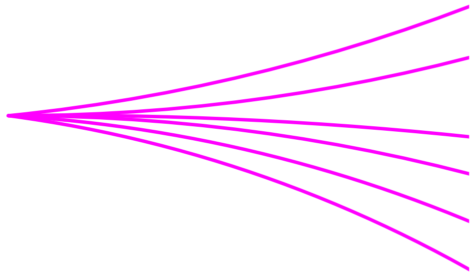
(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

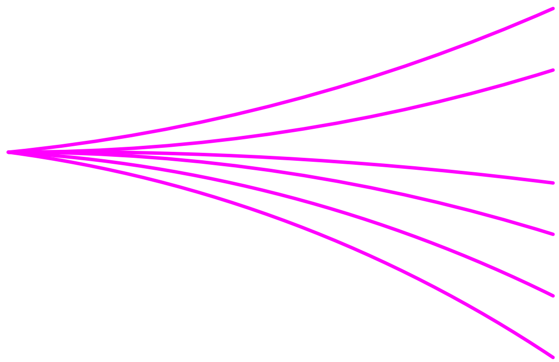
(M, g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Un exemple:

Teorema de Cartan-Hadamard:

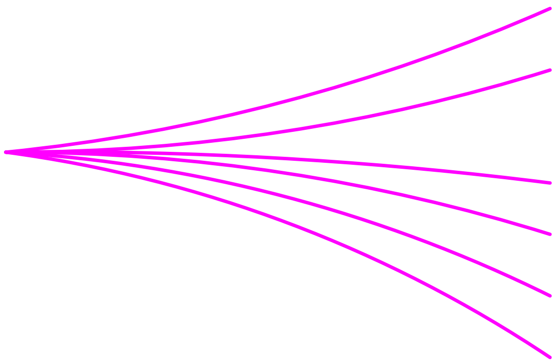
(M,g) Riemanniana completa

Si $K \leq 0$ aleshores

L'aplicació exponencial $T_pM \to M$ és un recobriment

El particular $\widetilde{M} \cong \mathbf{R}^n$ i $\pi_1(M)$ infinit.

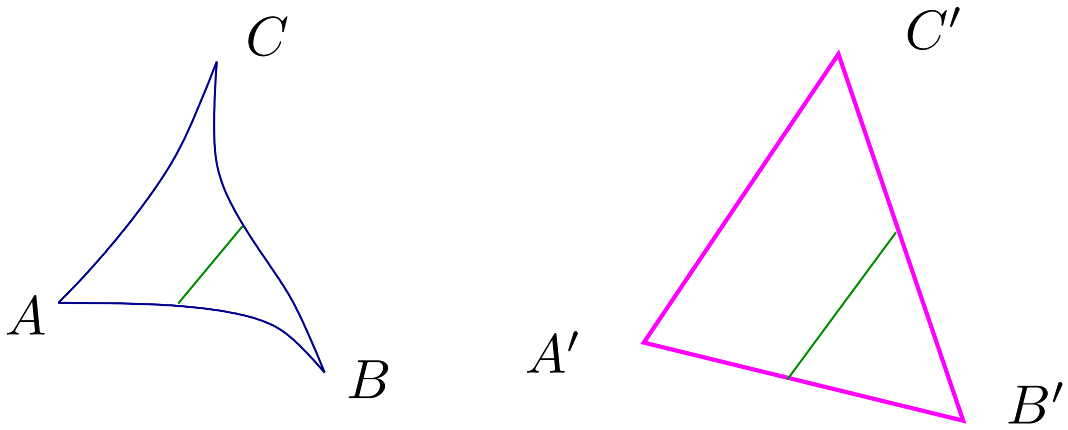
"les geodèsiques s'aparten en curvatura no positiva"



Les propietats de comparació s'agafen com a definició de curvatura $\geq \kappa$ o $\leq \kappa$ per a espais metrics.

Les propietats de comparació s'agafen com a definició de curvatura $\geq \kappa$ o $\leq \kappa$ per a espais metrics.

Un espai té curvatura ≤ 0 si els triangles són més "prims" que els Euclidians de comparació



$|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$, $|CA| = |C'A'|$.

Comparem la distancia dels punts mitjos dels segments

Les propietats de comparació s'agafen com a definició de curvatura $\geq \kappa$ o $\leq \kappa$ per a espais metrics.

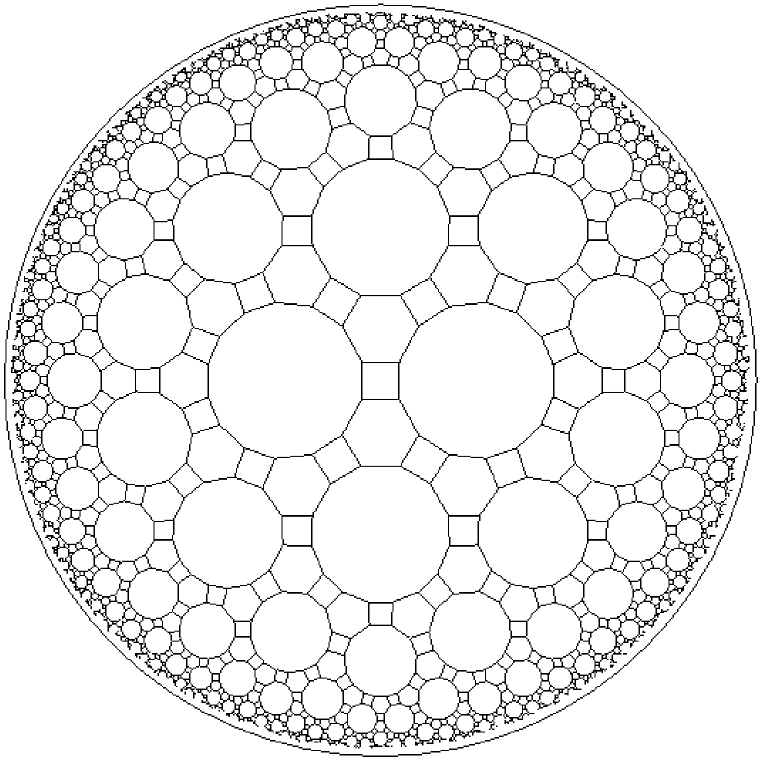
En teoria geomètrica de grups $G = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \mid r_j \rangle$

$$\underline{\text{Graf de Cayley } \Gamma} \begin{cases} \text{Vèrtexs} \leftrightarrow \text{elements de } G \\ \text{Arestes adjacents a } 1 \leftrightarrow \gamma_i \end{cases}$$

Γ és un espai mètric (arestes de longitud 1).

Propietats algebraiques de $G \leftrightarrow$ Propietats de curvatura de Γ

Graf de Cayley de $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ca)^7 \rangle$



És un exemple de grup hiperbòlic (curvatura $< \delta < 0$).

Flux de Ricci (Hamilton 1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

- En coordenades geodèsiques:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} x^\alpha x^\beta + O(|x|^3)$$

$$R_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha i \beta j} = -\sum_{\alpha,\beta} R_{i\alpha\beta j} = -\Delta g_{ij}(0)$$

No és una equació de difussió perquè només és laplacià en un punt...

Flux de Ricci (Hamilton 1982)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

- En coordenades harmòniques $\{x^i\}$, $\Delta x^i = 0$.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \Delta(g_{ij}) + Q_{ij}(g^{-1}, \frac{\partial g}{\partial x})$$

on $\begin{cases} \Delta(g_{ij}) = \text{laplacià de la funció escalar } g_{ij} \\ Q_{ij} = \text{expressió quadràtica} \end{cases}$

És una $\boxed{\text{equació de difussió-reacció.}}$

Conjectura de geometrització de Thurston

M^3 tancada admet una descomposició canònica en trossos geomètrics

- Descomposición canònica: suma conexa de Knesser (1929) i tors de Jaco-Shalen i Johannson (1979).
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.

M^3 tancada admet una descomposició canònica en trossos geomètrics

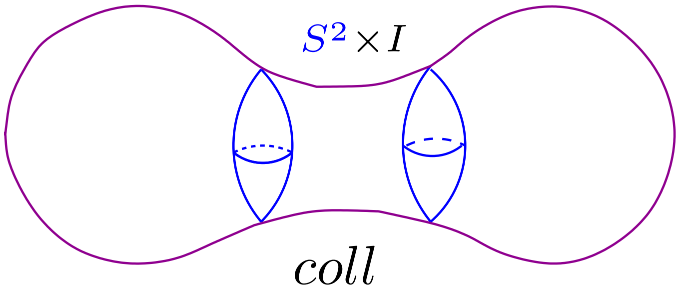
- Descomposición canònica: suma conexa de Knesser (1929) i tors de Jaco-Shalen i Johannson (1979).
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.
- A princips dels 1980, Hamilton l'havia demostrada quan $(R_{ij}) \geq 0$. i desenvolupà un programa per demostrar-la en general.

Conjectura de geometrització de Thurston

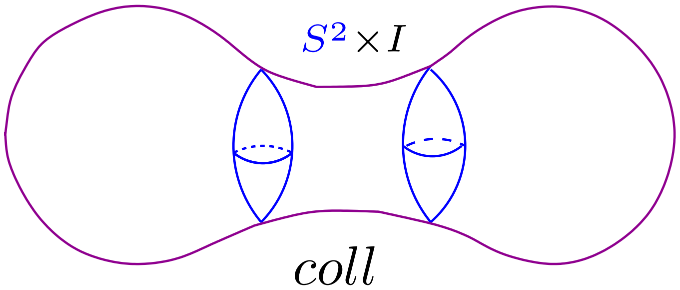
M^3 tancada admet una descomposició canònica en trossos geomètrics

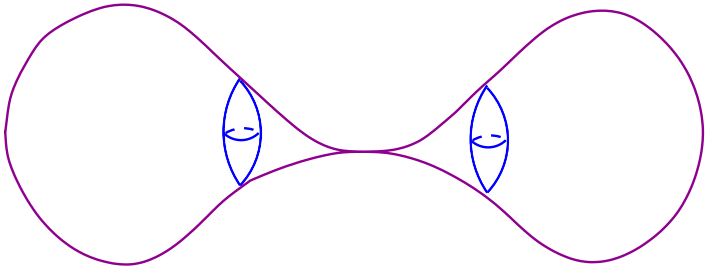
- Descomposición canònica: suma conexa de Knesser (1929) i tors de Jaco-Shalen i Johannson (1979).
- Varietat geomètrica: mètrica localment homogènia.
- A princips dels 1980, Hamilton l'havia demostrada quan $(R_{ij}) \geq 0$. i desenvolupà un programa per demostrar-la en general.
- Heurística del programa de Hamilton:
  Com que l'equació del flux de Ricci és de difussió-reacció,
  "O bé $g(t)$ convergeix a una mètrica loc. homogènia o bé crea singularitats corresponent a la descomposició canònica".

- Exemple S^3 amb un “coll":

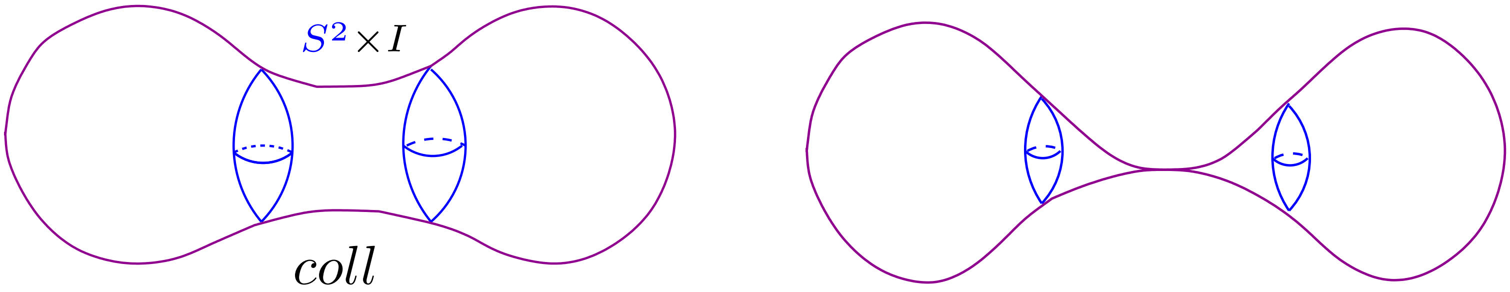


- Exemple S^3 amb un “coll":





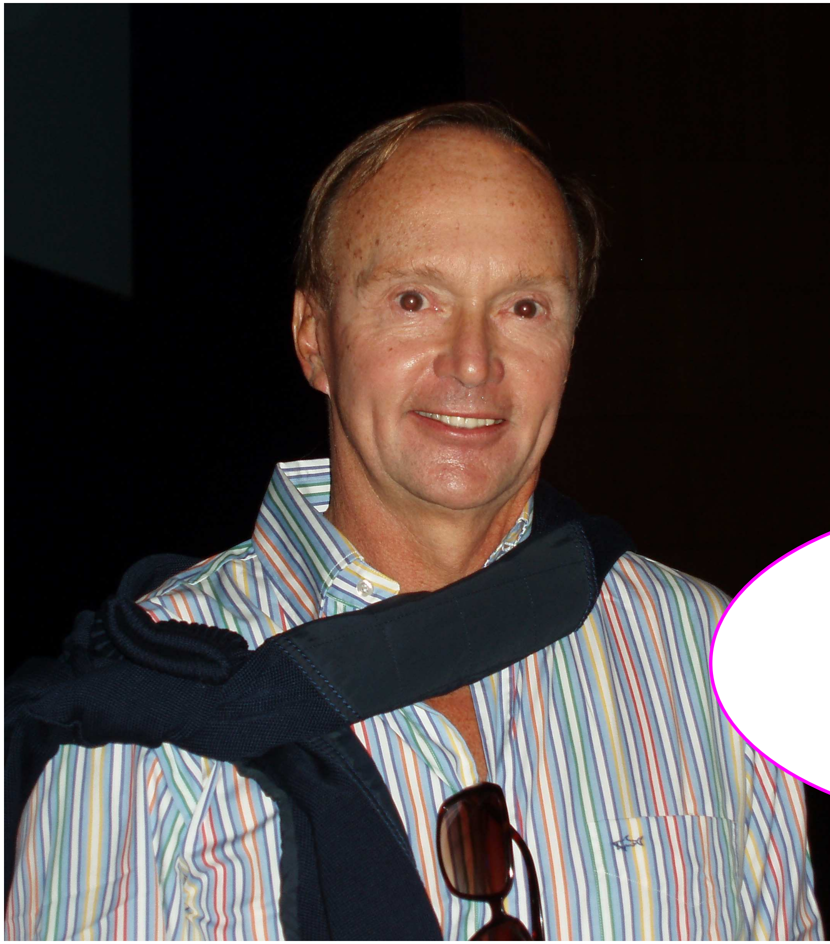
- Exemple S^3 amb un “coll":



- Aquesta singularitat hauria de correspondre a una suma connexa.
- Hamilton (ningú) no sabia controlar el radi d’injectivitat.
- Perelman 2002: introdueix noves idees i el controla.
  Completa el programa el 2003, que ara ja està acceptat.

Hamilton i Perelmann (TOTALMENT APÒCRIF)

Hamilton i Perelmann (TOTALMENT APÒCRIF)

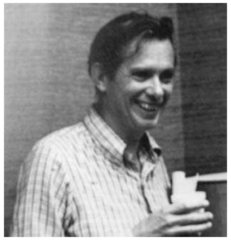
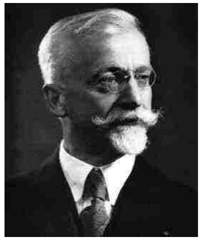


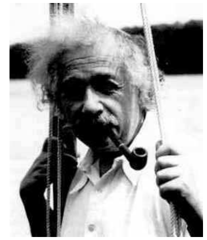
Hamilton i Perelmann (*TOTALMENT APÒCRIF*)

Hamilton i Perelmann (TOTALMENT APÒCRIF)

Hamilton i Perelmann (TOTALMENT APÒCRIF)

Crèdits

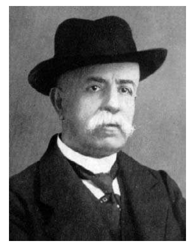












Gràcies a l'Eva Miranda

per la col·laboració amb els còmics!