Riemann
i
la Física

Emili Elizalde

Professor d'Investigació i PI
Consell Superior d'Investigacions Científiques (ICE/CSIC)
Institut d'Estudis Espacials de Catalunya (IEEC)

Jornada Riemann, FME-UPC, 20 de Febrer, 2008

- Sembla prou clar que Bernhard Riemann va tenir un considerable interès per la Física
- Ja com a estudiant, a Göttingen, va treballar amb Weber en qüestions d'electromagn (1849)
- Com el mateix Riemann, Weber fou estudiant de Gauss; elaborà una teoria e.m.
- El propi Gauss és famós pels treballs en e.m.
- >De 15 treballs de Riemann (4 pub. pòstumes), sis d'ells (2, 3, 8, 9, 10, 14) tracten qüestions de física [relativament poc coneguts!]
- >Influència que l'obra matemàtica de Riemann ha tingut en la física del segle XX [extraordin.]

Treballs de Riemann sobre problemes de la Física

"Über die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderabeln Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet Werden"

Bernhard Riemann

Amtlicher Bericht über die 31. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Göttingen, im September 1854

"Sobre les lleis de distribució de la tensió elèctrica en cosos ponderables, quan aquests no poden considerar-se com a conductors o aïllants perfectes, sino com a repelents parcials de la tensió elèctrica"

Bernhard Riemann

Informe presentat a les sessions oficials de la 31ena Reunió de Científics i Metges a Göttingen, Setembre de 1854

- Considera ampolles de Leyden, on es conserva una càrrega d'electricitat, estudiant en particular com una vegada s'ha buidat l'ampolla encara hi queda una càrrega romanent que desapareix amb el temps (i la llei corresp.)
- Tracta, en especial, el cas de cossos que no són ni perfectament conductors ni perfectament aïllants
- Elabora sobre treballs d'Ohm, Weber, Kirchhoff i Kohlrausch
- Punt important n'és el contacte amb els resultats experimentals 6p, EDPs

"Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe"

Bernhard Riemann

Annalen der Physik und Chemie, Bd. 95, 1855

"Sobre la teoria dels anell de colors d'elements nobles"

Bernhard Riemann

Annals de Física i Química, vol. 95, 1855

- Estudi experimental de la propagació i distribució del corrent el. en un conductor
- Els anells es generen recobrint una placa de platí, plata daurada o altres elements nobles, amb una solució d’òxid de plom, sotmetent-la al corrent d’una bateria: es formen així anells de colors de Newton
- Elabora sobre resultats previs de Becquerel, Du-Bois-Reymond i Beetz, millorant-ne els càlculs i discutint-ne hipòtesis prèvies 8p, EDPs

"Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite"

Bernhard Riemann

Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1860

"Sobre la propagació d'ones d'aire planes d'amplitut d'oscil.lació finita"

Bernhard Riemann

Volum vuitè de les sessions de la Reial Acadèmia de Ciències de Göttingen, 1860

- Integra les equacions diferencials per al moviment dels gasos, sota diverses condicions de pressió i de temperatura
- Va més enllà de treballs previs en l’ordre obtingut (Helmholtz arribava fins al segon ordre)
- Treballa resultats previs de Helmholtz, Regnault, Joule i Thomson, millorant-ne els càlculs, discutint-los i generalitzant les hipòtesis d’aquests autors

22p, EDPs

“Anzeige: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite”

Bernhard Riemann

Göttinger Nachrichten, 1859, Nr. 19

“Anunci: Sobre la propagació d'ones d'aire planes d'amplitut d'oscil.lació finita”

Bernhard Riemann

Notícies de Göttingen, 1859, Núm. 19

- Contribució a la teoria de les EDPs no lineals
- Equacions d’utilitat en Física
- Només fa servir, de la Física, la llei de comportament de la pressió del gas com a funció de la densitat, en absència d’inter-canvis de calor
- Treballa sobre resultats anteriors de Challis, Airy, Stokes, Petzval, Doppler i von Ettinghausen 3p, EDPs

"Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides"

Bernhard Riemann

Aus dem neunten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1861

"Una contribució a les investigacions del moviment d'un el·lipsoide líquid uniforme"

Bernhard Riemann

En el volum novè de les sessions de la Reial Acadèmia de Ciències de Göttingen, 1861

- Els seus elements s’atrauen sota la influència de la gravetat
- Sobre la forma dels cossos celests
- Com canvia l’eix principal de l'el·lipsoide i els moviments relatius dels components
- Com abans, el treball és purament matemàtic, partint tan sols de pressupostos inicials físics
- Estén resultats anteriors de Dirichlet i de Dedekind 32p, EDPs

"Ein Beitrag zur Elektrodynamik"

Bernhard Riemann

Annalen der Physik und Chemie, Bd. 131, 1867 [1858]

"Una contribució a l'Electrodinàmica"

Bernhard Riemann

Annals de Física i Química, vol. 131, 1867

- Una observació sobre com la teoria de la electricitat i del magnetisme guarda una estreta relació amb la de la llum i la radiació de la calor
- Teoria matemàtica completa. Acció que no diferencia gravit., electr., magn., temp.
- Finitud de la velocitat de propagació de la interacció (velocitat de la llum)
- Introdueix els resultats dels experiments i treballs de Weber i Kohlrausch, Busch, Bradley i Fizeau 6p, EDPs

Algunes consideracions

H. Weber & B. Riemann, *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen*, 6. unveranderte Aufl., 2 vols (Vieweg, Braunschweig, 1919)

- *"…una teoria matemàtica autoconsistent i que ens porti de les lleis elementals fins a l'acció en un espai donat, sense fer cap diferència entre gravetat, electricitat, magnetisme, ni equilibri de temperatura"*

M. Monastyrsky, *Riemann, Topology, and Physics*, 2nd ed. (Springer, NY, 1999)

- Hilbert opina que *la invariancia de la integral d'acció unifica e.m. amb gravetat*, donant solució al problema que, reconeix, ja va plantejar Riemann: *la connexió entre gravitació i llum*

C. Reid, *Hilbert* (Springer, Berlin, 1970) [Copernicus, NY, 1996]

D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics* (Birkhäuser, Boston, 1999)

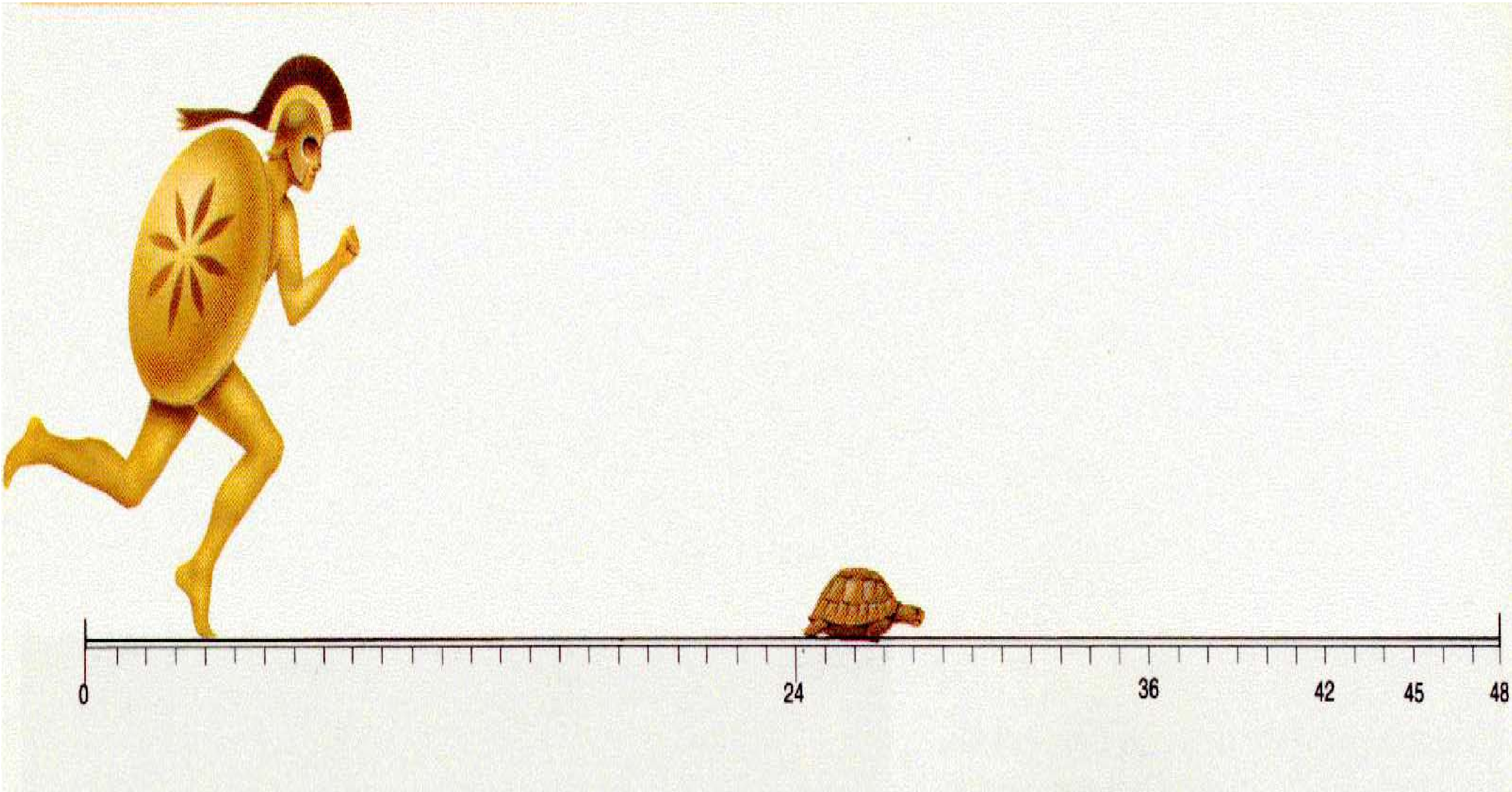
S'oblida dels treballs sobre física !

Influència (extraordinària) dels treballs purament matemàtics de Riemann en la Física

Riemann Matemàtica → Física

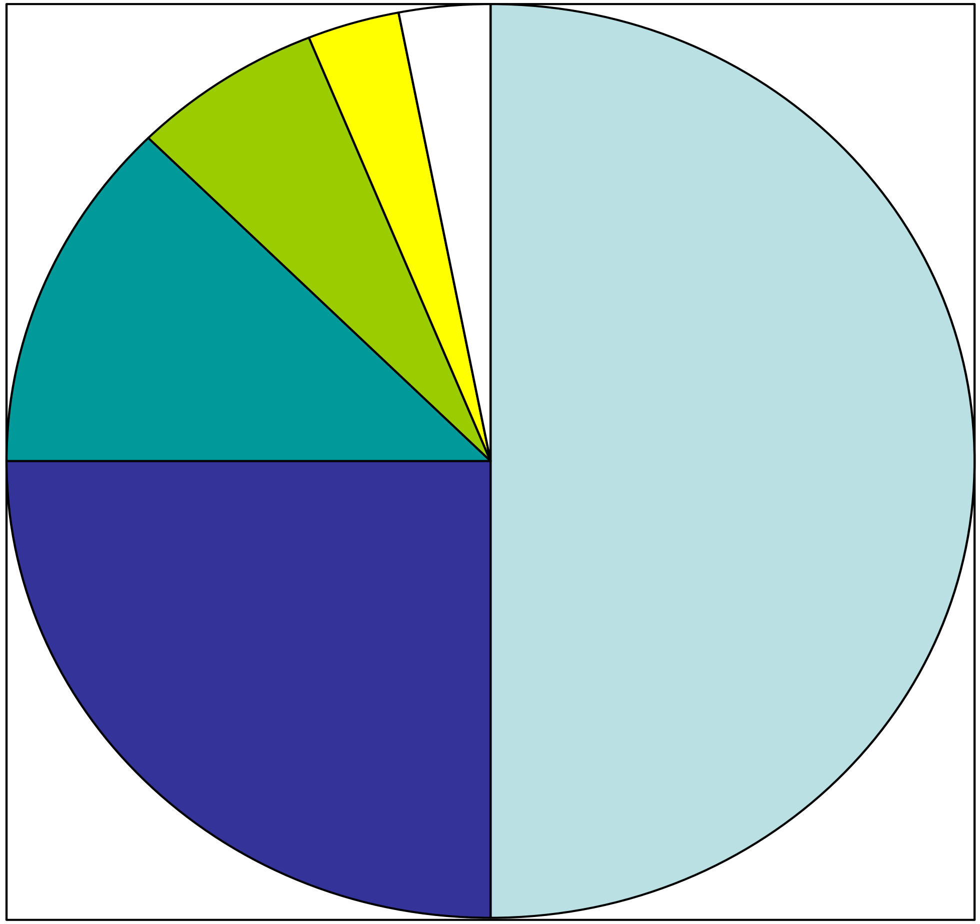
- AL, dimensió → Física quàntica i clàssica
- Integral de Riemann → Física gen.
- Variable complexa, GD → Física gen.
  - Equacions de Cauchy-Riemann
  - Superfície, esfera, varietat de Riemann
  - Prolongació analítica, sèries ←
- Tensor de curvatura → RG,gravitació,cosmol.←
- ζ de Riemann → TQC, grav. quànt., T. cordes
  - Sistemes dinàmics
  - Caos, clàssic i quàntic
  - Regularització, TQC en espais corbs ←

From Zeno's Paradox...



...to the Quantum Zeno Effect

Cosmological?



$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1$$

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = x$$

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 2x$$

$$1 + x = 2x$$

$$X = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = y$$

$$1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = y$$

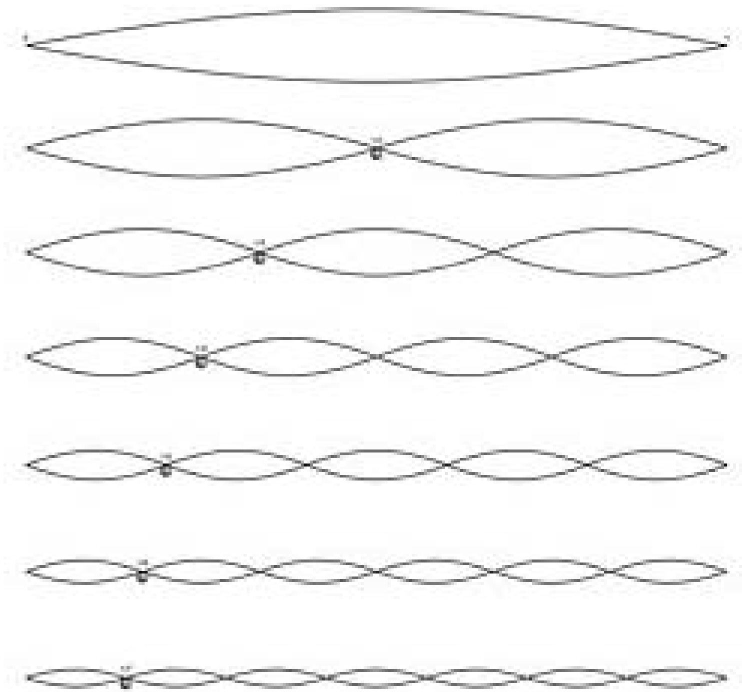
$$1 - y = y$$

$$1 = 2y$$

$$y = 1/2$$

Sèrie harmònica:

$$1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/N \sim \ln N$$



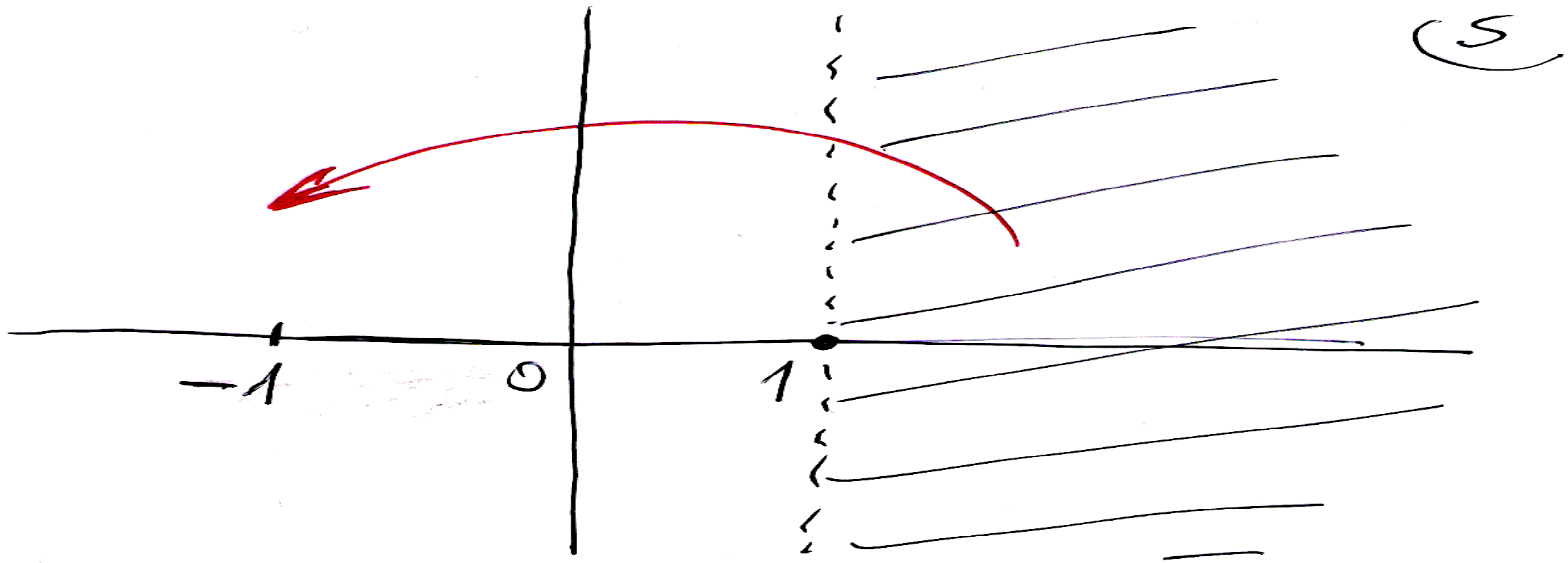
Com les fluctuacions del buit quàntic ! (principi d'incertesa de Heisenberg)

Alternada:

$$1-1/2+1/3-1/4+1/5-\ldots = \ln 2$$

Funció ζ de Riemann:

$$\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \ldots$$



$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad 1 + 1 + 1 + \cdots \overset{?}{=} -\frac{1}{2}$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \quad \text{or} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots \overset{?}{=} -\frac{1}{12}$$

$$\vdots$$

Sunyaev, Kontsevich, Witten share Crafoord prize

17-1-2008

The Crafoord Prize, first awarded in 1982, was instituted by Anna-Greta and Holger Crafoord and honors fields that are not covered by the Nobels, including astronomy, mathematics, geosciences, and biosciences. The Royal Swedish Academy of Sciences administers the award and presents it to a different field each year

Witten says he was "totally startled" to find that his achievements in mathematics had won attention, rather than his physics

Kontsevich went on to show that such techniques inspired by physics function more widely in mathematics and give correct results

Sunyaev won recognition for two contr:
1) How matter falling into a black hole coalesces into thin disc, emits radiation
2) Clues in the structure of the cosmic microwave background (CMB) radiation

Sunyaev-Zel'dovich effect: 1) thermal effects, CMB photons interact with electrons with high energies due to their temperature; 2) kinematic effects, second-order effect, CMB photons interact with electrons with high energies due to their bulk motion (Ostriker-Vishniac effect); 3) polarization

Zero point energy

QFT vacuum to vacuum transition: $\langle 0 | H | 0 \rangle$

Spectrum, normal ordering:

$$H = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda_n \, a_n \, a_n^\dagger$$

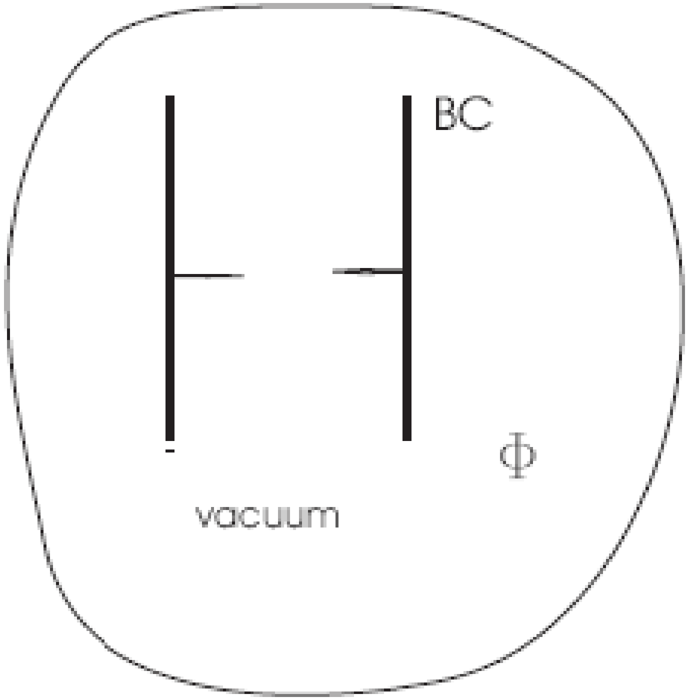
$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{(\hbar c)}{2} \sum_n \lambda_n = \frac{1}{2} \, \mathrm{tr} \, H$$

gives ∞ physical meaning?

Regularization + Renormalization (cut-off, dim, ζ)

Even then: Has the final value any meaning??

The Casimir Effect



Casimir Effect

BC e.g. periodic

$\Longrightarrow$ all kind of fields

$\Longrightarrow$ curvature or topology

Universal process:

- Sonoluminiscence (Schwinger)
- Cond. matter (wetting ^{3}He alc.)
- Optical cavities
- Direct experim. confirmation

Van der Waals, Lipschitz theory

- Dynamical CE
- Lateral CE
- Extract energy from vacuum
- CE and the cosmological constant

Existence of ζ_A for A a ΨDO

1. A a positive-definite elliptic ΨDO of positive order $m \in \mathbb{R}^+$
2. A acts on the space of smooth sections of
3. E, n-dim vector bundle over
4. M closed n-dim manifold

(a) The zeta function is defined as:

$$\zeta_A(s) = \mathrm{tr}\, A^{-s} = \sum_j \lambda_j^{-s}, \qquad \mathrm{Re}\, s > \frac{n}{m} := s_0$$

$\{\lambda_j\}$ ordered spect of A, $s_0 = \dim M/\mathrm{ord}\, A$ abscissa of converg of $\zeta_A(s)$

(b) $\zeta_A(s)$ has a meromorphic continuation to the whole complex plane $\mathbb{C}$ (regular at $s = 0$), provided the principal symbol of A, $a_m(x, \xi)$, admits a spectral cut: $L_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}; \mathrm{Arg}\, \lambda = \theta, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$, $\mathrm{Spec}\, A \cap L_\theta = \emptyset$ (the Agmon-Nirenberg condition)

(c) The definition of $\zeta_A(s)$ depends on the position of the cut L_θ

(d) The only possible singularities of $\zeta_A(s)$ are poles at

$$s_j = (n - j)/m, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots$$

Extended CS Formulas (ECS)

- Consider the zeta function (Re $s > p/2$, $A > 0$, Re $q > 0$)

$$\zeta_{A,\vec{c},q}(s) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^p}{}' \left[\frac{1}{2}(\vec{n}+\vec{c})^T A (\vec{n}+\vec{c}) + q\right]^{-s} = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^p}{}' \left[Q(\vec{n}+\vec{c})+q\right]^{-s}$$

prime: point $\vec{n} = \vec{0}$ to be excluded from the sum

(inescapable condition when $c_1 = \cdots = c_p = q = 0$)

$$Q(\vec{n}+\vec{c}) + q = Q(\vec{n}) + L(\vec{n}) + \bar{q}$$

- Case $q \neq 0$ (Re $q > 0$)

$$\zeta_{A,\vec{c},q}(s) = \frac{(2\pi)^{p/2} q^{p/2-s}}{\sqrt{\det A}} \frac{\Gamma(s-p/2)}{\Gamma(s)} + \frac{2^{s/2+p/4+2}\pi^s q^{-s/2+p/4}}{\sqrt{\det A}\,\Gamma(s)}$$
$$\times \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^p_{1/2}}{}' \cos(2\pi\vec{m}\cdot\vec{c}) \left(\vec{m}^T A^{-1}\vec{m}\right)^{s/2-p/4} K_{p/2-s}\left(2\pi\sqrt{2q\,\vec{m}^T A^{-1}\vec{m}}\right)$$

[ECS1]

- Pole: $s = p/2$ Residue:

$$\text{Res}_{s=p/2}\,\zeta_{A,\vec{c},q}(s) = \frac{(2\pi)^{p/2}}{\Gamma(p/2)} (\det A)^{-1/2}$$

The Chowla-Selberg Expansion Formula: Basic

- Jacobi's identity for the $\theta-$function

$$\theta_3(z,\tau) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz), \qquad q := e^{i\pi\tau},\ \tau \in \mathbb{C}$$

$$\theta_3(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\, e^{z^2/i\pi\tau}\, \theta_3\left(\frac{z}{\tau}\Big|\frac{-1}{\tau}\right)$$

equivalently:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+z)^2 t} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}} \cos(2\pi n z), \qquad z, t \in \mathbb{C},\ \text{Re}\, t > 0$$

- Higher dimensions: Poisson summ formula (Riemann)

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^p} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^p} \tilde{f}(\vec{m})$$

$\tilde{f}$ Fourier transform

[Gelbart + Miller, BAMS '03, Iwaniec, Morgan, ICM '06]

- Truncated sums $\longrightarrow$ asymptotic series

La concepció de l'espai

- Presocràtics: *substància, nombre, potència, infinit, moviment, ésser, àtom, espai, temps, ...*
- Escola Pitagòrica: *"totes les coses són nombres"*
- Euclides: *"Elements"*
- Isaac Newton: *"l'espai, per sí mateix, és una entitat absoluta munida d'una estructura geomètrica euclidiana"*
- Immanuel Kant: *"que l'espai sigui euclidià és un fet de la pròpia natura"*
- Bernhard Riemann: *"molts espais són possibles; és la matèria física la que determina l'estructura geomètrica de l'espai"*
- Albert Einstein: *"la matèria corba l'espai-temps" (tensor de curvatura de Riemann)*
- Eugene Wigner: *"la irraonable efectivitat de la matemàtica en totes les ciències de la natura"*

La Física

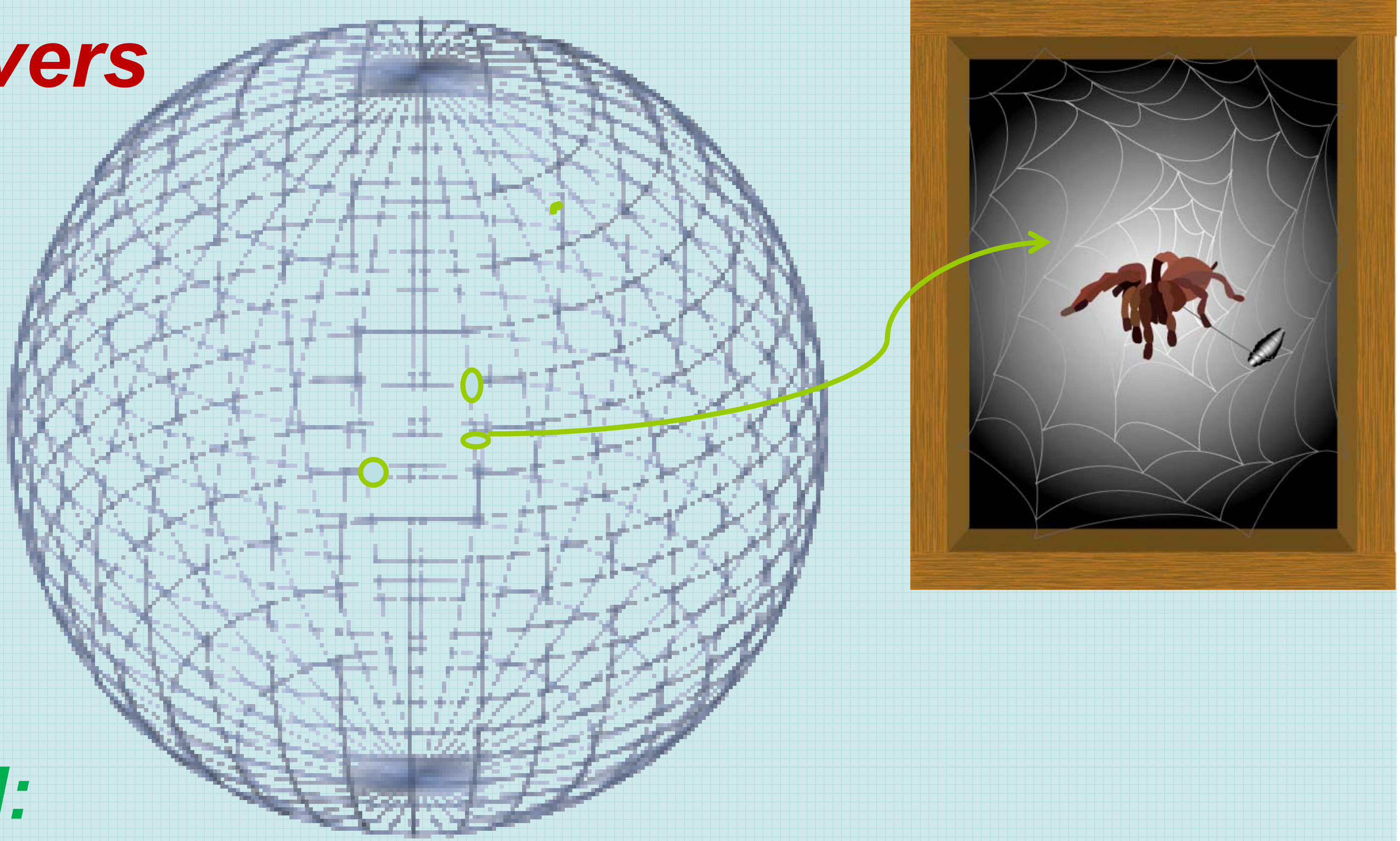
- Isaac Newton
- Albert Einstein

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$E = mc^2$$

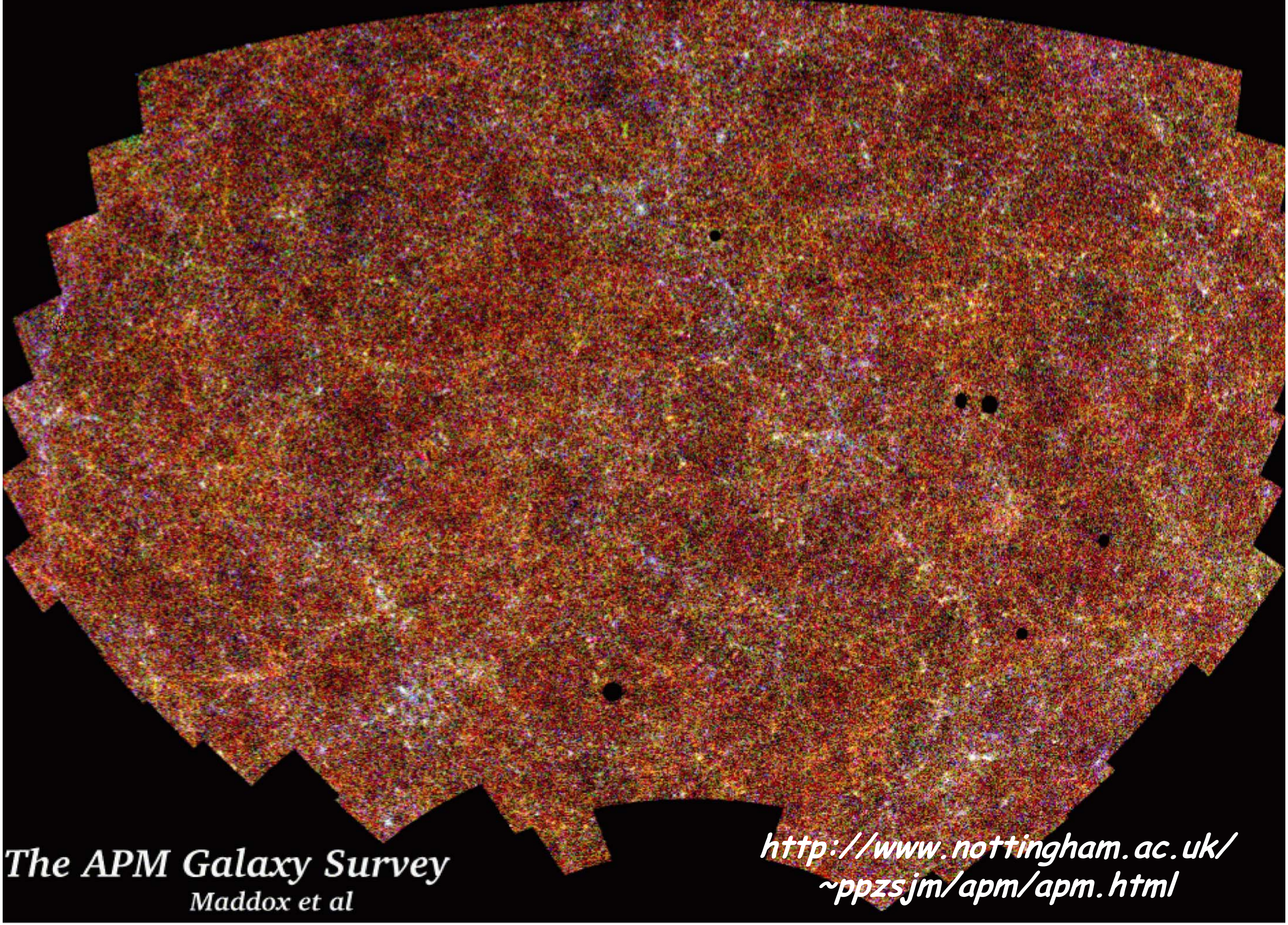
$$\Omega_{tot} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda$$

L'Univers

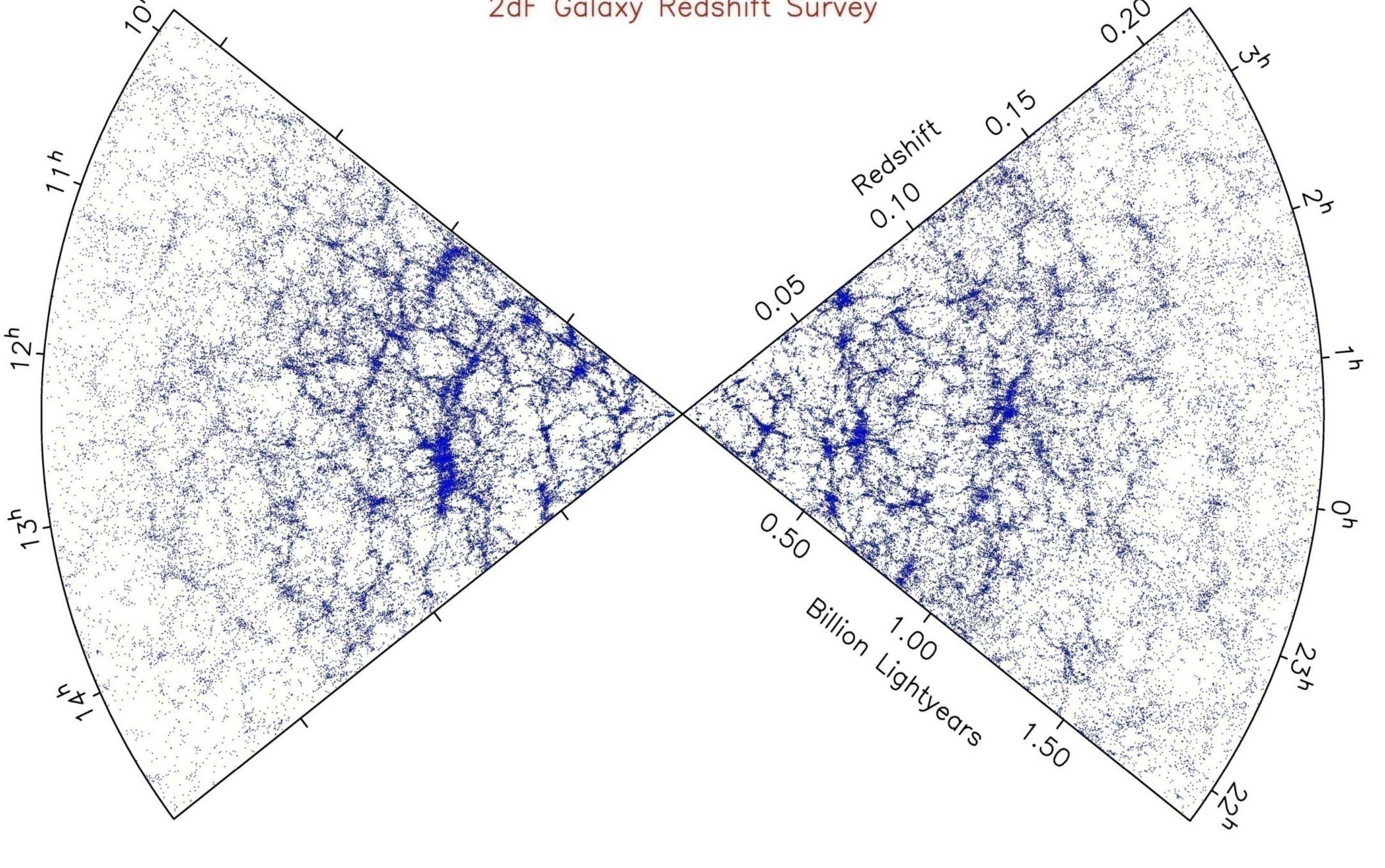


Model:

- *Superfície (2 dimensions, globus goma)*
- *Res a dins, res per fora; no hi ha un 'centre'*
- *El 'globus' s'expandeix …acceleradament!*
- *El radi del globus és el temps*
- *Tot objecte al voltant nostre s'allunya (redshift)*

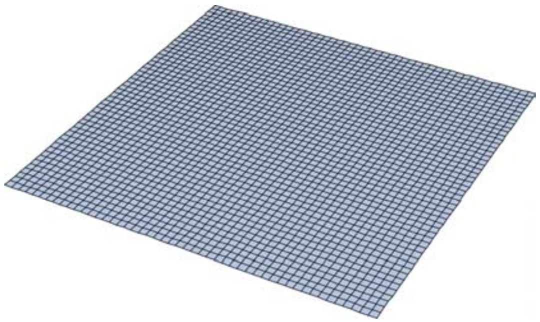

The APM Galaxy Survey
Maddox et al
http://www.nottingham.ac.uk/
~ppzsjm/apm/apm.html

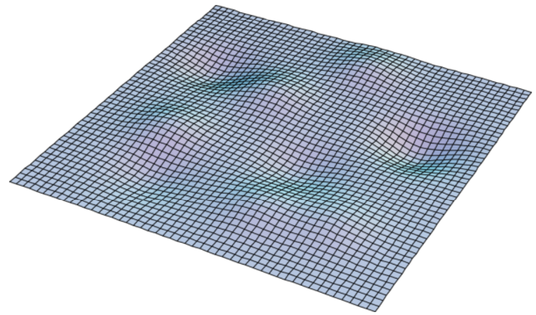
2dF Galaxy Redshift Survey



Curved-Spacetime Physics

1. Space-time, the set of all events, is a 4D manifold with a metric (M,g).
2. The metric is measurable by rods and clocks.
3. The metric of space-time can be put in the Lorentz form momentarily at any particular event by an appropriate choice of coordinates.
4. Freely-falling particles, unaffected by other forces, move on time-like geodesics of the space-time.
5. Any physical law that can be expressed in tensor notation in SR has exactly the same form in a locally-inertial frame of a curved space-time.





Curvatura i Matèria

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

convencions
Wald 1984

mètrica: -+++

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}$$

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\sigma\rho}{}^{\sigma}, \qquad R = R^{\mu}_{\mu}$$

Exemples

$$ds^2 = \frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

$$\rightarrow \; R = 3k$$

$$ds^2 = (\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{L^2 - x\cdot x}) dx^\mu dx^\nu$$

$$\rightarrow \; R = 3/L^2$$

Cosmologia: Einstein

Imbalance Gravitation:

How to ensure that stars and nebulae reach equilibrium?

~ Newton's objection to an infinite universe

$$\nabla^2\phi - \lambda\phi = 4\pi G\rho$$

λ: a screening length

$$\vdots$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

"...the newly introduced universal constant Λ defines both the mean density of distribution ρ which can remain in equilibrium and also the radius ... of the spherical space."

$$\Lambda = 1/L^2, \;\; \rho = \Lambda/4\pi G$$

Cosmologia: de Sitter

"On Einstein's Theory of Gravitation and Astronomical Consequences"

de Sitter (1917) [see Cosmological Constants, eds. Bernstein & Feinberg]

Copernican Principle gives way to Cosmological Principle
Mach's influence on relativity and inertia
Observation and experiment

Universe contains no matter: stars and nebulae as test particles

Confound Machians: relativity of inertia without "distant stars"

$$ds^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}\Lambda r^2}\left(-dt^2 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}\Lambda r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

$A,\ B \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ meet Einstein's requirements

Idealized spacetime of the cosmological constant

Principi d'Acció

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,[\mathcal{L}_G + \underline{\mathcal{L}_m} - \Lambda/8\pi G]$$

$$\delta S_m = \int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m\right)\delta g^{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Einstein's cosmological term seems inevitable!

Ya.B. Zel'dovich: "The genie has been let out of the bottle"

Our universe seems to be spatially flat and to possess a nonvanishing cosmological constant

Cosmological constant:

- for cosmologists and general relativists:
  a great mistake
  why was it put there, in the first place? (Einstein)
- for elementary particle physicists:
  a great embarrassment
  no way to get rid off (Coleman, Weinberg, Polchinski)
- cc indeed a peculiar quantity
  - has to do with cosmology
    Einstein's eqs., FRW universe
  - has to do with local structure of elementary particle physics
    stress-energy density μ of the vacuum

$$L_{cc} = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\mu^4 = \frac{1}{8\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\boxed{\Lambda}$$

In other words: two contributions on the same footing

$$\frac{\Lambda\ c^2}{8\pi G} \;+\; \frac{1}{\text{Vol}}\,\frac{\hbar\,c}{2}\sum_i \omega_i$$

FROM GENERAL RELATIVITY TO COSMOLOGY

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

Schwarzschild solution (1916)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (1935-36) solution
(A. Friedmann 1922)

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

Friedmann equation in Cosmology:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H_0^2 \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{NR} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_V + (1 - \Omega) \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right]$$

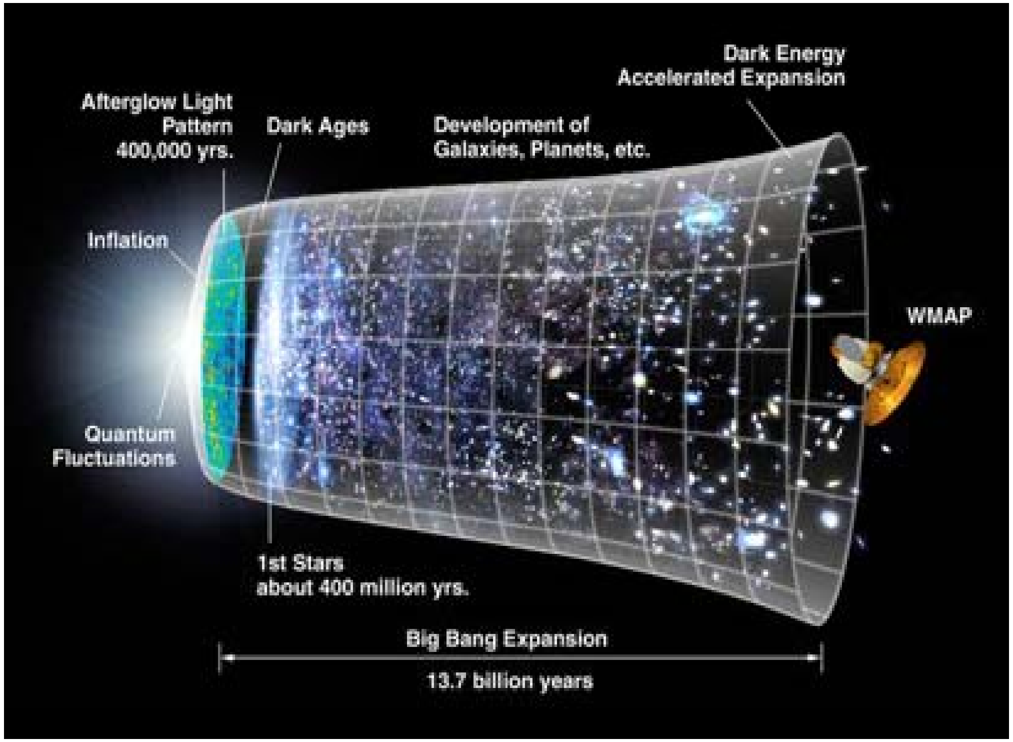
Ω_R relativistic matter ($p_R = \frac{1}{3}\rho_R$; $\rho_R \propto a^{-4}$)

Ω_{NR} nonrelativistic matter ($p_{NR} = 0$; $\rho_{NR} \propto a^{-3}$)

Ω_V cosmological constant ($p_V = -\rho_V$; $\rho_V = \mathrm{const}$)

$\Omega = \Omega_R + \Omega_{NR} + \Omega_V$ total energy density (cosm. triangle)

Cosmic acceleration



NASA / WMAP

$\Rightarrow$ **Cosmological constant**

ΛCDM model

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Agrees with observations

$$\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$$

We are living in an accelerating universe!

A.G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998)
S. Perlmutter et al., Astrophys. J. 517, 565 (1999)

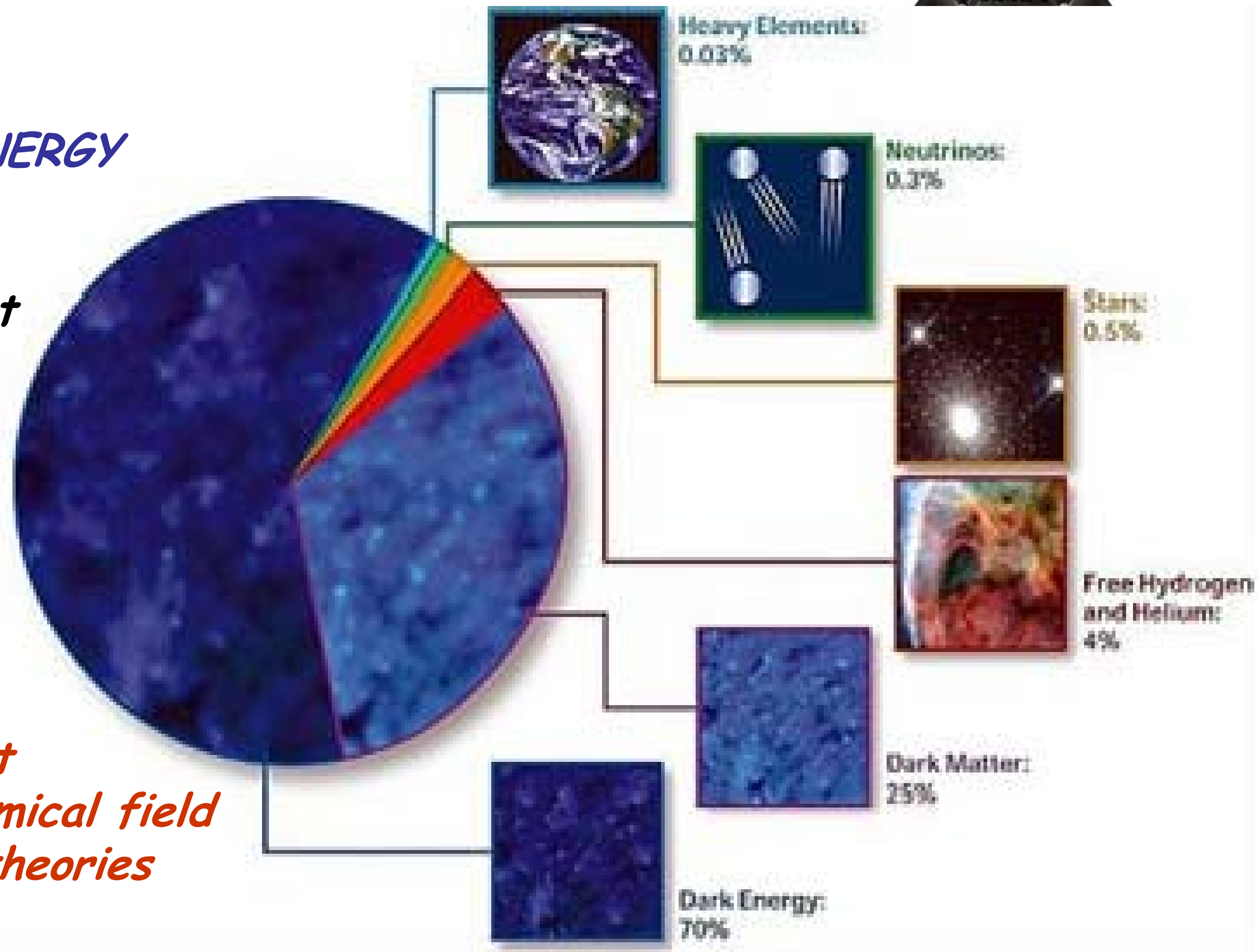
Dark energy

Hypothetical form of energy with strong negative pressure

Dark Force = -▼ Dark Energy

NATURE OF DARK ENERGY

- *homogeneous*
- *not very dense*
- *not known to interact non-gravitationally*



EXPLANATIONS

- *Cosmological constant*
- *Quintessence – dynamical field*
- *Alternative gravity theories*

f(R) gravity

- *Lagrangian – function of curvature scalar R*
- *R^{-1} or other negative powers of R → current acceleration*
- *Positive powers of R → inflation*

$$S_J = -\frac{1}{2\kappa c}\int d^4x\left[\sqrt{-\tilde{g}}\,f(\tilde{R})\right] + S_m(\tilde{g}_{\mu\nu},\psi)$$

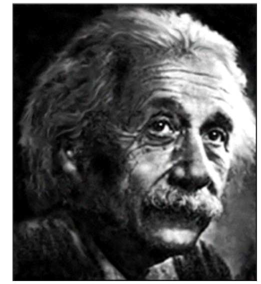
Minimal coupling in Jordan (original) frame (JF) vs. Einstein frame

- *Fully covariant theory based on the principle of least action*
- *f(R) usually polynomial fraction in R*
- *Variable gravitational coupling and cosmological term*
- *Solar system, cosmological, and other constraints*

  ⇒ polynomial coefficients quite constrained

Hu & Sawicki; Starobinski; Cappozziello et al.;
Our group: Brevik, Cognola, EE, Nojiri, Odintsov, Wang, Zerbini, Briscese, …

Einstein frame



Conformal transformation of metric: $g_{\mu\nu} = f'(\tilde{R})\tilde{g}_{\mu\nu}$

$$S_E = -\frac{1}{2\kappa c}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R - 2V(\phi)\right] + S_m\left(\left[f'(\phi)\right]^{-1} g_{\mu\nu}, \psi\right)$$

Effective potential $V(\phi) = \dfrac{\phi f'(\phi) - f(\phi)}{2[f'(\phi)]^2}$

Non-minimal coupling in Einstein frame (EF)

- *If minimal coupling in Einstein frame $\Rightarrow$ GR with cosmological constant*
- *Both JF and EF are equivalent in vacuum*
- *Coupling matter–gravity different in conformally related frames*
- *Principle of equivalence violated in EF $\rightarrow$ constraints on f(R) gravity*
- *Experiments should verify which frame (JF or EF) is physical*

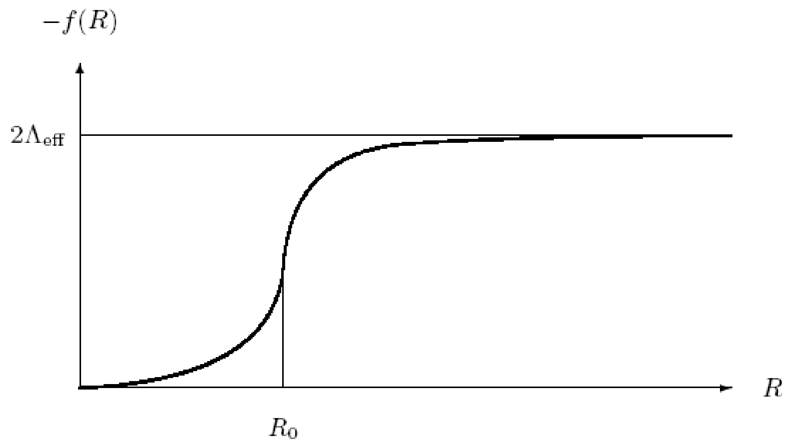
G. Magnano, L.M. Sokołowski, Phys. Rev. D50, 5039 (1994)

R - p(R)/q(R) gravity

$$R - \frac{p(R)}{q(R)} \sim \begin{cases} R - \dfrac{\alpha^2}{R}, & R \to \infty \\ R + \beta R^2 + \cdots, & R \to 0 \end{cases} \qquad \alpha \approx 10^{-52} m^{-2}$$

Simple f(R) giving cosmic acceleration & compatible with constr's

Deceleration-to-acceleration transition, de Sitter transitions



Unification of inflation and current cosmic acceleration

2 de Sitter phases *Phantom DE*

* G. Cognola, EE, …, S. Zerbini., arXiv:0712.4141, Phys. Rev. D to appear
* EE, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Phys. Rev. D70, 043539 (2004)
* EE, S. Nojiri, S.D. Odintsov, P. Wang, Phys. Rev. D71, 103504 (2005)

Zitat d'una carta d'Albert Einstein a Arnold Sommerfeld, de l'any 1912 (això és, uns 60 anys després del famós treball d'Habilitació de Riemann), on li comenta els esforços que està fent per aprendre Geometria Riemanniana:

"Aber eines ist sicher, dass ich mich im Leben noch nicht annähend so geplagt habe und dass ich große Hochachtung vor der Mathematik eingeflößt bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus gehalten habe!"

"Però una cosa és segura, que mai en la meva vida no m'havia afanyat ni de bon troç com ara, i que mai no havia tingut tan alta consideració per la Matemàtica, a la qual considerava fins fa poc, en la meva ingenuitat, pel que fa a les seves parts més subtils, com un simple luxe!"

Moltes gràcies per la vostra atenció