Une note de Poincaré

Alain Chenciner

Résumé

Le 30 novembre 1896, Poincaré publie dans les "Comptes rendus de l'Académie des Sciences" une note intitulée "Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action". Il se propose de trouver des solutions périodiques du problème des trois corps dans le plan en minimisant l'action lagrangienne parmi les lacets de configurations vérifiant certaines contraintes qui reviennent à fixer leur classe d'homologie. Le "problème des collisions" l'empêchant de réaliser son projet pour le potentiel newtonien proportionnel à l'inverse de la distance, il remplace ce dernier par un potentiel de "force forte" proportionnel à l'inverse du carré de la distance.

Dans l'exposé, on explique la nature des difficultés auxquelles s'est heurté Poincaré et on montre comment, un siècle plus tard, elles ont été en parties résolues pour le potentiel newtonien, conduisant à la découverte de nouvelles familles remarquables de solutions périodiques du problème des n corps dans le plan ou dans l'espace.

Le problème des trois corps : un thème cher à Poincaré.

En 1883, Poincaré publie sa première note consacrée au problème des trois corps, intitulée *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps.* Il y applique une généralisation, due à Kronecker, du théorème des valeurs intermédiaires pour prouver l'existence des trois *sortes* de solutions périodiques relatives* du problème planétaire des trois corps. Les résultats se succèderont alors pour aboutir aux trois tomes des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (1892, 1893, 1899). Développant le mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique* qui remporte en 1889 le prix du roi de Suède**, Poincaré fonde dans cet ouvrage hors du com-

* i.e. modulo rotation ou, ce qui revient au même, dans un repère tournant.

** Voir à ce sujet le livre de June Barrow-Greene "Poincaré and the Three Body Problem", American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1997.

mun de grands pans de la théorie des systèmes dynamiques (existence et stabilité des solutions périodiques, invariants intégraux, théorème de récurrence, solutions homoclines, ...). Bien que faisant appel à certaines méthodes globales, ces travaux sont essentiellement consacrés à la théorie perturbative, planétaire ou lunaire, dans laquelle l'une des masses domine considérablement les deux autres, ou même au "Problème restreint" dans lequel une des masses est supposée nulle. La recherche de solutions périodiques y tient une place importante : dès 1884, dans la conclusion d'un article au *Bulletin astronomique* intitulé *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* qui détaille la note aux *C.R.A.S.* de l'année précédente, il explique l'utilité des solutions périodiques par leur rôle d'"orbites intermédiaires" dont une solution restera proche assez longtemps si elle correspond à des données initiales assez voisines. L'affirmation est précisée en 1892 dans le tome I des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, sous la forme de la célèbre conclusion du paragraphe 36 :

> *"Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.*
> *Étant données des équations de la forme définie dans le n^{o}13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite que l'on veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable."*

Le principe de moindre action : un grand principe de la physique.

> *"Que nous enseigne maintenant le principe de moindre action ? Il nous enseigne que pour passer de la situation initiale qu'il occupe à l'instant t_0 à la situation finale qu'il occupe à l'instant t_1, le système doit prendre un chemin tel que, dans l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux instants t_0 et t_1 la valeur moyenne de l'"action" (c'est-à-dire de la différence entre les deux énergies T et U) soit aussi petite que possible. Le premier des deux principes [la conservation de l'énergie] est d'ailleurs une conséquence du second. Si l'on connaît les deux fonctions T et U, ce principe suffit pour déterminer les équations du mouvement."*
> (La science et l'hypothèse, chapitre XII, 1902.)

Comme vient de l'énoncer Poincaré, chaque solution du problème des trois corps $x(t) = \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)\big)$, $t \in [t_0, t_1]$, et plus généralement chaque solution d'un problème de mécanique conservative, est un extremum de l'action lagrangienne $\int L(x(t), \dot{x}(t))dt$, dans laquelle l'intégrand (le *Lagrangien*) est la différence $L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$ entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. *Extremum* et non minimum comme le rappelle cette phrase savoureuse des *Méthodes nouvelles* :

> *"Jusqu'ici, quand j'ai dit, telle intégrale est minimum, je me suis servi d'une façon de parler abrégée, mais incorrecte, qui ne pouvait d'ailleurs tromper personne ; je voulais dire, la variation première de cette intégrale est nulle ; cette condition est nécessaire pour qu'il y ait minimum, mais elle n'est pas suffisante."* (Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tome III, chapitre XXIX, n^o 341, 1899.)

Ce principe que, dans *La valeur de la science*, Poincaré place à côté des grands principes de conservation (énergie, masse, action-réaction), du principe de dégradation de l'énergie et du principe de relativité, est de nature globale, donc plus proche, au premier abord, de la théologie que de la physique. Je ne résiste pas, à ce propos, au plaisir de citer quelques phrases du chapitre VIII de *La science et l'hypothèse* qui montrent à quel point Poincaré était autant physicien que mathématicien :

> *"L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est à dire le chemin le plus court.*
> *Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre. Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes."*

... et en écho l'interrogation de Feynman dans [Fe1] (volume I, Chap. 26, par. 5 : A more precise statement of Fermat's principle) avec cette fois-ci la réponse donnée par l'électrodynamique quantique, qui est le *principe de la phase stationnaire* (voir aussi le superbe *Light and Matter* [Fe2] du même auteur) :

"Instead of saying it is a causal thing, that when we do one thing, something else happens, and so on, it says this : we set up the situation, and light decides which is the shortest time, or the extreme one, and chooses that path. But what does it do, how does it find out ? Does it smell the nearby paths, and check them against each other ? The answer is, yes, it does in a way."

La note aux C.R.A.S. du 30 novembre 1896.

Un peu exotique par rapport au courant principal de recherches de Poincaré sur le problème des trois corps car consacrée à la recherche de solutions globales et non perturbatives, cette note prend le principe de moindre action dans son sens étymologique : on cherche des *minima* et non pas seulement des extrema de l'action parmi les chemins dans l'espace de configuration qui vérifient des contraintes données ! Plus précisément, Poincaré se propose de trouver des solutions périodiques relatives du problème des trois corps dans le plan (avec des masses arbitraires) qui ont la propriété suivante : au bout du temps T (la période) le premier côté du triangle formé par les trois corps aura tourné d'un certain angle total θ, le deuxième d'un angle $\theta + 2k\pi$ et le troisième d'un angle $\theta + 2l\pi$, où k et l sont des entiers relatifs. Il minimise pour cela l'action lagrangienne parmi tous les chemins de configurations de période T fixée qui présentent le comportement voulu. Fixant convenablement k et l, il obtient – *non pas pour la force newtonienne proportionnelle à l'inverse du carré de la distance, mais pour une "force forte" proportionnelle à l'inverse du cube de la distance* – une infinité de solutions dont presque toutes sont nouvelles. Notons que fixer la période T est sans conséquence car l'homogénéité du potentiel implique une symétrie d'échelle : si $x(t) = \big(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)\big)$ est solution du problème des trois corps avec force en $1/r^{\alpha+1}$, il en est de même de $\lambda^\beta x(\lambda t) = \big(\lambda^\beta \vec{r}_1(\lambda t), \lambda^\beta \vec{r}_2(\lambda t), \lambda^\beta \vec{r}_3(\lambda t)\big)$, où $\beta = -2/(\alpha+2)$, quel que soit le nombre réel positif λ. Mais si la période de x est égale à T, celle de x_λ est égale à $\frac{1}{\lambda}T$.

Imposer des contraintes était bien entendu nécessaire : le minimum non contraint est en effet trivialement réalisé "à l'infini" par des corps en repos infiniment éloignés les uns des autres. Fixer k et l non nuls empêche par contre les corps d'être à un instant donné trop loin les uns des autres car ceci obligerait le chemin qu'ils parcourent en une période à être très long, donc la partie cinétique de l'action à être très grande sans que la partie potentielle puisse la compenser. On a rendu le problème de minimisation *coercif.* Un autre avantage d'une telle contrainte est la garantie qu'elle fournit, si

$(k, l) \neq (0, 0)$, que les solutions trouvées seront "non triviales", en particulier qu'elles seront différentes des solutions les mieux connues, car les seules explicites, les solutions *homographiques* (qui curieusement semblent n'avoir jamais intéressé Poincaré).

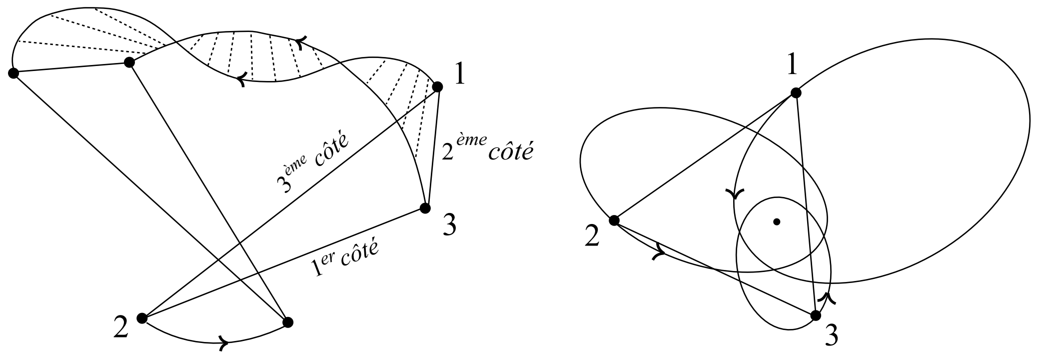

Figure 1 (Un lacet relatif de type Hill : $k = -1, l = 0$
et une solution homographique : $k = l = 0$)

Ce que fait Poincaré revient à noter l'existence de la "forme" d'un triangle, distinction fondamentale entre le problème de trois corps (et plus) et celui des deux corps puisqu'un segment n'a pas de forme mais simplement une taille. Fixer k et l revient en effet à fixer la *classe d'homologie* des lacets que définissent dans l'*espace des triangles orientés* les chemins dans l'espace de configuration parmi lesquels on minimise l'action. J'entends ici par *espace des triangles orientés* l'espace de configuration de trois corps dans le plan "réduit" par les isométries orientées du plan. Cet espace s'obtient à partir de $(\mathbb{R}^2)^3$ privé des trois sous-espaces de dimension 4 de collision (triplets $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ de points distincts du plan) par un premier passage au quotient par les translations, que l'on peut réaliser par exemple par le choix de *coordonnées de Jacobi* ($\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ et $\vec{r}_3 - \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$) suivi d'un quotient du résultat ($\mathbb{R}^4$ privé de trois plans) par l'action diagonale des rotations. On peut réaliser ce dernier après identification de $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$ par l'application de Hopf de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$: $(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$. On obtient $\mathbb{R}^3$ privé de trois demi-droites, dont l'homologie (ou l'homotopie) est la même que celle de la sphère privée de trois points, formée des triangles orientés de "taille fixée". Le premier groupe d'homologie de l'espace des triangles orientés à sommets distincts (i.e. sans collision) est donc isomorphe à celui de la sphère privée de trois points, c'est-à-dire $\mathbb{Z}^2$, chaque composante étant représentée par le nombre algébrique de tours qu'effectuent en une période deux des côtés du triangle par rapport au troisième.

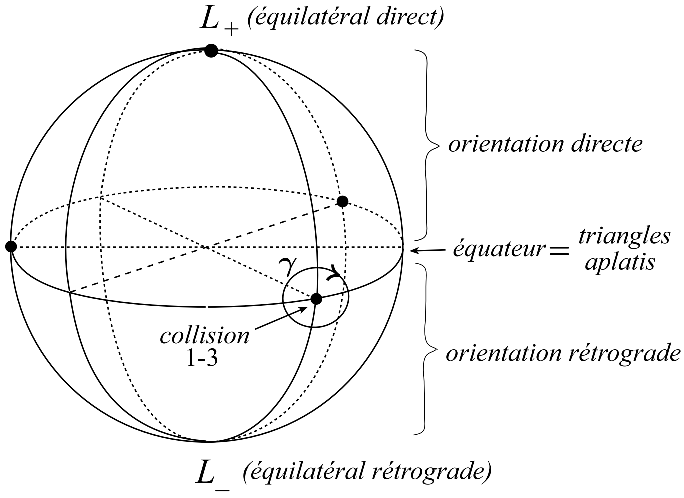

Figure 2 (L'espace des triangles orientés : les lacets de la figure 1 correspondent respectivement au lacet γ et au point L_+)

Remarques. Si l'on s'intéresse à des orbites périodiques absolues (ce que ne fait pas Poincaré), cette homologie devient $\mathbb{Z}^3$ et est représentée par le nombre de tours effectué par chacun des côtés du triangle en une période. D'autre part, Poincaré contraint l'homologie mais il aurait aussi bien pu contraindre l'homotopie, i.e. le type de la tresse décrite par les trois corps dans l'espace-temps : il avait inventé en effet le *groupe fondamental* en 1895 et ce dernier, isomorphe au groupe libre sur deux générateurs $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, est ici bien plus riche. Enfin, si l'on considère le problème des trois corps dans l'espace, la notion d'orientation d'un triangle disparaît, ainsi donc que toute cette topologie : la sphère privée de trois points est en effet remplacée par un disque privé de trois points appartenant à son bord, c'est-à-dire par un espace contractile. Notons que si le nombre de corps dépasse 3, l'"espace des formes" devient singulier (cône sur un espace projectif complexe dans le cas du problème dans le plan).

L'audace de Poincaré est manifeste dans cette note :

1) tout d'abord, il admet sans discussion l'existence d'un minimum comme allant de soi ; or l'histoire a montré que ce n'est pas sans danger. Cette existence ne sera d'ailleurs démontrée rigoureusement comme conséquence de la coercivité qu'en 1925 par Leonida Tonelli qui découvre à ce propos le rôle majeur de la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle d'action (propriété bien connue de la longueur : celle-ci peut baisser brutalement – comme dans l'exemple d'une ligne brisée qui converge uniformément vers une

droite – mais elle ne peut augmenter brusquement par passage à la limite !) ;

2) d'autre part, il détecte le vrai problème, qui est celui des collisions : un calcul élémentaire* montre que lorsque deux corps $\vec{r}_i(t)$ et $\vec{r}_j(t)$, s'attirant suivant la loi de Newton, entrent en collision à l'instant t_0, ils vérifient des estimations de la forme :

$$|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| \sim \alpha|t - t_0|^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad |\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t)| \sim \beta|t - t_0|^{-\frac{1}{3}}.$$

Sundman montrera d'ailleurs une quinzaine d'années plus tard que les mêmes estimations valent pour des collisions d'un nombre quelconque de corps et dans un espace de dimension quelconque. Le problème est que ces estimations impliquent la convergence de l'intégrale d'action au voisinage de collisions. Il en résulte qu'un chemin minimisant l'intégrale d'action peut n'être a priori que la concaténation d'un nombre peut-être infini de segments de solution reliés par des instants de collision ;

3) enfin, ne sachant pas conclure dans le cas newtonien, il n'hésite pas à “tricher” en remplaçant la force newtonienne en $1/r^2$ par une “force forte” en $1/r^3$ pour laquelle l'intégrale d'action diverge aux collisions. Il faudra attendre quatre-vingts ans pour que reprennent des recherches dans cette direction. Nous avons là une belle illustration de la façon dont Poincaré travaille : il défriche, avance et laisse en suspens des questions sur lesquelles il reviendra ... s'il en a le temps.

Au-delà de Poincaré : premiers résultats pour le potentiel newtonien.

Les premiers résultats sur la minimisation à homologie fixée pour le potentiel newtonien sont obtenus par William Gordon [G] en 1977 dans l'ignorance de la note de Poincaré. Ils concernent les orbites périodiques absolues (et non modulo rotation) du problème de Kepler (i.e. du problème d'un centre fixe, auquel peut se réduire le problème des deux corps) dans le plan. Andrea Venturelli [V] les a généralisés en 2001 au problème des trois corps dans le plan. Les énoncés sont parallèles : le premier groupe d'homologie de l'espace de configuration est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour Gordon, à $\mathbb{Z}^3$ pour Venturelli. Dans les deux cas, on constate que, comme le craignait Poincaré, des collisions peuvent apparaître de manière inévitable pour le potentiel newtonien lorsqu'on minimise l'action sous une contrainte homologique : alors que fixer

* encore plus élémentaire si l'on considère le problème de Kepler (un centre fixe) d'énergie nulle sur une droite.

l'homologie à la valeur ± 1 pour Gordon (resp. $\pm(1,1,1)$ pour Venturelli), fournit comme seuls minima les solutions elliptiques (resp. les solutions *homographiques* équilatérales) de la période choisie, toute classe d'homologie différente de 0 et ± 1 dans le premier cas, de $\pm(1,1,1)$ et d'une classe ayant une composante nulle dans le second, ont pour seuls minima des orbites de collision (effondrement *homothétique* d'un triangle équilatéral sur son centre de gravité dans le second).

Le travail de Venturelli ne dit rien sur les classes d'homologie dont une composante est égale à 0 ; en particulier, l'identification du minimum dans un cas apparemment aussi simple que la classe $(1,0,1)$ n'a pas encore été faite bien qu'un candidat sérieux existe : il s'agit d'une solution trouvée indépendamment et de manière numérique par Roger Broucke [B] et Michel Hénon [He] au cours des années soixante-dix. D'autre part, la démonstration de Venturelli est basée sur la décomposition de l'action de trois corps en somme de trois actions de deux corps et n'est de ce fait pas généralisable à un nombre supérieur de corps.

Enfin, on a déjà remarqué que, plutôt que l'homologie, on peut essayer de fixer l'homotopie. Cela revient à fixer le type de la tresse décrite dans l'espace-temps par la solution. C'est ce qu'a proposé de faire Cris Moore en 1993 [Mo], dans l'ignorance lui aussi de la note de Poincaré. Il a trouvé ainsi de nombreuses solutions périodiques en minimisant numériquement l'action et, parmi celles-ci, le *huit* évoqué dans le paragraphe suivant. Son succès vient en fait de ce qu'il impose tacitement aux lacets à partir desquels il minimise l'action de très fortes contraintes de symétrie et que son procédé de minimisation préserve ces symétries. En l'absence de tels choix, les minima auraient présenté le plus souvent des collisions.

Au-delà de Poincaré : les contraintes de symétrie.

Les contraintes de symétrie, introduites d'abord par l'école italienne ([D-G-M], [CZ]) afin d'assurer la coercivité de la fonctionnelle d'action, sont la clé des succès récents de l'application de la méthode variationnelle à la recherche de solutions périodiques du problème newtonien des n corps. Déjà dans le problème de Kepler, l'imposition de la *symétrie italienne* $x(t+T/2) = -x(t)$ sélectionne le cercle parmi les ellipses et exclut donc les orbites de collision. Pour le cas de trois corps dans le plan ou dans l'espace, cette symétrie ne donne comme minima de l'action que les solutions d'*équilibre relatif* équilatéral mais j'ai montré en 2002 [C1] que, dès que le nombre de corps dépasse quatre, elle fournit des solutions non triviales car nécessairement *non* *planes* du problème spatial. Ces solutions, les *Hip-Hop généralisés*, dont le premier exemple (quatre corps de même masse) avait été obtenu avec Venturelli en 2000 [C-V], sont d'une certaine manière les solutions non planes les plus simples du problème des n corps.

Le *huit*, dont Richard Montgomery et moi avons démontré l'existence [C-M] à la fin de 1999, est un autre exemple de minimisation sous contraintes de symétrie. Le groupe de symétrie est ici celui de l'espace des triangles orientés décrit dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire le groupe dihédral D_6, à 12 éléments. L'équilibre relatif équilatéral et le huit sont les premiers exemples d'une famille de solutions du problème de n corps de masses égales dans lesquelles les corps se poursuivent à intervalles de temps égaux sur une même coube fermée. Admirant leurs évolutions sur l'écran de son ordinateur, Carles Simó, leur principal découvreur [S1], les a baptisées *chorégraphies.* On en verra des animations sur son site http ://www.maia.ub.es/dsg/nbody.html

Que la minimisation sous contraintes de symétrie conduise souvent à des solutions sans collision s'explique par l'absence de collision dans la minimisation à extrémités fixées *(théorème de Marchal)* [Ma] : on se ramène en effet à un tel problème en restreignant un lacet symétrique à un intervalle de temps qui est un domaine fondamental de l'action du groupe de symétrie sur le cercle du temps. Pour un bref aperçu, voir [C3] ; pour plus de détails, je renvoie le lecteur à mes conférences à l'ICM (Pékin 2002) [C1] et à l'ICMP (Lisbonne 2003) [C2] et aux références qu'elles donnent.

Retour à Poincaré : le potentiel de force forte et la métrique de Jacobi-Maupertuis.

Le potentiel en $1/r^2$, introduit par Poincaré pour éviter le problème des collisions, joue un rôle très particulier au sein des potentiels de la forme $1/r^\alpha$. C'est le seul pour lequel la symétrie d'échelle due à l'homogénéité du potentiel devient symplectique, ce qui implique l'existence d'une intégrale première supplémentaire du problème des n corps. L'identité de Lagrange-Jacobi, conséquence de l'homogénéité du potentiel, s'écrit $\ddot{I} = 4H$ (I est le *moment d'inertie* de la configuration par rapport à son centre de gravité et H l'énergie, supposée nulle pour des corps en repos à l'infini). En particulier, une solution bornée et sans collision – en particulier une solution périodique, une solution périodique relative ou plus généralement une solution quasi-périodique – doit vérifier I=constante et $H = 0$. On en déduit une réduction de la métrique de Jacobi-Maupertuis (la forme donnée par Jacobi au principe de Maupertuis, c'est-à-dire au principe de moindre action à énergie fixée) à la sphère des triangles orientés de taille (ou inertie) fixée. Montgomery vient de montrer [M2] que, dans le cas de trois masses égales, la courbure de la métrique ainsi définie sur la sphère privée de trois points est partout négative, sauf aux points de Lagrange où elle s'annule. Il en déduit en particulier que chaque classe d'homotopie telle que le minimum de la longueur d'un lacet dans la classe n'est pas réalisé à l'infini* contient exactement *une* solution périodique relative. Il en déduit par exemple l'unicité du Huit pour ce potentiel, alors que cette unicité, bien que probable, n'est pas démontrée pour le potentiel newtonien.

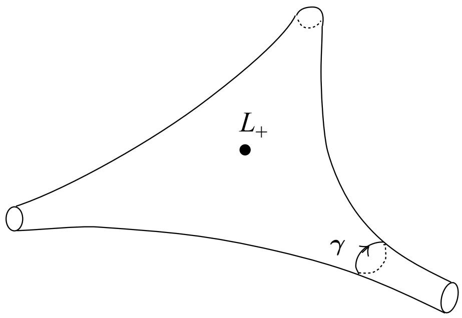

Figure 3 (L'espace des triangles orientés avec la métrique de Jacobi)

Le potentiel en $1/r^2$ contient d'autres surprises : les travaux de Fujiwara *et al.* [Fu] ont mis au jour une surprenante *géométrie du triangle* associée à la solution en huit correspondante ; on peut en contempler de belles animations à l'adresse

http ://www.clas.kitasato-u.ac.jp/~fujiwara/nBody/IeqConstLeq0/centers/GIF.html

En particulier, à chaque instant, les tangentes à la courbe aux positions qu'occupent les trois corps se coupent en un même point et il en est de même des trois normales. L'intersection des tangentes, qui résulte de l'annulation du moment cinétique, est encore vérifiée dans le cas du potentiel newtonien ; elle se rattache à l'existence de ce qu'Aurel Wintner appelle un *centre de force* pour le problème des trois corps avec attraction newtonienne : à chaque instant les forces appliquées à chacun des trois corps se coupent en un même point (Hargrave 1858, Schiaparelli 1864) ; l'annulation du moment cinétique permet de remplacer dans le calcul les accélérations par les vitesses. L'intersection des normales, qui résulte de la constance du moment d'inertie I, n'est par contre vérifiée que pour le potentiel en $1/r^2$.

* Ces classes sont identifiées dans [M1].

Retour à Poincaré : la question de la stabilité.

L'instabilité des solutions périodiques qui minimisent localement l'action est annoncée par Poincaré dans une Note aux C.R.A.S. de 1897 (tome 124, pages 713-716) intitulée *Solutions périodiques et principe de moindre action.* La preuve est détaillée en 1899 dans le Chapitre XXIX du tome III des Méthodes nouvelles intitulé *Diverses formes du principe de moindre action.* Distinguant deux sortes de solutions instables selon que les solutions infiniment voisines évitent ou recoupent la solution considérée, il annonce que seul le premier cas se produit pour les minima et qu'il les caractérise.

> *"En résumé, pour qu'une courbe fermée corresponde à une action moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, il faut et il suffit que cette courbe fermée corresponde à une solution périodique instable de la première catégorie."* (Méthodes nouvelles, fin du paragraphe 358.)

Cette affirmation ne vaut cependant que dans le cadre considéré par Poincaré, c'est-à-dire pour un système mécanique à *deux* degrés de liberté. Les exemples construits par Marie-Claude Arnaud en 1998 [A] montrent en effet qu'en dimension supérieure une solution périodique qui minimise localement l'action peut n'avoir que "deux directions d'instabilité" transverses au flot dans le niveau d'énergie qui contient la solution périodique.

Les contraintes de symétrie modifient la question de la stabilité. A la surprise générale, Simó [S2] a montré numériquement la stabilité du Huit dans le plan, mais avec d'autres contraintes de symétrie, les minima semblent être le plus souvent instables.

Conclusion. Peu de directions d'attaque du problème des trois corps ont échappé à Poincaré : cette note en est un bel exemple puisque les méthodes qu'elle préconise n'ont été retrouvées, indépendamment, que des dizaines d'années plus tard avec les travaux de Gordon et de l'école italienne. Poincaré identifie l'obstacle principal – l'action finie des solutions de collision — et seul le temps lui a manqué. En témoigne la partie XVIII de son analyse des travaux scientifiques "Problème des trois corps ; propriétés qualitatives" :

> *Je suis revenu sur ces solutions périodiques et je les ai étudiées en détail. Les procédés dont je me suis servi pour démontrer leur existence sont très simples et se ramènent au calcul des limites.*
>
> *Mais on peut arriver à cette démonstration par une voie toute différente, qu'il pourra être souvent utile d'adopter, mais dont je n'ai pas*

encore tiré tout le parti possible. Supposons par exemple que l'on recherche les géodésiques d'une surface indéfinie présentant la même forme générale qu'un hyperboloïde à une nappe. On sera certain alors qu'il doit y avoir une géodésique fermée (correspondant à une solution périodique) parceque parmi toutes les courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface et qui en font le tour, il doit y en avoir une qui est plus courte que les autres.

Les mêmes principes sont susceptibles d'être appliqués à divers problèmes de Mécanique grâce au principe de moindre action que l'on peut employer soit sous la forme que lui a donnée Hamilton, soit sous celle que lui a donnée Maupertuis. Je n'ai fait qu'esquisser cette méthode dont il y a sans doute encore beaucoup à tirer.

En fait, Poincaré est revenu au moins une fois sur cette méthode, non pas directement à propos du problème des trois corps mais dans un problème à la fois plus simple, car il ne présente pas le problème des collisions, et plus compliqué, car il concerne la sphère qui ne possède pas de "trou" dont on puisse "faire le tour". Dans l'article de 1905 *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* (Transactions AMS 6, p. 237-274), il traite en effet du problème des géodésiques périodiques sur les surfaces convexes comme caricature du problème analogue dans le problème restreint circulaire plan des trois corps. Pensant aux solutions périodiques de type planétaire ou lunaire, en particulier aux *solutions de Hill* du problème lunaire, et oubliant sans doute sa note de 1896, il remarque dans l'introduction que

"...ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.

J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; malheureusement, le problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par M. Hadamard [le cas des surfaces à courbures opposées]. J'ai donc dû me borner à quelques résultats partiels, relatifs surtout aux géodésiques fermées, qui jouent ici le rôle des solutions périodiques du problème des trois corps".

Ces résultats "partiels" sont quand même impressionnants : en appliquant de manière audacieuse la méthode de continuation, Poincaré obtient l'existence d'au moins une géodésique fermée *plongée* (i.e. sans point double) sur toute surface convexe de $\mathbb{R}^3$ munie de la métrique induite par la métrique euclidienne. A la fin de son article, il esquisse, de manière très "physique" avec fluides et rubans, une deuxième démonstration de cette existence et l'utilise pour discuter de la stabilité : en présence d'une homologie ou d'une homotopie qui sont triviales et ne peuvent donc servir de contraintes pour la minimisation de la longueur (i.e. de l'action), il introduit la *contrainte de Gauss-Bonnet* : la longueur est minimisée parmi les courbes fermées plongées qui partagent la surface en deux morceaux sur lesquels l'intégrale de la courbure totale est la même (c'est exactement ce qu'affirme le théorème de Gauss-Bonnet pour une géodésique). Une démonstration complète (et bien jolie) suivant cette suggestion de Poincaré n'a été donnée qu'en 1994 par Joel Hass et Frank Morgan [H-M].

Dans son commentaire, René Garnier, l'un des éditeurs du tome VI des œuvres qui contient cet article, évoque les progrès spectaculaires faits en calcul de variations par Morse, Birkhoff, Lusternik, Schnirelmann. Il écrit :

> *"Les recherches de tous ces auteurs constituent sans aucun doute l'une des plus importantes acquisitions de la technique moderne en Calcul des Variations ; mais en le constatant, on n'oubliera pas que, selon le mot de M. Morse, H. Poincaré a été l'un des premiers géomètres qui aient entrevu l'existence d'une macro-analyse et, sans aucun doute, celui qui a contribué le plus efficacement à la constitution d'une telle discipline."*

Je terminerai par une phrase de Hadamard qui me semble décrire avec une grande justesse l'œuvre de Poincaré. Cette phrase, que je reproduis en catalan, est issue du texte d'une conférence donnée à l' "Institut d'estudis catalans", texte recueilli par E. Terradas et B. Bassegoda [H] :

> *"En presència d'una descoberta d'Hermite, em vénen ganes de dir :*
> *—Admirable és veure com un ésser humà ha pogut arribar a una manera de pensar tan extraordinària !*
> *Però, llegint una memoria de Poincaré, dic :*
> *—Com és que no s'ha arribat més aviat a coses tan pregonament naturals i lògiques ?"*

Merci à Robert McKay de m'avoir appris l'existence de la note de Poincaré lors d'une conférence à Rio de Janeiro où je présentais le huit ; merci à Anne Robadey pour des éclaircissements sur l'article de 1905 de Poincaré ; merci à Alain Albouy pour une discussion sur le centre de forces et à Jacques Laskar pour la référence de Schiaparelli. Merci enfin à Sebastià Xambó et Amadeu Delhsams de m'avoir invité à parler de Poincaré dans leur belle ville de Barcelone et à Tere Seara de m'avoir aidé à le faire, non pas malheureusement en catalan, mais au moins en castillan.

Bibliographie.

H. Poincaré

1) *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. t. 123, pp. 915-918, 1896, in Oeuvres, tome VII

2) *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Transactions AMS 6, 237-274 (1905), in Oeuvres, tome VI

3) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tomes I & III* (1892, 1899), Réédition Blanchard (1987)

4) *La science et l'hypothèse* (1902)

5) *La valeur de la science* (1905)

[A] M.C. Arnaud. *On the type of certain periodic orbits minimizing the Lagrangian action*, Nonlinearity 11, 143-150 (1998)

[B] R. Broucke. *On relative periodic solutions of the planar general three-body problem*, Celestial Mechanics 12 439-462 (1975)

[C1] A. Chenciner. *Action minimizing solutions of the n-body problem : from homology to symmetry*, Proceedings du Congrès international des mathématiciens (ICM 2002), Pékin, vol. III, 279-294 (2002)

[C2] A. Chenciner. *Symmetries and simple solutions of the classical n-body problem*, Proceedings à paraître du Congrès international de physique mathématique (ICMP 2003), Lisbonne (2003)

[C3] A. Chenciner. *Solutions du problème des n corps joignant deux configurations : l'idée de Christian Marchal et ce qui s'en suit*, Gazette des mathématiciens 99, 5-12 (2004)

[C-V] A. Chenciner & A. Venturelli. *Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses égales dans $\mathbb{R}^3$: orbites "hip-hop"*, Celestial Mechanics, vol. 77, 139-152 (2000)

[C-M] A. Chenciner & R. Montgomery. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, Annals of Math., 152, 881-901 (2000)

[CZ] V. Coti Zelati. *Periodic solutions for N-body type problems*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, v. 7, n^{o}5, 477-492 (1990)

[D-G-M] M. Degiovanni, F. Giannoni & A. Marino. *Dynamical systems with Newtonian type potentials*, Atti Acc. Lincei Rend. Fis. Mat. 8, 81, 271-278 (1987), et M.Degiovanni-F.Giannoni *Periodic solutions of dynamical systems with Newtonian type potentials*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 15, 467-494 (1988)

[Fe1] R.P. Feynmann. *Lectures in physics, vol. I*, Addison Wesley (1963)

[Fe2] R.P. Feynmann. *QED The strange theory of light and matter (Alice G. Mautner lectures)*, Princeton University press (1988), traduction française *Lumière et matière*, Le Seuil (1992)

[Fu] T. Fujiwara, H. Fukuda, A. Kameyama, H. Ozaki & M. Yamada. *Synchronised Similar Triangles for Three-Body Orbit with Zero Angular Momentum*, preprint arXiv :math-ph/0404056 v1 (2004)

[G] W.B. Gordon. *A Minimizing Property of Keplerian Orbits*, American Journal of Math. vol. 99, $n^0$15, 961-971 (1977)

[H] J. Hadamard. *Poincaré i la teoria de les equacions diferencials*, Institut d'estudis catalans, Col'lecció de Cursos de Fisica i Matemàtica, vol. III, non daté (environ 1920)

[H-M] J. Hass & F. Morgan. *Geodesics and soap bubbles on surfaces*, Mathematische Zeitschrift 223, n^{o}2, 185-196 (1996)

[He] M. Hénon. *Families of periodic orbits in the three-body problem*, Celestial Mechanics 10, 375-388 (1974)

[Ma] C. Marchal. *How the method of minimization of action avoids singularities*, Celestial Mechanics 83, 325–353 (2002)

[Mo] C. Moore. *Braids in Classical Dynamics*, Physical Review Letters vol.70, n^0 24, 3675-3679 (1993)

[M1] R. Montgomery. *The N-body problem, the braid group, and action-minimizing periodic orbits*, Nonlinearity, 11, 363-376 (1998)

[M2] R. Montgomery. *Fitting hyperbolic pants to a three-body problem*, preprint (2004)

[S1] C. Simó. *New families of Solutions in N–Body Problems*, Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, C. Casacuberta et al. eds. Progress in Mathematics, 201, 101-115 (2001)

[S2] C. Simó. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem*, in "Celestial Mechanics, dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday", A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson, Z.J. Xia ed., Contemporary Mathematics 292, 209–228 (2002)

[V] A. Venturelli. *Une caractérisation variationnelle des solutions de Lagrange du problème plan des trois corps*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, 641-644, (2001)