SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
A PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II
LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES
PAR L'AUTEUR.

Hela upplagan blef ...
M. L...

"The whole edition
was destroyed"

signed Mittag-Leffler

Amitiés
Hélène

R. Pérez-Marco

Nunquam praescriptos transibunt sidera fines.

TABLE DES MATIÈRES.

Notes.

Introduction.

Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.

Le présent mémoire a été entrepris pour répondre à la première des quatre questions du concours; mais les résultats que j'ai obtenus sont tellement incomplets que j'aurais hésité à les publier si je ne savais que l'importance et la difficulté du problème donne de l'intérêt à tout ce qui s'y rapporte et qu'on ne peut attendre une solution définitive que d'une longue série d'efforts successifs.

Les immortels fondateurs de la mécanique céleste ont cherché à résoudre le problème des n corps par approximations successives. A cet effet, ils ont développé la solution suivant les puissances croissantes des masses et exprimé chaque terme du développement par une série de sinus et de cosinus. Leur succès montre suffisamment que cette méthode était la plus convenable pour les premières approximations.

Parmi les résultats qu'ils ont obtenus, un des plus remarqués est celui qui se rapporte à la stabilité du système solaire. Laplace et Poisson sont parvenus à démontrer qu'en tenant compte seulement des premières et des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites ne subissent que des variations périodiques. On a cru longtemps que le fait était général et on en a même cherché une démonstration directe; c'était une erreur. Dès qu'on tient compte des troisièmes puissances des masses, on voit apparaître des termes séculaires dans le développement des grands axes.

Ainsi la méthode dont nous venons de parler devient insuffisante quand on veut pousser l'approximation un peu loin. Les séries auxquelles elle conduit contiennent non seulement des termes purement trigonométriques de la forme:

$$A \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad B \cos \alpha t,$$

non seulement des termes mixtes de la forme:

$$At^m \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad Bt^m \cos \alpha t,$$

mais des termes purement séculaires de la forme

$$At^m.$$

Rien ne permet donc d'affirmer que ces séries resteront convergentes pour de grandes valeurs de t.

Aussi les géomètres contemporains se sont ils efforcés de remplacer ces développements par d'autres séries ne contenant que des termes trigonométriques. Ils y sont enfin parvenus dans ces derniers temps et les séries de M. Gyldén comme celles de M. Lindstedt ne contiennent que des termes en

$$A \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad B \cos \alpha t,$$

où non seulement A et B mais encore α sont développés suivant les puissances de m.

Tout n'est pas fini cependant. On peut se demander si les séries ainsi obtenues sont convergentes et comme la présence de »petits diviseurs» a pour effet de rendre certains termes très grands, on peut avoir des doutes sérieux au sujet de cette convergence. Le présent travail montrera que ces doutes sont fondés; toutes ces séries divergent; je dois réserver toutefois les séries proposées par M. Gyldén dans son dernier mémoire (Acta, t. 9); en ce qui les concerne je n'ai aucun moyen de reconnaître si elles sont convergentes ou divergentes.

Ainsi en cherchant à intégrer les équations différentielles du problème des trois corps par des séries trigonométriques, on est généralement conduit à des développements divergents, mais on sait qu'il existe pour les équations différentielles de tous les ordres des procédés d'intégration dont la convergence est certaine et on pourrait en attendre des résultats dans le cas qui nous occupe.

Cauchy a imaginé un procédé de calcul ingénieux qu'il a appelé, je ne sais pourquoi, »calcul des limites» (Comptes rendus, tome 14, p. 1020—1025) et par lequel il montre que les équations différentielles d'ordre quelconque, admettent une intégrale développable par la série de Taylor. Il y a exception en certains points nommés points singuliers.

Considérablement perfectionné par M. Weierstrass, le »calcul des limites» a fourni une importante moisson aux géomètres qui l'ont cultivé et en particulier à MM. Briot et Bouquet et M^{me} Kowalevski. C'est

ainsi que les résultats de Cauchy ont été étendus aux équations aux dérivées partielles.

Parmi ces résultats, je citerai le suivant: soit x une quantité définie en fonction de t par une équation différentielle du n^e ordre où entre un certain paramètre μ. Considérons la solution particulière qui est telle que x s'annule pour $t = 0$ ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées. Cette solution pourra se développer suivant les puissances de t et de μ, pourvu que t et μ soient assez petits; mais il y a plus; cette solution pourra encore, pour une valeur particulière t_1 de t se développer suivant les puissances croissantes de μ seulement, pourvu que μ soit assez petit et quelque grand que soit t_1 à moins qu'on n'ait passé par quelque point singulier entre $t = 0$ et $t = t_1$.

Les séries ainsi obtenues sont toujours convergentes au moins dans une certaine étendue, mais il arrive en général que cette convergence n'a lieu que pour les petites valeurs de la variable. M. Poincaré par l'application des principes de Cauchy, a trouvé des séries (Comptes rendus, 27 février 1882) qui restent convergentes pour toutes les valeurs du temps. Il ne faut pas croire pourtant le problème résolu; ces séries, procédant suivant les puissances de certaines variables, peuvent servir à démontrer l'existence de l'intégrale, ou même à calculer sa valeur numérique; mais la plupart du temps, elles ne nous en font pas connaître les propriétés. C'est ainsi qu'elles sont impuissantes, dans le cas de la mécanique céleste, à mettre en évidence la périodicité quand elle existe, ou à décider la question de la stabilité.

C'est à un ordre d'idées absolument différent que se rapportent d'autres mémoires de M. Poincaré auxquels nous ferons quelques emprunts (Journal de Liouville, 3^{me} série, tomes 7 et 8; 4^{me} série, tomes 1 et 2). Dans ces mémoires intitulés *Sur les courbes définies par les équations différentielles* il cherche à construire ces courbes et à déterminer dans le plan et dans l'espace une région limitée d'où elles ne pourront jamais sortir. Il y est parvenu pour certaines équations différentielles mais les équations de la dynamique ont semblé jusqu'ici rebelles à sa méthode.

Dans le présent travail, je ferai concourir à mon but les trois méthodes dont je viens de parler; aux anciennes méthodes de la mécanique céleste, j'emprunterai la forme trigonométrique des développements; au »calcul des limites» la démonstration de leur convergence; enfin c'est à la méthode géométrique de M. Poincaré que j'aurai recours pour démontrer la stabilité.

Malgré l'emploi simultané de ces trois méthodes, jointes à quelques principes nouveaux, j'ai dû me restreindre à un cas particulier. J'ai traité seulement des équations de la dynamique quand il n'y a (pour employer une expression usitée en Angleterre) que deux degrés de liberté (*degrees of freedom*). En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croître indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Les démonstrations du calcul des limites ne s'appliquent pas en général aux séries trigonométriques de la mécanique céleste et ne permettent pas d'en démontrer la convergence.

L'obstacle qui s'y oppose est la présence d'une infinité de petits diviseurs. Mais il est un cas où ces petits diviseurs disparaissent, c'est celui où il n'y a plus qu'un seul argument, c'est à dire celui des *solutions périodiques* qui ont été rencontrées dans certains cas particuliers d'abord par M. Hill (American Journal, t. 1), puis par M. Poincaré (Bulletin astronomique, t. 1). On en trouvera dans la suite une théorie complète.

Pour pouvoir appliquer aux équations de la dynamique la méthode géométrique de M. Poincaré, j'ai dû introduire une notion nouvelle qui est celle des *invariants intégraux*. Elle m'a été fort utile et j'ai lieu de croire qu'elle pourra rendre des services dans d'autres problèmes.

Ces considérations générales qui m'étaient indispensables remplissent la première partie de ce travail. Je n'aborde le problème lui-même que dans la seconde partie où je n'ai plus qu'à appliquer les principes posés dans la première.

Première partie.

Généralités.

CHAPITRE I.

Notations et définitions.

Considérons un système d'équations différentielles:

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, où enfin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons en général que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on savait intégrer les équations (1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes; on pourrait écrire:

$$(2)\qquad x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ \ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire encore, en résolvant par rapport à ces constantes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} C_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ C_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3), $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont n *intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons:

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{5}$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ doivent être remplacées par $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries

$$x_1, x_2, \dots, x_p,$$

$$y_1, y_2, \dots, y_p,$$

et que les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte p *degrés de liberté*.

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives:

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrons alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3 \tag{1}$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps t, le point P décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire*. A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers*.

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*.

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité*, si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si le trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera toute entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$

les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z. Nous pourrons considérer non plus x_1, x_2, x_3, mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3. Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{7}$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrons alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou

bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3), \qquad x_4 = \psi_4(z_1, z_2, z_3),$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ψ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z, au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3.

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives:

$$F = C,$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π. La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires*; les autres seront *linéaires*.

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une ou plusieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π. Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\ , \quad \ldots\ , \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \qquad (k \text{ étant entier})$$

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π, toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

CHAPITRE II.

Théorie des Invariants Intégraux.

§ 1. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta'_k. \end{aligned}$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par $\eta'_i, -\xi'_i, -\eta_i, \xi_i$ et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra:

$$\sum_i \left(\eta'_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi'_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi'_i}{dt} + \xi_i \frac{d\eta'_i}{dt}\right) =$$

$$\sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

$$-\sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi'_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta'_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_i \xi'_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta'_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

ou

$$\sum \frac{d}{dt}[\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta'_1\xi_1 - \xi'_1\eta_1 + \eta'_2\xi_2 - \xi'_2\eta_2 + \ldots + \eta'_n\xi_n - \xi'_n\eta_n = \text{constante}.$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2)

$$\xi_i\,,\ \xi_i'\,,\ \xi_i''\,,\ \xi_i''',$$
$$\eta_i\,,\ \eta_i'\,,\ \eta_i''\,,\ \eta_i'''.$$

Considérons ensuite la somme des déterminants:

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix},$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants:

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \left| \xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_p} \eta_{\alpha_p} \right|,$$
$$(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots\,,\ \alpha_p = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i\,, \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir:

$$\sum \xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i = \text{const.}$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\sum A_i \xi_i + \sum B_i \eta_i = \text{const.}$$

une intégrale des équations (2), on devra avoir:

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k\Big]$$
$$- \sum_i B_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k\Big] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dx_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dx_i} B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i} A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dy_i} B_k,$$

ce qui montre que:

$$\xi_i = B_i\,, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant:

$$\Phi(x_i\,,\ y_i\,,\ t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent:

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}\,, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum \left(\frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i}\frac{d\Phi_1}{dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de Poisson.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice:

$$x_{11}\,,\ x_{21}\,,\ x_{31}$$

le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du i^e point matériel. On aura alors:

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives:

$$F = \sum \frac{m_i}{2}\left(\frac{dx_{ki}}{dt}\right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite:

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$(3)\qquad F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const.}$$

et

$$(1')\qquad \frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}.$$

Soit:

$$(4)\qquad x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t)$$

une solution de ces équations (1'), une autre solution sera:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t+h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t+h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations (2') qui correspondent à (1') comme les équations (2) correspondent à (1):

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i\varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires (2').

Connaissant une solution:

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (3).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (4) une autre solution:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k,\\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t),\\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2')

$$\xi_{1i} = 1, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0,$$

$$\xi_{1i} = t, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \qquad \eta_{1i} = m_i.$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2')

$$\Sigma_i \eta_{1i} = \text{const.},$$

$$\Sigma \eta_{1i} t - \Sigma m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité:

$$\Sigma m_i x_{1i} = t\Sigma y_{1i} + \text{const.},$$

$$\Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

Si l'on fait tourner la solution (4) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution:

$$x_{1i} = \varphi_{1i}\cos\omega - \varphi_{2i}\sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\cos\omega - \varphi'_{2i}\sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i}\sin\omega + \varphi_{2i}\cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\sin\omega + \varphi'_{2i}\cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de (2')

$$\xi_{1i} = -x_{2i}, \qquad \eta_{1i} = -y_{2i},$$
$$\xi_{2i} = x_{1i}, \qquad \eta_{2i} = y_{1i},$$
$$\xi_{3i} = 0, \qquad \eta_{3i} = 0,$$

d'où l'intégrale de (2')

$$\Sigma_i(x_{1i}\eta_{2i} - y_{1i}\xi_{2i} - x_{2i}\eta_{1i} + y_{2i}\xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de (1')

$$\Sigma(x_{1i}y_{2i} - x_{2i}y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x ce qui est le cas de la nature.

Les équations (1') ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3, les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante:

$$x_{ki} = \lambda^2\varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1}m_i\varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations (2')

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_i t\varphi''_{ki},$$

ou

(5) $$\xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}},$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2'), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1'):

$$\Sigma(2x_{ki}\eta_{ki} + y_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

§ 2. *Définition des invariants intégraux.*[1]

Considérons un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait:

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i$$

X'_i étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x', une relation:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

[1] Voir *Note C.*

On peut supposer que $x_1, x_2, \dots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminé.

Si donc nous savons que nos points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant, parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante:

$$\int (Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \dots + Y_n dx_n) = \int \Sigma Y_i dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équations différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\Sigma Y_{ik} dx_i dx_k},$$

étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient définis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide, le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est à dire l'intégrale triple:

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

et que l'on ait la relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la dynamique; car si l'on considère ces équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que:

$$\Sigma(\xi_i\eta_i' - \xi_i'\eta_i) = \text{const.}$$

Cela traduit dans notre nouveau langage signifie que l'intégrale double

$$\iint \Sigma_i dx_i dy_i$$

est un invariant intégral.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante.*

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

Il y a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. L'expression

$$\int \Sigma(2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1[er] ordre, du 2[d] ordre, ... ou du n[e] ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

§ 3. *Transformation des invariants intégraux.*

Reprenons nos équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \ldots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0,$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n-1$ autres variables $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront:

$$(4) \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1}, \quad \frac{dz_n}{dt} = Z_n = 0,$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \dots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n-1$ et s'écrivent:

$$(4') \qquad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

les équations (4) admettront également un invariant positif:

$$J = \int \mu dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4') qui sont d'ordre $n-1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n-1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \dots + \frac{d(\mu Z_n)}{dz_n} = 0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \dots + \frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_{n-1}} = 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n-1$

$$\int \mu dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1}$$

est un invariant pour les équations (4').

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, mais nous avons conservé le temps

t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose:

$$t = \varphi(t_1)$$

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors:

$$\frac{dx_i}{dt_1} = X_i' = X_i\frac{d\varphi}{dt_1} = X_i\frac{dt}{dt_1}. \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{5}$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M\frac{dt_1}{dt}X_i'\right) = 0.$$

Cela montre que

$$\int M\frac{dt_1}{dt}dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante:

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \quad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral:

$$\int MX_n dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante:

$$t_1 = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira:

$$\int M\left(\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \dots + \frac{d\theta}{dx_n}X_n\right)dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral est beaucoup plus profondément modifiée quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \frac{d\theta}{dx_3}X_3 \gtrless 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si on considère une courbe C tracée sur S, les n^{es} conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C' que j'appellerai la n^e *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est n^e conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

Je ne m'occuperai que du cas où θ n'est pas une fonction uniforme de x_1, x_2 et x_3, mais une fonction susceptible d'une infinité de valeurs dont la différence est un multiple de 2π. Je prendrai par exemple:

$$\theta = \operatorname{arc\,sin} \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1}.$$

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C' et A' les premières conséquentes, C^n et A^n les n^{es} conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C'. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A'. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\theta + \frac{d\theta}{dn}dn$ la valeur de θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des θ croissants, on aura

$$\frac{d\theta}{dn} > 0.$$

Posons:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \frac{d\theta}{dx_3}X_3}{\frac{d\theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH d\omega - \int_{A} MH d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A' et la seconde à l'aire A.

L'intégrale

$$\int MH d\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A^n. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ 4. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

Je dis que s'il y a un invariant positif, la stabilité dans le premier sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot, non pas pour toutes les trajectoires, mais pour une infinité d'entre elles. Je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps 0 la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \dots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k-1$ des régions $r_0, r_1, \dots r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grand que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \dots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0, r_{p_2-p_1}, r_{p_3-p_1}, \dots, r_{p_k-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. Pour employer la même nomenclature que dans le paragraphe précédent nous dirons que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r_0' cette partie commune; soit s_0' la p^e antécédente de r_0' qui fera aussi partie de r_0 puisque sa p^e conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r_{p_1}' la première des conséquentes de r_0' qui ait une partie commune avec r_0'; soit r_0'' cette partie commune; sa p_1^e antécédente fera partie de r_0' et par conséquent de r_0, et sa $p+p_1^e$ antécédente que j'appellerai s_0'' fera partie de s_0' et par conséquent de r_0.

Ainsi s_0'' fera partie de r_0 ainsi que ses p^e et $p+p_1^e$ conséquentes. Et ainsi de suite.

Avec r_0'' nous formerons r_0''' comme nous avons formé r_0'' avec r_0' et r_0' avec r_0; nous formerons ensuite $r_0^{IV}, \dots, r_0^n, \dots$.

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r_0^n qui ait une partie commune avec r_0^n soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s_0^n l'antécédente d'ordre $p+p_1+p_2+\dots+p_{n-1}$ de r_0^n.

Alors s_0^n fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre:

$$p, p+p_1; p+p_1+p_2, \dots, p+p_1+p_2+\dots+p_{n-1}.$$

De plus s_0^n fera partie de s_0^{n-1}, s_0^{n-1} de s_0^{n-2}, ...

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0, s_0', s_0'', \dots, s_0^n, s_0^{n+1}, \dots$ ad. inf. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre $p, p+p_1, \dots, p+p_1+\dots+p_n, p+p_1+\dots+p_n+p_{n+1}, \dots$ ad. inf.

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0.

C. Q. F. D.

Extension du théorème I. Nous avons supposé:

1° que $n = 3$,

2° que le volume est un invariant intégral,

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque:

$$\int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il est encore vrai si $n > 3$, s'il existe un invariant positif:

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

et si $x_1, x_2, \dots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus.

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \dots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que:

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la lune a négligé dans une première approximation la parallaxe du soleil, l'excentricité du soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale:

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2} n'^2 x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral

$$\int dx\, dy\, dx'\, dy'.$$

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 4 dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est à dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région.

Théorème II. Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a un invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface *fermée* sans contact.

Soit en effet

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression:

$$\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3$$

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn}dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura:

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \frac{dF}{dx_3} X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de le traduire dans le langage analytique et de dire:

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui soit positive, qui devient infinie toutes les fois que l'un des x cesse d'être fini et qui soit telle que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1} X_1 + \frac{dF}{dx_2} X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n} X_n$$

soit toujours de même signe quand F est nul.

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont M. Poincaré s'est servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. Lindstedt.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures, lui donner une forme un peu différente en y introduisant une notion nouvelle, celle des courbes invariantes.

Nous avons à la fin du paragraphe précédent envisagé une portion de surface S, définie par l'équation

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et telle que l'on ait pour tous les points de S

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 > 0,$$

de telle sorte que S soit une portion de surface sans contact.

Nous avons défini ensuite ce qu'on doit entendre par le n^e conséquent d'un point de S ou par la n^e conséquente d'une courbe ou d'une aire appartenant à S.

Nous avons vu que s'il existe un invariant positif

$$\iiint M dx_1 dx_2 dx_3,$$

il existe également une autre intégrale

$$\int MH d\omega$$

que l'on doit étendre à tous les éléments $d\omega$ d'une aire appartenant à S et qui jouit des propriétés suivantes:

1°. La quantité sous le signe $\int$, MH est toujours positive.

2°. L'intégrale a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à S et pour toutes celles de ses conséquentes qui existent.

Cela posé, j'appellerai *courbe invariante* du n^e ordre, toute courbe tracée sur S et qui coïncidera avec sa n^e conséquente.

A toute courbe invariante fermée correspondra une surface trajectoire fermée.

En effet soit C une courbe invariante fermée; par chacun des points de C je fais passer une trajectoire que je prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau C, ce qui arrivera par hypothèse puisque je suppose que la n^e conséquente de C existe et n'est autre chose que la courbe C elle-même. L'ensemble de ces trajectoires forme évidemment une surface fermée triplement connexe, c'est à dire présentant les mêmes connexions que le tore.

Ainsi la recherche des surfaces trajectoires fermées, et par conséquent l'étude de la stabilité, se ramène à la recherche des courbes invariantes fermées.

Mais à côté des courbes invariantes fermées, nous avons à envisager d'autres courbes invariantes que j'appellerai quasi-fermées et que je vais définir.

Dans la plupart des questions de dynamique il entre certains paramètres très petits de sorte qu'on est naturellement conduit à développer les solutions suivant les puissances croissantes de ces paramètres. Telles sont les masses en Mécanique Céleste.

Nous imaginerons donc que nos équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

dépendent d'un paramètre μ. Nous supposerons que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et μ, susceptibles d'être développées selon les puissances croissantes de μ et que μ est très petit.

Nous dirons alors qu'une fonction quelconque de x_1, x_2, x_3 et μ est une quantité très petite du n^e ordre quand elle pourra se développer suivant les puissances de μ et que le développement commencera par un terme en μ^n.

Cela posé, considérons une portion de surface sans contact S, et sur S une courbe invariante du n^e ordre, C. En général C dépendra de μ.

Supposons maintenant que l'on puisse trouver sur C deux points A et B séparés par un arc fini de la courbe C et dont la distance soit une quantité très petite du p^e ordre. Je dirai alors que la courbe C est *quasi-fermée*. Les deux points A et B s'appelleront les deux points de fermeture.

Prenons un exemple simple. Soient les équations:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\mu\cos\omega + \rho\mu^n, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 1, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \mu.$$

Dans ces équations entrent, outre le temps t, deux variables angulaires ω et φ et une variable linéaire ρ que je regarderai comme essentiellement positive. Je représenterai alors par exemple la situation du système par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$x_1 = \cos\varphi\, e^{\rho\cos\omega}, \qquad x_2 = \sin\varphi\, e^{\rho\cos\omega}, \qquad x_3 = \rho\sin\omega.$$

On voit que lorsque l'une des variables angulaires φ et ω augmente de 2π, le point P ne change pas.

Alors $\varphi = 0$ représente un demi-plan défini par l'égalité et l'inégalité suivantes:

$$x_2 = 0, \qquad x_1 > 0.$$

Il est aisé de voir que ce demi-plan est une portion de surface sans contact.

Soit P_0 un point de ce demi-plan, P_1 son premier conséquent; soient ρ_0, ω_0 et $\varphi_0 = 0$ les valeurs de ρ, ω et φ qui correspondent au point P_0; soient ρ_1, ω_1 et $\varphi_1 = 2\pi$ les valeurs de ρ, ω et φ qui correspondent à P_1, on aura:

$$\omega_1 = \omega_0 + 2\pi\mu, \qquad \rho_1 = \rho_0 e^{\sin\omega_1 - \sin\omega_0 + 2\pi\mu^n}.$$

Supposons que l'on ait entre ρ_0 et ω_0 la relation

$$\log\rho_0 = k + \sin\omega_0 + \omega_0\mu^{n-1}$$

(k étant une constante quelconque). Cela revient à dire que le point P_0 appartient à la courbe C qui a pour équations:

$$\varphi = 0, \qquad \log\rho = k + \sin\omega + \omega\mu^{n-1}.$$

Il est aisé de voir que l'on a encore:

$$\log\rho_1 = k + \sin\omega_1 + \omega_1\mu^{n-1},$$

ce qui revient à dire que le point P_1 qui est le conséquent de P_0 est aussi sur la courbe C ou bien que *la courbe C est invariante*.

La courbe C n'est pas fermée. En effet l'expression de $\log\rho$ contient un terme $\omega\mu^{n-1}$ qui n'est pas périodique et qui ne reprend pas la même valeur quand ω augmente de 2π.

Nous arrêterons la courbe C aux points A et B qui ont respectivement pour coordonnées

$$\varphi = 0, \qquad \omega = 0, \qquad \rho = e^k,$$

$$\varphi = 0, \qquad \omega = 2\pi, \qquad \rho = e^{k+2\pi\mu^{n-1}}.$$

Quelle est la distance de ces points A et B? La valeur de φ correspondant à ces deux points est la même; la valeur de ω est la même à un multiple près de 2π. La distance AB sera donc du même ordre de grandeur que la différence des valeurs de ρ qui correspondent aux deux points A et B. Or cette différence est égale à:

$$e^{t}(e^{2\pi\mu^{n-1}} - 1).$$

Si donc μ est comme nous le supposons un paramètre très petit, cette différence et par conséquent la distance AB est une quantité très petite d'ordre $n - 1$. La courbe C est alors une courbe quasi-fermée dont les points A et B sont les points de fermeture.

Ainsi si une courbe qui dépend de μ est quasi-fermée, cela veut dire qu'elle est fermée pour $\mu = 0$.

Lemme. Si la distance de deux points A_0 et B_0 appartenant à la portion de surface sans contact S est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a'_1, a'_2, a'_3 les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; y_1, y_2, y_3; y'_1, y'_2, y'_3 les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1. Il est clair que x'_1, x'_2 et x'_3 seront des fonctions holomorphes de x_1, x_2 et x_3.

Donc $x'_1 - a'_1, x'_2 - a'_2, x'_3 - a'_3$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.[1] J'introduis μ parce que les équations différentielles dépendant de μ, il doit en être de même de la relation qui lie un point à son conséquent.

L'expression de $y'_1 - a'_1, y'_2 - a'_2, y'_3 - a'_3$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2, y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2, x'_3 - a'_3$ en fonctions de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire:

$$
\begin{aligned}
x'_1 - y'_1 &= (x_1 - y_1)F_1 + (x_2 - y_2)F_2 + (x_3 - y_3)F_3, \\
x'_2 - y'_2 &= (x_1 - y_1)F'_1 + (x_2 - y_2)F'_2 + (x_3 - y_3)F'_3, \qquad (1) \\
x'_3 - y'_3 &= (x_1 - y_1)F''_1 + (x_2 - y_2)F''_2 + (x_3 - y_3)F''_3,
\end{aligned}
$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu, x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3, y_1 - a_1, y_2 - a_2, y_3 - a_3.$$

[1] Voir *Note E.*

En général la position des points A_0 et B_0 dépendra de μ, de telle façon que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ seront des fonctions de μ que l'on pourra développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre.

Dire que la distance A_0B_0 est très petite d'ordre n, c'est dire que les différences

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$$

peuvent se développer suivant les puissances de μ et que les développements commencent par des termes en μ^n.

Quand on remplacera alors dans les équations (1) $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ par leurs valeurs en fonctions de μ, on reconnaîtra que les développements de $x'_1 - y'_1, x'_2 - y'_2, x'_3 - y'_3$ commencent par des termes en μ^n et par conséquent que la distance A_1B_1 est très petite d'ordre n.

C. Q. F. D.

Théorème III. Si une courbe invariante C est quasi-fermée, de telle façon que la distance des points de fermeture A et B soit une quantité très petite du n^e ordre, et s'il existe un invariant intégral positif, la distance du point A à son conséquent A_1 et celle du point B à son conséquent B_1 sont des quantités très petites du n^e ordre.

Fig. 1.

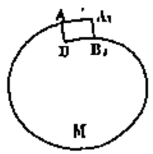
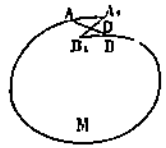


Fig. 2.



Je représente en effet la courbe C et sur cette courbe les deux points de fermeture A et B.

La courbe C étant invariante, les conséquents A_1 et B_1 de A et de B sont sur la courbe C ou sur son prolongement.

La distance des points A et B étant une quantité très petite du n^e ordre, je puis joindre ces deux points par un arc de courbe AB situé sur la portion de surface sans contact S, dont la longueur totale soit une quantité très petite du n^e ordre et qui ne coupe pas C.

Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB. D'après le lemme précédent, la longueur totale de A_1B_1 sera encore une quantité très petite du n^e ordre.

Considérons l'aire α faisant partie de S et limitée par la courbe C et l'arc AB; sur la figure 1 c'est l'aire ABB_1MA. Soit maintenant α_1 la conséquente de l'aire α. Cette conséquente sera limitée par la courbe C et l'arc A_1B_1; sur la figure 1 ce sera l'aire AA_1B_1MA.

S'il y a un invariant intégral positif, il existera une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

qui devra avoir la même valeur si on l'étend à tous les éléments $d\omega$ de l'aire α, ou à tous les éléments de sa conséquente α_1.

Si la disposition est celle de la figure 1, c'est à dire si les arcs AB et A_1B_1 ne se coupent pas et que l'aire α_1 se compose de l'aire α, plus l'aire ABA_1B_1, il faut que l'intégral

$$\int MHd\omega$$

étendue à l'aire ABA_1B_1 soit nulle. Mais cela est impossible puisque tous les éléments de cette intégrale sont positifs.

Il faut donc que les arcs AB et A_1B_1 se coupent en un point D, et que la disposition soit celle de la figure 2.

Cela posé, dans le triangle ADA_1, les côtés AD et A_1D sont très petits du n^e ordre. On a de plus:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

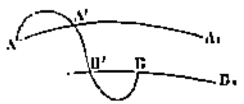
Par conséquent la distance AA_1 est une quantité très petite du n^e ordre.

Il en est de même pour la même raison de la distance BB_1.

C. Q. F. D.[1]

[1] Vu l'importance de ce théorème, je crois devoir insister quelque peu. Le point essentiel de la démonstration qui précède est le suivant.

Si les deux arcs AB, A_1B_1 ne se coupent pas, le polygone curviligne formé AA_1B_1B est convexe et ses côtés ne se coupent pas, de telle façon que l'aire AA_1B_1B est tout entière de même signe et ne se compose pas de parties positives et de parties négatives.



En effet, AA_1 ne peut couper BB_1 sans quoi la courbe invariante serait fermée. AB ne peut couper non plus la courbe C, car si par exemple AB coupait AA_1 en A' et le prolongement de BB_1 en B' comme l'indique la figure ci-contre, on prendrait pour points de fermeture A' et B' au lieu de A et de B.

Si AB ne coupe pas C, A_1B_1 ne coupera pas non plus C qui est sa propre conséquente.

Les mêmes observations s'appliquent à la première extension du théorème III. On verrait de la même façon que le polygone curviligne $A_4B_4B_5A_5$ (fig. 3) est convexe si A_4B_5 et A_5B_4 ne se coupent pas.

Remarque. On peut à un certain point de vue regarder une courbe fermée comme un cas particulier d'une courbe quasi-fermée; aussi n'est il pas inutile de faire remarquer que le raisonnement précédent ne s'applique pas au cas où la courbe invariante est fermée, mais seulement au cas où elle est quasi-fermée.

Le corollaire suivant fera comprendre l'importance du théorème III.

Corollaire. Si on a démontré qu'une courbe invariante C est quasi fermée de telle sorte que la distance des points de fermeture A et B est une quantité très petite du n^e ordre *au moins*, si l'on sait de plus que la distance du point A à son conséquent est une quantité finie ou une quantité très petite du $n - 1^e$ ordre *au plus*, si enfin il y a un invariant intégral positif, la courbe C est fermée.

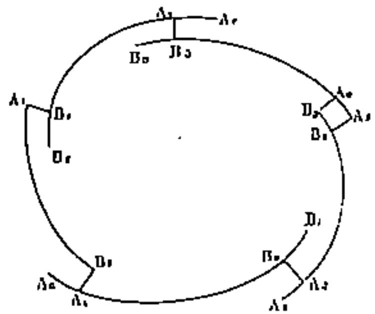
En effet, si elle était seulement quasi-fermée, la distance de A à son conséquent devrait être du n^e ordre.

Le théorème III est susceptible de plusieurs généralisations.

Première extension du théorème III.

Soit A_0B_0 une portion quelconque de courbe tracée sur S et que je puis supposer prolongée un peu au delà de A_0 et B_0. Soient ensuite A_1B_1, A_2B_2, ..., les conséquentes successives de A_0B_0.

Fig. 3.



Supposons que A_nB_n coïncide en partie avec A_0B_0, en partie avec le prolongement de cette courbe de telle sorte que A_0B_0 soit une courbe invariante du n^e ordre.

C'est ainsi que sur la figure 3 j'ai représenté, pour fixer les idées, A_6B_6 comme coïncidant avec A_0B_0 et son prolongement.

De même A_6B_6 devra coïncider avec A_1B_1 et son prolongement, et enfin A_8B_8 avec A_2B_2.

Supposons maintenant que la distance A_0B_p soit une quantité très petite du q^e ordre. Nous admettrons en général que p est premier avec n. Dans le cas de la figure 3, c'est la distance A_0B_3 qui est très petite du q^e ordre. Alors, d'après le lemme précédent, les distances A_1B_4, A_2B_5, A_3B_6, A_4B_7, A_5B_8 seront aussi très petites du q^e ordre. Nous pourrons alors compléter la figure en joignant $A_0B_3, A_1B_4, \ldots, A_5B_8$ par des arcs de courbe dont la longueur totale sera très petite du q^e ordre, et qui ne couperont pas les courbes A_0B_0, A_1B_1, etc.

Je dis que la distance de A_0 à son cinquième conséquent A_5 sera encore une quantité très petite du q^e ordre.

En effet l'aire fermée:

$$\alpha = A_0B_3A_3B_6A_1B_4A_4B_7A_2B_5A_0$$

aura pour conséquente

$$\alpha_1 = A_1B_1A_4B_7A_2B_5A_5B_8A_3B_6A_1.$$

Ainsi, si les arcs A_0B_3 et A_5B_8 ne se coupent pas, c'est à dire si la disposition est celle de la figure 3, l'aire conséquente α_1 se composera de l'aire α plus l'aire $A_0A_5B_8B_3$.

Mais s'il existe un invariant intégral positif, un raisonnement tout pareil à celui du théorème III montrerait que cela est impossible.

Il faut donc que les arcs A_0B_3 et A_5B_8 se coupent et on en conclurait, comme dans la démonstration du théorème III, que la distance A_0A_5 doit être très petite du q^e ordre comme le sont les distances A_0B_3 et A_5B_8.

C. Q. F. D.

De cette généralisation du théorème III, on déduit une généralisation de son corollaire que l'on peut énoncer ainsi.

S'il existe un invariant intégral positif;

Si l'on peut tracer sur une portion de surface sans contact S une courbe A_0B_0 qui soit une courbe invariante du n^e ordre;

Si l'on peut trouver sur cette courbe deux points A_0, B_0, tels que la

distance de A_0 au p^e conséquent B_p de B_0 (p premier avec n) soit une quantité très petite du q^e ordre au moins;

Si enfin la distance de A_0 à son n^e conséquent A_n est une quantité finie ou très petite du $q - 1^e$ ordre au plus, la distance A_0B_p est rigoureusement nulle, de telle sorte que l'ensemble de la courbe A_0B_0 et de ses conséquentes successives forme une courbe fermée qui est une courbe invariante du 1^{er} ordre.

Le théorème III est susceptible d'une deuxième extension que je me bornerai à énoncer parce que je ne compte en faire aucun usage dans la suite:

Deuxième extension du théorème III. Il peut arriver qu'une courbe sans être invariante rigoureusement, soit invariante à des quantités très petites près du p^e ordre.

Considérons par exemple une courbe C, et sa n^e conséquente. Si la distance d'un point quelconque de cette n^e conséquente à la courbe C est une quantité très petite du p^e ordre, je dirai que C est une *courbe péninvariante* du n^e ordre aux quantités près du p^e ordre.

Une courbe péninvariante peut être fermée ou quasi-fermée comme une courbe invariante et les points de fermeture se définiront de la même manière.

Cela posé, je dis que:

Si une courbe péninvariante du n^e ordre aux quantités près du p^e ordre, est quasi-fermée, de telle façon que la distance des points de fermeture A et B soit une quantité très petite du q^e ordre, la distance du point A à son n^e conséquent A_1 sera une quantité très petite d'ordre q au moins si $2q < p$ et d'ordre $p - q$ au moins si $2q > p > q$.

Théorème IV. Considérons une portion de surface sans contact S que je supposerai simplement connexe. Imaginons que la position d'un point sur S soit déterminée par un système particulier de coordonnées que je vais définir et qui est analogue aux coordonnées polaires. Soit O un point quelconque de S; imaginons qu'à ce point viennent aboutir une infinité de branches de courbes, de la même façon que dans les coordonnées polaires les rayons vecteurs viennent aboutir au pôle.

Nous supposerons que deux quelconques de ces branches de courbe n'aient d'autre point commun que le point O et nous définirons une quelconque de ces branches de courbe par l'angle θ que sa tangente en O fait avec une droite fixe passant par O.

Nous supposerons d'ailleurs que chacune de ces branches de courbe se termine au point O.

Considérons maintenant un second système de courbes que je supposerai fermées, s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O. J'admettrai de plus qu'une courbe quelconque du second système et une branche de courbe quelconque du premier système ont un point commun et un seul.

Considérons une branche de courbe fixe B_0 du premier système et soit P le point où elle coupe une courbe mobile C du second système. Soit ρ la longueur de l'arc de la courbe B_0 compris entre les points O et P. On pourra définir la courbe mobile C par la quantité ρ.

Je suppose enfin que par un point P quelconque de S, passe une branche du premier système et une seule; une courbe du second système et une seule. Nous pourrons alors nous servir des coordonnées ρ et θ pour définir la position du point P sur S.

Cela posé, voici le théorème que je me propose de démontrer:

Soit α une aire simplement connexe faisant partie de S et limitée par une courbe fermée k. Soit α_n sa n^e conséquente limitée par une courbe fermée k_n. Si les deux aires α et α_n ont une partie commune et que O appartienne à cette partie commune; si les points de k ont même coordonnée θ que leurs n^{es} conséquents; si la courbe k rencontre chacune des branches de courbe du 1er système en un seul point (de telle sorte que quand on parcourt la courbe fermée k, θ varie de 0 à 2π); si de plus il y a un invariant intégral positif, deux au moins des points de k coïncideront avec leurs n^{es} conséquents.

En effet un élément d'aire quelconque $d\omega$ appartenant à S pourra s'exprimer en fonction de ρ et de θ de la façon suivante

$$d\omega = \varphi(\rho, \theta) d\rho d\theta,$$

la fonction $\varphi(\rho, \theta)$ étant essentiellement positive.

S'il y a un invariant intégral positif, il existe une intégrale

$$J = \int MH d\omega = \int MH\varphi d\rho d\theta$$

qui a la même valeur pour α et pour α_n et qui est telle que

$$MH\varphi > 0.$$

Soient ρ_0 et θ_0 les coordonnées d'un point quelconque de k, ρ_n et $\theta_n = \theta_0$ celles de son n^e conséquent qui appartient par définition à k_n.

Soit

$$X = \int_{\rho_0}^{\rho_n} MH\varphi d\rho.$$

(Dans le calcul de l'intégrale X, on doit regarder θ comme une constante égale à θ_0.)

La quantité sous le signe $\int$ étant positive, l'intégrale X est positive si $\rho_n > \rho_0$ et négative si $\rho_n < \rho_0$; elle ne peut s'annuler que si $\rho_n = \rho_0$.

D'ailleurs d'après la définition de X, cette intégrale est une fonction de θ_0.

Soient J_0 et J_n les valeurs de l'intégrale J étendues respectivement à l'aire α et à l'aire α_n. On aura d'après la définition même des intégrales doubles:

$$J_n - J_0 = \int_0^{2\pi} X d\theta_0.$$

L'intégrale du second membre devra être prise tout le long de la courbe k. Quand on aura fait tout le tour de cette courbe fermée, la fonction X devra être revenue à sa valeur initiale.

Mais J étant un invariant, $J_n - J_0$ doit être nul. X ne peut donc être toujours de même signe et comme cette quantité a même valeur aux deux limites d'intégration, il faut que X s'annule deux fois entre ces deux limites.

Or quand X est nul, $\rho_0 = \rho_n$ et le point correspondant de k coïncide avec son n^e conséquent.

Donc deux au moins des points de k coïncident avec leurs n^{es} conséquents.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème IV sans faire intervenir le système particulier de coordonnées que nous avons défini plus haut et dire:

Si une courbe fermée k fait partie d'une portion de surface sans contact S simplement connexe et que k_n soit sa n^e conséquente; si l'on peut joindre chacun des points de k à son n^e conséquent par des arcs de courbe situés sur S et de telle façon que deux quelconques de ces arcs n'aient aucun point commun; si de plus il y a un invariant intégral positif, deux au moins des points de k coïncideront avec leurs n^{es} conséquents.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 1. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X devront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.

Supposons que pour la valeur o du paramètre μ, ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π.

Posons:

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu\frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i. Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. Les équations sans second membre:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \xi_k \frac{dX_i}{dx_k} \tag{2}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π.

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai:

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π.

2°. Les équations sans second membre admettent une solution périodique de période 2π.

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante:

$$\xi_i = \mu t\psi_{1,i}(t) + \mu\psi_{0,i}(t),$$

les ψ étant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu[t^m\psi_{m,i}(t) + t^{m-1}\psi_{m-1,i}(t) + \ldots + \psi_{0,i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près.

Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ; posons par conséquent:

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1,i} + \mu^2\varphi_{2,i} + \ldots.$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i, on trouvera

$$X_i = X_{0,i} + \mu X_{1,i} + \mu^2 X_{2,i} + \ldots.$$

Il est clair que les $X_{0,i}$ ne dépendent que des φ_i, les $X_{1,i}$ des φ_i et des $\varphi_{1,i}$, les $X_{2,i}$ des $\varphi_{1,i}$ et des $\varphi_{2,i}$ etc. De plus si les $\varphi_{k,i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π, il en sera de même des $X_{k,i}$.

Nous avons de plus

$$X_{n,i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n,k} + Y_{n,i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n,i}$ ne dépendra que des φ_i, des $\varphi_{1,i}$, des $\varphi_{2,i}, \ldots$, des $\varphi_{n-1,i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n,i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes

$$\frac{d\varphi_{n,i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n,k} + Y_{n,i}. \tag{3}$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités

$$\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \ldots, \varphi_{n-1,i}$$

à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n,i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coëfficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n,i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k}\varphi_{n,k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1,i} + \mu^2\varphi_{2,i} + \ldots$$

dont les coëfficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques, ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du »Calcul des Limites.»

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \beta_i + a_i\mu + \Sigma b_{ik}\beta_k + \Sigma[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]\mu^m\beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots\beta_n^{p_n}\\ &= \beta_i + \psi_i,\end{aligned}$$

les a, les b et les $[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]$ étant des coëfficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où:

$$\gamma_i = \beta_i.$$

On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{4}$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables.

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est à dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et on trouve comme solution:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ.

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

Mais il peut arriver que, bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β soit nul, les équations (4) puissent néanmoins être résolues et par conséquent que les équations (1) admettent une solution périodique pour les petites valeurs de μ. Il en sera ainsi en général quand les déterminants compris dans la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \frac{d\psi_1}{d\mu} & \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\mu} & \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\mu} & \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} \end{matrix}\right\|$$

seront tous nuls.

Supposons donc que les équations (1) admettent une solution périodique pour $\mu = 0$ et pour les valeurs de μ suffisamment petites, plus petites par exemple que μ_0, et qu'elles n'en admettent plus pour $\mu > \mu_0$. De quelle façon la solution périodique disparaîtra-t-elle au moment où μ atteindra la valeur μ_0? On pourrait démontrer que les choses se passent comme il suit.

Pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon$, les équations (1) admettent *deux* solutions périodiques; pour $\mu = \mu_0$, ces deux solutions se confondent en une seule et enfin pour $\mu > \mu_0$, ces deux solutions disparaissent.

Pour le faire voir, reprenons les équations (4):

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0 \tag{4}$$

et supposons que le déterminant fonctionnel des ψ s'annule quand les β et le paramètre μ sont nuls à la fois. Il est alors impossible, du moins en général, de tirer des équations les β_i sous la forme:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec cette variable. Mais il sera possible en général de tirer des $n-1$ premières équations (4)

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0$$

les $n-1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; on trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

les H étant des fonctions holomorphes de β_n et de μ s'annulant avec ces variables.

Substituons H_i à la place de β_i dans la n^e équation:

$$\psi_n = 0.$$

Nous obtiendrons une équation

$$\Phi = 0$$

dont le 1^er membre sera une fonction holomorphe de μ et de β_n.

Pour $\mu = \beta_n = 0$, on aura

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple.

Supposons, ce qui est le cas le plus général, que ce soit une racine double. Alors nous pourrons écrire, en développant Φ suivant les puissances croissantes de μ et de β_n:

$$\begin{aligned} \Phi = {} & A_2\beta_n^2 + A_3\beta_n^3 + A_4\beta_n^4 + \ldots \\ & + B_0\mu + B_1\mu\beta_n + B_2\mu\beta_n^2 + \ldots \\ & + C_0\mu^2 + C_1\mu^2\beta_n + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On peut alors tirer de l'équation $\Phi = 0$, si A_2 et B_0 ne sont pas nuls, β_n en fonction de μ; on trouve:

$$\beta_n = \theta_n(\nu),$$

où

$$\nu = \pm\sqrt{-\frac{B_0\mu}{A_2}}$$

et où θ_n est une fonction holomorphe de ν à coefficients réels et s'annulant avec cette variable.

Si $\frac{B_0}{A_2} > 0$, ν est réel quand $\mu < 0$ et imaginaire quand $\mu > 0$; c'est le contraire quand $\frac{B_0}{A_1} < 0$. Supposons pour fixer les idées que B_0 et A_2 soient de même signe.

Quand μ sera négatif, on trouvera pour β_n deux valeurs réelles (correspondant au double signe du radical $\sqrt{-\frac{B_0\mu}{A_2}}$) et par conséquent deux solutions périodiques. Quand $\mu = 0$, ces deux solutions périodiques se confondent, parce que les deux valeurs de β_n se réduisent à 0; quand $\mu > 0$ ces deux solutions périodiques disparaissent parce que ν devient imaginaire.

Une discussion plus approfondie montrerait que les conclusions subsistent dans le cas où la racine $\beta_n = 0$. au lieu d'être une racine double de l'équation $\Phi = 0$ est une racine triple ou d'ordre supérieur.

Lorsque des équations différentielles dépendent d'un paramètre arbitraire μ et admettent une solution périodique, et si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, la solution périodique ne pourra disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.

C'est ainsi que, dans une équation algébrique dépendant d'un paramètre μ, si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, une racine réelle ne pourra disparaître et devenir imaginaire, qu'après s'être confondue avec une autre racine réelle.

Les solutions périodiques disparaissent par couples, à la façon des racines réelles d'une équation algébrique.

Le cas particulier qui nous arrêtera le plus sera celui où les équations (1) admettent pour $\mu = 0$ une infinité de solutions périodiques de période 2π.

Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes quand on y fait $\mu = 0$ et par exemple on peut déduire la n^e des $n-1$ premières. Considérons donc ces $n-1$ premières équations:

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0.$$

En général on pourra supposer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})}$$

n'est pas nul. On pourra donc résoudre nos $n-1$ équations par rapport aux $n-1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

On trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

les H étant des fonctions holomorphes de β_n et de μ s'annulant avec ces variables.

Substituons H_i à la place de β_i dans la n^e équation (4)

$$\psi_n = 0.$$

Nous obtiendrons une équation:

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera une fonction holomorphe de μ et de β_n. Cette fonction holomorphe doit contenir μ en facteur. En effet, pour $\mu = 0$, les n équations (4) se réduisent à $n-1$ d'entre elles et par conséquent l'équation $\Phi = 0$ doit devenir identique.

Posons donc

$$\Phi = \mu\Phi_1,$$

Φ_1 sera encore holomorphe. Appelons Φ_1^0 ce que devient Φ_1 quand on y fait $\mu = 0$ et envisageons l'équation:

$$\Phi_1^0 = 0$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe de β_n seulement. Trois cas peuvent se présenter:

1°. Ou bien cette équation n'admet aucune racine; on peut en conclure que pour les petites valeurs de μ les équations (1) n'ont pas de solution périodique de période 2π.

2°. Ou bien cette équation admet une ou plusieurs racines simples. Dans ce cas les équations (1) ont des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

En effet supposons que pour:

$$\beta_n = \beta_n^0$$

on ait:

$$\Phi_1^0 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1^0}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

Alors l'équation:

$$\Phi_1 = 0$$

pourra être résolue par rapport à β_n puisque pour

$$\mu = 0, \qquad \beta_n = \beta_n^0$$

on a

$$\Phi_1 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

On obtient ainsi:

$$\beta_n = \theta_n(\mu),$$

θ_n étant holomorphe en μ. En remplaçant β_n par θ_n dans les H_i, on trouve:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

θ_i étant holomorphe.

L'existence d'une solution périodique pour les petites valeurs de μ est donc établie. De plus pour une pareille solution périodique, le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β n'est pas nul si μ est suffisamment petit sans être nul.

3°. Ou bien l'équation $\Phi_1^0 = 0$ n'a que des racines multiples et alors nous ne pouvons rien affirmer.

Si toutefois cette équation a une racine triple, ou plus généralement une racine d'ordre impair, nous pourrions affirmer que pour les petites valeurs de μ, il existe une solution périodique, mais nous ne saurions plus si le déterminant fonctionnel correspondant n'est pas nul.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t. Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations.

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avions supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π. Si au contraire les X_i sont indépendants de t, la période d'une solution périodique peut être quelconque.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité. Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t+h), \qquad x_2 = \varphi_2(t+h), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t+h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t.

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ, de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n + 1$ inconnues

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau$$

les n équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{5}$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. Cela est possible à moins que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants contenus dans la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{Vmatrix}$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.)

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront pour les petites valeurs de μ, une solution périodique de période $T + \tau$.

§ 2. *Exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations:

$$(1) \qquad \frac{dx^i}{dt} = X_i$$

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (voir Chapitre I) des équations (1) en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ.

Ces équations aux variations s'écriront:

$$(2) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ_i et leurs coëfficients $\frac{dX_i}{dx_k}$, (quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$) sont des fonctions périodiques de t. Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coëfficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des intégrales de ces équations; on obtient n intégrales particulières de la forme suivante:

$$(3) \qquad \begin{array}{llll} \xi_1 = e^{\alpha_1 t} S_{11}, & \xi_2 = e^{\alpha_1 t} S_{21}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_1 t} S_{n1}, \\ \xi_1 = e^{\alpha_2 t} S_{12}, & \xi_2 = e^{\alpha_2 t} S_{22}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_2 t} S_{n2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1 = e^{\alpha_n t} S_{1n}, & \xi_2 = e^{\alpha_n t} S_{2n}, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_n t} S_{nn}. \end{array}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les intégrales des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

les équations (2) admettraient deux intégrales particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i,1}$$

et

$$\xi_i = t e^{\alpha_1 t} S_{i,1} + e^{\alpha_1 t} S_{i,2},$$

les $S_{i,1}$ et les $S_{i,2}$ étant des fonctions périodiques de t.

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t, mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4) d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n-1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la dynamique. Ecrivons-les donc sous la forme:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1'}$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous pourrons supposer, soit que F est indépendant de t; soit que F dépend

non seulement des x et des y, mais encore de t, et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π.

Supposons que les équations (1') admettent une solution périodique de période 2π:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que l'intégrale double:

$$\iint (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ_i', η_i' sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution:

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \ldots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de cette substitution linéaire.

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T. Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire:

$$\Sigma(\xi_i\eta_i' - \xi_i'\eta_i).$$

Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose:

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coëfficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coëfficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η, s'ils sont originairement très petits resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire*, du moins de la stabilité *temporaire*.

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations:

$$\xi_i = \Sigma A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coëfficients constants et les S_{ik} des séries trigonom triques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t\sqrt{-\alpha_k^2} + i \sin t\sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coëfficients de stabilité devie réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit pl de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une sér dont le terme général est de la forme:

$$Ae^{ht} \cos(kt + mt + l)$$

où $(h + ik)^2$ est un des coëfficients de stabilité, où m est un entier et et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ain mis en évidence.

Si deux des coëfficients de stabilité deviennent égaux entre eux, o si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui repr sente ξ_i des termes de la forme:

$$Ate^{ht}\cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad At\cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une séri toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le sign sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht}, ou enfin en dehors des signe trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coëfficients de stabilité sont réels, négatifs et distinct le temps n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aur stabilité temporaire.

Si l'un des coëfficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtr sous un signe exponentiel; si deux des coëfficients sont égaux ou qu l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coëfficients ne sont pas réels, négatifs et distincts il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t, l'un des n coëfficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue abaisser à $2n - 1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n - 1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n - 2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coëfficients de stabilité, sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ, et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \gtrless 0$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.

Ce déterminant peut s'écrire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \ldots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2\alpha\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2\alpha\pi} & \ldots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \ldots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) *qui dépendent d'un paramètre* μ *admettent pour* $\mu = 0$ *une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de* μ.

§ 3. *Solutions périodiques des équations de la dynamique.*

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, & \frac{dx_3}{dt} = \frac{dF}{dy_3}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}, & \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF}{dx_3}, \end{array}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y, indépendante de t.

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est à dire que F est une fonction periodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π, de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π. (Cf. chapitre I.)

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \dots.$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que:

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \qquad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que

$$-\frac{dF_0}{dx_1}, \quad -\frac{dF_0}{dx_2}, \quad -\frac{dF_0}{dx_3}$$

qui ne dépendent que de x_1, x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abréger n_1, n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1, x_2 et x_3. Il vient alors:

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3.$$

ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T. Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, c'est à dire que:

$$n_1 T, \; n_2 T \quad \text{et} \quad n_3 T$$

soient des multiples de 2π.

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T, ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \; \frac{2\pi}{n_2} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore de solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à 0.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant [1]

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \dots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \dots, \\ x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \dots, \\ y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\ y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\ y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots. \end{aligned}$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \quad \frac{d}{dx_2^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2, \quad \frac{d}{dx_3^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

[1] Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (2) sont des indices et non des exposants.

On a de plus:

$$y_1^0 = n_1 t + \varpi_1.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F_1 à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (2), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \dots$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0; que

(3) $$\Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1\frac{dF_0}{dx_3^0}$$

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \theta_k + x_1^k\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k\frac{dF_0}{dx_3^0} = \theta_k - n_1x_1^k - n_2x_2^k - n_3x_3^k,$$

où θ_k dépend seulement

des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1}
des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction θ_k est une fonction périodique de période 2π. L'équation (3) montre que $\theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

(4) $$\frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0}$$

et

(5) $$\frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \qquad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \qquad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0},$$

et plus généralement:

(4') $$\frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0}$$

et:

(5') $$\frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\theta_k}{dx_i^0} - x_1^k\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_i^0} - x_2^k\frac{d^2F_0}{dx_2^0dx_i^0} - x_3^k\frac{d^2F_0}{dx_3^0dx_i^0}.$$

Intégrons d'abord les équations (4). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs:

$$n_1t + \varpi_1, \; n_2t + \varpi_2, \; n_3t + \varpi_3.$$

Nous pouvons d'ailleurs toujours choisir l'origine des temps de telle façon que ϖ_1 soit nul. Alors les seconds membres des équations (4) sont des fonctions périodiques de t de période T; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (4) soient des fonctions périodiques de t, il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tout connus.

Je puis écrire en effet:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1y_1^0 + m_2y_2^0 + m_3y_3^0 + h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0. J'écrirai pour abréger:

$$F_1 = \Sigma A \sin\omega$$

en posant

$$\omega = m_1y_1^0 + m_2y_2^0 + m_3y_3^0 + h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \Sigma Am_1\cos\omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \Sigma Am_2\cos\omega, \qquad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \Sigma Am_3\cos\omega$$

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t. Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\psi = \mathrm{S} A \sin\omega, \qquad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,\ \omega = h + m_2\varpi_2 + m_3\varpi_3)$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coefficient de t est nul. Nous aurons alors:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \mathrm{S} A m_2 \cos\omega, \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_3} = \mathrm{S} A m_3 \cos\omega.$$

Si donc on a:

$$\text{(6)} \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0,$$

il viendra:

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{S} A m_1 \cos\omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_2 \cos\omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_3 \cos\omega = 0.$$

La première des équations (7) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 \mathrm{S} A m_1 \cos\omega + n_2 \mathrm{S} A m_2 \cos\omega + n_3 \mathrm{S} A m_3 \cos\omega = 0.$$

Si donc les relations (6) sont satisfaites, les séries $\sum A m_1 \cos\omega$ ne contiendront pas de terme tout connu, et les équations (4) nous donneront:

$$x_1^1 = \sum \frac{A m_1 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \sum \frac{A m_2 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \sum \frac{A m_3 \sin\omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1, C_2^1 et C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (6). La fonction ψ est une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π. De plus elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (6).

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (5) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1.

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1. Je puis donc écrire les équations (5) sous la forme suivante:

$$\text{(8)} \qquad \frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0\, dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0\, dx_i^0},$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1, C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t, il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i, je devrai avoir:

$$\text{(9)} \qquad C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0\, dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0\, dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0\, dx_i^0} = H_i^0.$$

Les trois équations linéaires (9) déterminent les trois constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1.

Il n'y aurait d'exception que si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est à dire si le *hessien* de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0 était nul; nous exclurons ce cas.

Les équations (8) me donneront donc:

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (4') en y faisant $k=2$ et $i=1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1.

Il est aisé de voir que nous avons:

$$\Theta_2 = \Omega_2 + y_1^1\frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1\frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1\frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut:

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \sum A m_i \cos\omega.$$

Les équations (4') s'écrivent alors:

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1\frac{d^2F_1}{dy_k^0\,dy_i^0}$$

ou

$$\frac{dx_i^2}{dt} = H_i' - k_1^1\sum Am_1m_i\sin\omega - k_2^1\sum Am_2m_i\sin\omega - k_3^1\sum Am_3m_i\sin\omega, \tag{10}$$

H_i' étant une fonction périodique de t, que l'on peut regarder comme entièrement connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (10), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

Nous allons d'abord supposer:

$$k_1^1 = 0;$$

nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H_i', ces trois équations s'écriront:

$$\begin{aligned} E_1 &= k_2^1 \mathrm{S} Am_2m_1\sin\omega + k_3^1\mathrm{S} Am_3m_1\sin\omega,\\ E_2 &= k_2^1\mathrm{S} Am_2^2\sin\omega \quad + k_3^1\mathrm{S} Am_3m_2\sin\omega,\\ E_3 &= k_2^1\mathrm{S} Am_2m_3\sin\omega + k_3^1\mathrm{S} Am_3^2\sin\omega,\end{aligned} \tag{11}$$

en conservant au signe de sommation S le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (11) que j'écrirai:

$$-E_2 = k_2^1\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} + k_3^1\frac{d^2\psi}{d\varpi_2\,d\varpi_3},$$

$$-E_3 = k_2^1\frac{d^2\psi}{d\varpi_2\,d\varpi_3} + k_3^1\frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2}.$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1, à moins que le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (10) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante:

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (10) nous servir des considérations suivantes:

Les équations (1) admettent une intégrale:

$$F = B,$$

B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant:

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a:

$$\Phi_0 = B_0, \qquad \Phi_1 = B_1, \qquad \Phi_2 = B_2, \ldots,$$

B_0, B_1, B_2 etc. étant autant de constantes différentes.

Le premier membre de l'équation:

$$\Phi_2 = B_2$$

dépend des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1, de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2 que nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2, de C_2^2 et de C_3^2.

Nous pouvons conclure de là que la première des équations (11) doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (11) ne sont pas distinctes.

Prenons maintenant les équations (5') et faisons-y $k = 2$; nous obtiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme:

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_3^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Reprenons ensuite les équations (4') en y faisant $k = 3$: si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2, puis les x_i^3 sous la forme:

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ, périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0 par rapport aux x_i^0 était nul ou si le hessien de ϕ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 était nul.*

On pourrait démontrer directement la convergence de ces séries par les procédés ordinaires du calcul des limites de CAUCHY; mais d'autre

part cette convergence est une conséquence nécessaire de l'existence même des solutions périodiques; je préfère donc employer le même raisonnement que dans ce paragraphe (1) pour établir cette existence.

Nous avons vu que les équations (1) admettent pour solution quand $\mu = 0$

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3,$$

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

les a et les ϖ étant des constantes d'intégration, et les n des fonctions des a.

Nous avons vu en outre que si

$$n_1 T, \; n_2 T, \; n_3 T$$

sont multiples de 2π, cette solution est périodique de période T.

Supposons maintenant que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement:

$$x_1 = a_1 + \delta a_1, \qquad x_2 = a_2 + \delta a_2, \qquad x_3 = a_3 + \delta a_3,$$

$$y_1 = \varpi_1 + \delta\varpi_1, \qquad y_2 = \varpi_2 + \delta\varpi_2, \qquad y_3 = \varpi_3 + \delta\varpi_3.$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1,\\
x_2 &= a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2,\\
x_3 &= a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3,\\
y_1 &= \varpi_1 + n_1 T + \delta\varpi_1 + \Delta\varpi_1,\\
y_2 &= \varpi_2 + n_2 T + \delta\varpi_2 + \Delta\varpi_2,\\
y_3 &= \varpi_3 + n_3 T + \delta\varpi_3 + \Delta\varpi_3.
\end{aligned}$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T c'est que l'on ait:

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0. \tag{12}$$

Les six équations (12) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F = \text{const.}$ est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y, on a:

$$F(a_i + \delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i) = F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + n_i T + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i)$$
$$= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i).$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (12). Je supposerai de plus:

$$\varpi_1 = \delta\varpi_1 = 0.$$

Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta\varpi_i$ sont des fonctions holomorphes de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (12) $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$ en fonctions de μ.

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent $\Delta a_1, \Delta a_2$ et Δa_3, développés suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ, et nous écrirons par conséquent les cinq équations (12) que nous avons à résoudre sous la forme:

$$\frac{\Delta a_1}{\mu} = \frac{\Delta a_2}{\mu} = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0. \tag{13}$$

Il est aisé de voir que si dans les deux premières équations (13) on fait $\mu = 0$, ces équations se ramènent aux relations (6)

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Nous choisirons donc ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire à ces relations. Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (13) sont satisfaites quand on y fait à la fois:

$$\mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Nous pourrons donc tirer des équations (13) les cinq inconnues δa_i

et $\delta\varpi_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ, s'annulant avec μ. Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_1}{\mu}, \frac{\Delta a_2}{\mu}, \Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3\right)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2, \delta\varpi_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2$ et $\Delta\varpi_3$ sont indépendants de $\delta\varpi_2$ et de $\delta\varpi_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_1}{\mu}, \frac{\Delta a_2}{\mu}\right)}{\partial(\delta\varpi_2, \delta\varpi_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)}.$$

Le premier de ces déterminants est égal au hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 et le second au hessien de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (13) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ, il existera une solution périodique de période T.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T, mais les solutions de période peu différente de T. Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3; nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n_1', n_2', n_3', pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T' aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n_1'}, \frac{2\pi}{n_2'}, \frac{2\pi}{n_3'}$.

Si nous prenons en particulier:

$$n_1' = n_1(1 + \varepsilon), \qquad n_2' = n_2(1 + \varepsilon), \qquad n_3' = n_3(1 + \varepsilon)$$

les trois nombres n_1', n_2', n_3' seront commensurables entre eux puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Ils nous conduiront donc à une solution périodique de période:

$$T' = \frac{T}{1 + \varepsilon}$$

de telle façon que nous aurons:

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi_i'(t, \mu, \varepsilon), \tag{14}$$

les φ_i et les φ_i' étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε, et périodiques en t, mais de façon que la période dépende de ε.

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (14), F doit devenir une constante indépendante du temps (puisque $F =$ const. est une des intégrales des équations (1)). Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables.

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question, l'équation

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ. Si donc nous donnons arbitrairement B, il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ.

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ψ ne dépend plus que d'une seule variable ϖ_2. Les relations (6) se réduisent alors à

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0 \tag{15}$$

et le hessien de ψ se réduit à $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$. D'où cette conclusion:

A chacune des racines simples de l'équation (15) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair.

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en Mécanique Céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t). \tag{16}$$

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t, développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t.

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (16) à la forme canonique des équations de la dynamique. Cela se fera en posant:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi)d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \tag{17}$$

auxquelles nous pourrons adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi} \tag{17}$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (16) s'écrit

$$\rho = h\,\mathrm{sn}(gt + \varpi), \qquad \sigma = hg\,\mathrm{cn}(gt + \varpi)\,\mathrm{dn}(gt + \varpi) \tag{18}$$

où g et ϖ sont deux constantes d'intégration et où h, ainsi que le module du sinus amplitude sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ, quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2, définies comme il suit. Nous aurons d'abord:

$$x_2 = \eta, \qquad y_2 = \xi.$$

Des équations (18) qui donnent ρ et σ en fonctions de g et de $gt + \varpi$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \varpi$ en fonctions de ρ et de σ. Il vient:

$$g = \chi_1(\rho, \sigma), \qquad gt + \varpi = \chi_2(\rho, \sigma).$$

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho, \sigma)$ et pour y_1

$$y_1 = \frac{k}{2\pi}\chi_2(\rho, \sigma),$$

k désignant la période réelle de $\operatorname{sn}(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1 les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \qquad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2.

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (16) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (16) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ. L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (16) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, à des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

§ 4. *Calcul des exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,3)$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \qquad (i, k=1,2,3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant:

$$(3) \qquad \xi_i = e^{at}S_i, \qquad \eta_i = e^{at}T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t. Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme (les équations linéaires (2) étant du sixième ordre). Mais il importe d'observer, que dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérescente.

Cela posé, supposons d'abord $\mu = 0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Alors les équations (2) se réduisent à:

$$(2') \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\xi_k.$$

Les coëfficients de ξ_k dans la seconde équation (2') sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2')

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \qquad \eta_1 = \eta_1^0, \qquad \eta_2 = \eta_2^0, \qquad \eta_3 = \eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons maintenant chercher à développer α, S_i et T_i, non pas suivant les puissances croissantes de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$
$$S_i = S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + S_i^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$
$$T_i = T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + T_i^3\mu\sqrt{\mu} + \dots.$$

Alors on a:

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$(4)\qquad \begin{gathered} \xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \dots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \dots), \\ \frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left| \begin{array}{l} \frac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\frac{dS_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \dots \end{array} \right|, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left| \begin{array}{l} \frac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\frac{dT_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \dots \end{array} \right|. \end{gathered}$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coefficients dans les équations (2) en écrivant:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2F}{dy_i dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^1 + \mu^2 A_{ik}^2 + \dots, \\ \frac{d^2F}{dy_i dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^1 + \mu^2 B_{ik}^2 + \dots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^1 + \mu^2 C_{ik}^2 + \dots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^1 + \mu^2 D_{ik}^2 + \dots. \end{aligned}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

On observera que:

$$(6)\qquad \begin{gathered} A_{ik}^0 = B_{ik}^0 = D_{ik}^0 = 0, \\ C_{ik}^n = C_{ki}^n, \qquad B_{ik}^n = B_{ki}^n, \qquad A_{ik}^n = -D_{ki}^n. \end{gathered}$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ, des η, de leurs dérivées et des dérivées secondes de F. Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifierons ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \text{ etc.} \quad S_i^0,\ S_i^1,\ \dots,\ T_i^0,\ T_i^1,\ \dots.$$

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Egalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$, il vient:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^0 &= \Sigma_k A_{ik}^0 S_k^1 + \Sigma_k B_{ik}^0 T_k^1, \\ \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 T_i^0 &= \Sigma_k C_{ik}^0 S_k^1 + \Sigma_k D_{ik}^0 T_k^1. \end{aligned}$$

Egalons les termes en μ, il vient:

$$(8)\qquad \frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \Sigma_k(A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^1 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^1 T_k^0), \qquad (i=1,2,3)$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT_i^2}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent:

$$\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1\eta_i^0 = \Sigma_k C_{ik}^0 S_k^1.$$

La première de ces équations montre que S_1^1, S_2^1 et S_3^1 sont des constantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a:

$$(9) \qquad \alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1,$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0, les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1.

De son côté l'équation (8) s'écrira:

$$\frac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^1 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^1 sont des fonctions périodiques de t; développons-les d'après la formule de FOURIER et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^1. Il viendra:

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra:

$$(10) \qquad \alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik}(C_{k1}^0 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1).$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1, 2$ et 3, nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1. En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du 3^{me} degré qui déterminera α_1^2.

Si nous posons pour abréger

$$c_{ik} = b_{i1} C_{1k}^0 + b_{i2} C_{2k}^0 + b_{i3} C_{3k}^0,$$

l'équation due à cette élimination s'écrira:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} - \alpha_1^2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \alpha_1^2 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{13}^0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C_{21}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C_{31}^0 & C_{32}^0 & C_{33}^0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coefficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k, les S_i^m et les T_i^m. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.[1]

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1, nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C_{ik}^0 et b_{ik}.

On a évidemment:

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0}$$

et

$$B_{ik}^1 = \frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0}$$

ou

$$B_{ik}^1 = -\sum A m_i m_k \sin \omega \qquad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = -\mathrm{S} A m_i m_k \sin \omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que

[1] Voir *Note II.*

soient les valeurs entières attribuées à m_1, m_2 et m_3. La sommation représentée par le signe S s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe S nous avons par conséquent:

$$\omega = m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k} \qquad (\text{pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation, transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{32} & b_{33} & 0 \\ C^0_{13} & C^0_{23} & C^0_{33} & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C^0_{12} & C^0_{22} & C^0_{32} & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C^0_{11} & C^0_{21} & C^0_{31} & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & 0 \\ C^0_{12} & C^0_{22} & -\alpha_1 & n_2 \\ C^0_{11} & C^0_{21} & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$n_1^2 \alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}(n_1^2 C^0_{22} - 2 n_1 n_2 C^0_{12} + n_2^2 C^0_{11}).$$

L'expression $n_1^2 C^0_{22} - 2 n_1 n_2 C^0_{12} + n_2^2 C^0_{11}$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2. Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrons regarder $n_1^2 C^0_{22} - 2 n_1 n_2 C^0_{12} + n_2^2 C^0_{11}$ comme une constante donnée. Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2, on forme l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0, \tag{15}$$

qui est l'équation (15) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (15) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ. Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de ϖ_2 correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (15) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le paragraphe 2 de ce chapitre.

Ainsi, si μ est suffisamment petit, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables.

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (15) aurait des racines multiples.

§ 5. *Solutions asymptotiques.*

Soient:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t.

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t, elles sont périodiques de période 2π.

Soit:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π. Posons:

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i. \tag{2}$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t, périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ.

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n, \tag{3}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connaît la forme de leur intégrale générale, on trouve:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn};
\end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t.

Si alors nous posons:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

les équations (2) deviendront:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i \tag{2'}$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ.

Nous pourrons d'ailleurs écrire

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^p + \ldots; \tag{2''}$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η.

Quant aux équations (3), elles deviennent:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i\eta_i. \tag{3'}$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').

Je dis que nous devrons trouver:

$\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire alors:

$$\eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \ldots + \eta_i^p + \ldots, \tag{4'}$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A.

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans H_i^p et nous trouverons:

$$H_i^p = H_i^{p,p} + H_i^{p,p+1} + \ldots + H_i^{p,q} + \ldots,$$

$H_i^{p,q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A.

Nous trouverons alors:

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \qquad \eta_i^1 = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = H_i^{2,2}, \qquad \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 = H_i^{2,3} + H_i^{3,3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = H_i^{2,q} + H_i^{3,q} + \ldots + H_i^{q,q} = K_q.$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence

$$\eta_i^1, \eta_i^2, \ldots, \eta_i^q, \ldots.$$

En effet K_q ne dépend que des $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{q-1}$. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrons écrire K_q sous la forme suivante:

$$K_q = \sum A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} e^{t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)} \psi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ψ une fonction périodique.

On peut écrire encore:

$$\psi = \sum C e^{\gamma t\sqrt{-1}},$$

C étant un coefficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abréger:

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} = A^\beta, \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \sum \alpha\beta,$$

et il viendra:

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = \sum C A^\beta e^{t(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\eta_i^q = \sum \frac{C A^\beta e^{t(\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta)}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait:

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t. Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i. \tag{5}$$

En effet remplaçons les équations (2') par les suivantes:

$$\eta_i = A_i e^{\alpha_i t} + \overline{H}_i^2 + \overline{H}_i^3 + \ldots + \overline{H}_i^p + \ldots. \tag{2''}$$

Définissons $\overline{H}_i^p$. On voit sans peine que H_i^p est de la forme suivante

$$H_i^p = \sum C \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p, γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors:

$$\overline{H}_i^p = \sum |C| \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques.

On peut tirer des équations (2″) les η sous la forme suivante:

$$\eta_i = \sum M A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{t \Sigma \alpha \beta}. \tag{4″}$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β. Si on compare avec les séries tirées de (2′) qui s'écrivent:

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t(\Sigma \alpha \beta + \gamma\sqrt{-1})}$$

voici ce qu'on observe: 1° M est réel positif et plus grand que $|N|$. 2° Π désigne le produit des diviseurs (5) ($q < \Sigma\beta$).

Si donc la série (4″) converge pourvu que l'on ait:

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R, \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε, la série (4′) convergera pourvu que

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R\varepsilon.$$

Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge:

Si l'expression

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma \alpha \beta - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de γ; c'est à dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine.

Ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi.

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n - k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4′) restera convergente si on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution gé-

nérale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs:

$$k = \frac{n}{2}.$$

Si maintenant nous supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ de telle sorte que ces fonctions X soient développables suivant les puissances de μ, les quantités η_i seront encore représentables par les séries (4′), mais ces séries seront développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, mais encore suivant les puissances de μ.

Il peut arriver toutefois que ces séries (4′) au lieu d'être développées suivant les puissances de μ, le soient suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. En effet les α_i sont aussi des fonctions de μ; il arrivera en général que les α_i^2 seront développés suivant les puissances de μ, mais dans certains cas particuliers, $\sqrt{\mu}$ s'introduira dans les α_i et par conséquent dans les séries (4′). C'est précisément, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, ce qui arrive dans le cas des équations (1) du § 3 de ce chapitre.[1]

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

[1] Les développements contiennent en général à la fois des puissances positives et négatives de $\sqrt{\mu}$. Mais les puissances négatives disparaissent dans les cas où les solutions asymptotiques subsistent pour $\mu = 0$. C'est ce qui arrive dans la plupart des applications et en particulier pour les équations de la dynamique. (Voir Note I.)

Supposons de plus que

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0. \tag{6}$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1, x_2 et t; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées:

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront:

$$e^{x_1}\cos t\,,\ e^{x_1}\sin t \quad \text{et} \quad x_2.$$

De cette façon

1°. A tout système de valeurs des trois quantités x_1, x_2 et t correspondra un point de l'espace.

2°. A tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1, x_2, $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π.

3°. Si l'on fait varier t, (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence.

4°. A la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = 1$.

5°. A la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z.

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2') et (3') relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux

valeurs de l'exposant α; nous pourrons supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développées suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers 0. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques;* car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers 0, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B, la seconde A.

A chacun de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotique.* Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C.

Voici maintenant comment on peut trouver l'équation des surfaces asymptotiques.

Nous avons trouvé pour les séries (4') en y faisant $A = 0$

$$\eta_1 = B^2e^{-2\alpha t}\varphi_2 + B^3e^{-3\alpha t}\varphi_3 + B^4e^{-4\alpha t}\varphi_4 + \ldots,$$

$$\eta_2 = Be^{-\alpha t} + B^2e^{-2\alpha t}\theta_2 + B^3e^{-3\alpha t}\theta_3 + \ldots,$$

les φ et les θ étant des fonctions périodiques du temps. Si entre ces deux équations on élimine $Be^{-\alpha t}$, il vient:

$$\eta_1 = \eta_2^2f_2 + \eta_2^3f_3 + \eta_2^4f_4 + \ldots, \tag{7}$$

les f étant des fonctions périodiques du temps. C'est là l'équation de la surface asymptotique et on n'a qu'à y remplacer les η par leurs valeurs en fonctions des ξ, puis des x, pour avoir cette équation sous la forme:

$$F(x_1, x_2, t) = 0. \tag{8}$$

La série (7) n'est convergente que pour les petites valeurs de η_1; elle ne donne donc qu'un élément de la surface asymptotique cherchée; mais on peut trouver le reste par le moyen de la continuation analytique.

Si dans les équations (1), X_1 et X_2 dépendent d'un paramètre arbitraire μ, nous avons vu que les séries (4') (et par conséquent la série (7)) étaient développées également suivant les puissances croissantes de μ ou de $\sqrt{\mu}$. Nous pouvons donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$F(x_1, x_2, t, \mu) = 0,$$

F étant une fonction holomorphe de μ. Il importe de remarquer que F reste une fonction holomorphe de μ même quand on donne aux η des valeurs telles que la série (7) ne soit plus convergente.[1]

Il y a dans le cas qui nous occupe un invariant intégral que l'on peut écrire

$$\iiint dx_1 dx_2 dt = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2}.$$

[1] Voir *Note E* (Sur le calcul des limites).

Deuxième partie.

Équations de la dynamique et problème des n corps.

CHAPITRE I.

Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

§ 1. *Représentations géométriques diverses.*

Reprenons les équations (1) du § 3 (1ère partie, chapitre III)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}. \tag{1}$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposerons donc que la fonction F ne dépend que de quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2. Nous supposerons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

La situation du système est donc définie par les quatre quantités x_1, x_2, y_1, y_2, mais cette situation ne change pas quand y_1 ou y_2 augmente de 2π ou d'un multiple de 2π. En d'autres termes, et pour reprendre le langage du chapitre I de la 1ère partie, x_1 et x_2 sont des variables linéaires, pendant que y_1 et y_2 sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C, \tag{2}$$

C désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités x et y ne sont plus indépendantes; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quantités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point P dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables x et y soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités:

$$\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0. \tag{3}$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent:

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque x_1 satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable x_2 en fonction uniforme des trois autres x_1, y_1 et y_2.

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)],$$
$$Z = \sin y_2(cx_1 + d),$$

c et d étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1\,;\ cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est à dire à tout système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions:

$$a > x_1 > b\,,\ 2\pi > y_1 > 0\,,\ 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores

$$\begin{aligned}(1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (cb + d)^2,\\ (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (ca + d)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus $a > x_1 > b$ mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entraînent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus x_2 est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore:

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire ξ, jouissant de la propriété suivante. Si x_1, x_2, y_1 et y_2 satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer x_1 et x_2 en fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. De plus, en vertu des inégalités (3), ξ ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3)

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrons alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables ξ, y_1 et y_2, et la représenter par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(c\xi + d)],$$
$$Z = \sin y_2(c\xi + d)$$

avec les conditions:

$$c \geqq 0\,,\ ca + d < 1\,,\ cb + d > 0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour $x_1 = a$, (ou plus généralement pour $\xi = a$) la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à y_2. Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées ρ et ω, mais que si on suppose $\rho = 0$, on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit ω.

Dans ce cas on choisira les constantes c et d de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle:

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle y_2 est indéterminé; mais néanmoins, comme pour $\xi = a$ la situation du système ne dépend pas de y_2, à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que réciproquement, à un point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (5), ξ puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que:

$$a = 0, \qquad b = +\infty.$$

Supposons que pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépende pas de y_2 et que pour $\xi = \infty$, cette situation ne dépende pas de y_1.

Nous pourrons alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour $\xi = 0$ il vient (quel que soit y_2)

$$X = \cos y_1, \qquad Y = \sin y_1, \qquad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de y_2; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour $\xi = 0$ ne dépend pas non plus de y_2.

Pour $\xi = \infty$, on trouve pourvu que $\cos y_2$ soit négatif:

$$X = Y = 0, \qquad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des Z et sa position ne dépend pas de y_1, mais pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas non plus de y_1.

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du Soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la lune se mouvant sous l'influence du Soleil et de la Terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouve-

nent en adoptant les notations de M. Tisserand dans sa Note des Comp-
·es Rendus du 31 janvier 1887

$$(5)\qquad \frac{dL}{dt} = \frac{dR}{dl}, \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{dR}{dL},$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{dR}{dg}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{dR}{dG}.$$

Je désigne par a, e et n le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse; j'appelle l l'anomalie moyenne le cette troisième masse et g la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite:

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}.$$

le choisis les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale · 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que a longitude de cette seconde masse soit égale à t.

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux der-
nières masses est vue de la première ne diffère de $l + g - t$ que par une onction périodique de l de période 2π.

La fonction R est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de $\frac{1}{a} = \frac{1}{2L^2}$. Cette fonction ne dépend que de L, de G, de l et de $l + g - t$; ar la distance de la seconde masse à la première est constante et la listance de la troisième à la première ne dépend que de L, G et l. Cette fonction est d'ailleurs périodique de période 2π tant par rapport à que par rapport à $l + g - t$.

On conclut de là que l'on a:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

t que les équations (5) admettent comme intégrale:

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des quations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser:

$$x_1 = G, \qquad x_2 = L,$$
$$y_1 = g - t, \qquad y_2 = l,$$
$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = R + G,$$

et les équations (5) reprennent la forme:

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F dépend d'un paramètre très petit μ qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F est périodique par rapport à y_1 et y_2 qui sont des variables angulaires, tandis que x_1 et x_2 sont des variables linéaires. Si l'on fait $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et:

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$$

ne dépend plus que des variables linéaires.[1]

Il résulte de la définition même de L et de G en fonctions de a et e que l'on doit avoir:

$$L^2 > G^2 \quad \text{ou} \quad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que x_1 peut varier depuis $-x_2$ jusqu'à $+x_2$.

Si l'on suppose $x_1 = +x_2$, l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est à dire de:

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

[1] Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est identiquement nul. Il semble donc que les conclusions du § 3 (chapitre III, 1ère partie) ne soient plus applicables. Il n'en est rien pourtant, parce qu'on peut remplacer F par une fonction arbitraire $\varphi(F)$ de telle sorte que le hessien de $\varphi(F_0)$ ne soit pas nul. Cela revient à changer l'unité de temps de façon que cette unité dépende de la constante C des forces vives.

On en déduit:

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où:

(6) $$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de $x_1 - x_2$ est supposée nulle) que x_1 doit rester constamment égal à x_2; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions »particulières» que nous devons conserver, l'équation (6) signifie simplement que quand $x_1 - x_2$ atteint la valeur 0, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité $x_2^2 > x_1^2$.

Si nous supposons maintenant $x_2 = -x_1$, l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que x_1 et x_2 ne sont pas de même signe); alors F et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle:

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

ce qui donne:

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante:

Trouver une variable ξ telle que si x_1, x_2, y_1, y_2 satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à

$$F = C, \qquad x_2^2 > x_1^2)$$

ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Je traiterai d'abord la question dans le cas où $\mu = 0$ et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont:

$$X = x_1 - c, \qquad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \qquad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites:

$$X + c = \pm Y.$$

Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 4 et 5.

Fig. 4.

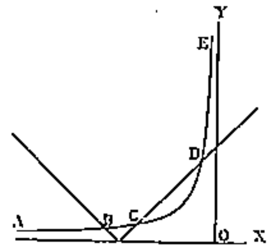
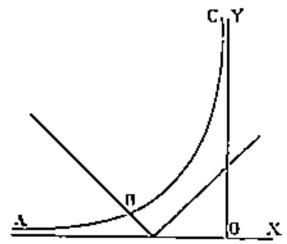


Fig. 5.



Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des x, mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 4, la courbe nous offre deux arcs utiles BC et DE pendant que les arcs AB et CD doivent être rejetés à cause de l'inégalité $Y^2 > (X + c)^2$. Dans le cas de la figure 5, il n'y a qu'un arc utile BC et l'arc AB doit être rejeté.

Le passage de la figure 4 à la figure 5 se fait quand la droite CD devenant tangente à la courbe, les deux points C et D se confondent. Cela a lieu pour:

$$C = \frac{3}{2}, \qquad X = -\frac{1}{2}, \qquad Y = 1.$$

Nous nous supposerons dans ce qui va suivre placés dans le cas de la figure 4 et nous envisagerons seulement l'arc utile BC; c'est en effet le cas le plus intéressant au point de vue des applications.

Posons:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que ξ s'annule au point C et devient infini au point B et que quand on parcourt l'arc BC depuis C jusqu'en B, on voit ξ croître constamment depuis o jusqu'à $+\infty$. Si donc on se donne ξ, le point correspondant de l'arc BC sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que x_1 et x_2 sont fonctions uniformes de ξ.

Qu'arrivera-t-il maintenant si μ n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$F = C, \qquad \xi > 0, \qquad x_2 > 0,\text{[1]} \tag{7}$$

x_1 et x_2 seront encore fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. Pour qu'il cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial(\xi\,,\,F)}{\partial(x_1\,,\,x_2)}$$

s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si μ est assez petit et si C est assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre ξ comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et x_1 et x_2 seront fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

---

[1] On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc BC comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des X, ce qui entraîne l'inégalité $x_2 > 0$; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de μ.

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons:

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2 = x_1 - x_2,$$

$$y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique:

$$\frac{dx'_1}{dt} = \frac{dF}{dy'_1}, \qquad \frac{dy'_1}{dt} = -\frac{dF}{dx'_1},$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = \frac{dF}{dy'_2}, \qquad \frac{dy'_2}{dt} = -\frac{dF}{dx'_2}.$$

On voit que y'_1 et y'_2 sont encore des variables angulaires; quand en effet y'_1 ou y'_2 augmente d'un multiple 2π, y_1 et y_2 augmentent aussi d'un multiple de 2π et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément y'_1 et y'_2 en $y'_1 + \pi$ et $y'_2 + \pi$, y_2 ne change pas et y_1 augmente de 2π. La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépend pas de y'_2 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0.$$

Pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas de y'_1 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des Z si $\cos y'_2$ est négatif et à l'infini si $\cos y'_2$ est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) et $(x'_1, x'_2, y'_1 + \pi, y'_2 + \pi)$ correspondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux:

$$\int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int (dx_1' dy_1' + dx_2' dy_2')$$

et

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx_1' dy_1' dx_2' dy_2'.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le § 3 (1ère partie, chapitre II) nous verrons que:

$$\int \frac{x_1'^2 \, d\xi \, dy_1' \, dy_2'}{x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}} = \int \frac{x_1'^2 \, dX \, dY \, dZ}{\left(x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right) \xi (X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme ξ est essentiellement positif, la quantité sous le signe $\int$ est de même signe que:

$$x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour $\mu = 0$, on trouve:

$$x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_1^2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 4 et sur l'arc BC, nous devons supposer:

$$C > \frac{3}{2}, \quad x_1^2 < x_2^2, \quad 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire:

$$x_1 - \frac{1}{x_1^2} = 3x_1 - 2C > 3x_1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi $x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}$ est toujours négatif quand μ est nul. Il en

sera encore de même quand μ cessera d'être nul, pourvu que C soit assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans ces conditions l'intégrale:

$$\int \frac{x_1'^2 \, dX \, dY \, dZ}{\xi (X^2 + Y^2)\left(-x_1' \frac{dF}{dx_1'} - x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right)}$$

est un invariant positif.

Pour $\mu = 0$, les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et on trouve:

$$L = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \qquad g = \text{const.}, \qquad l = nt + \text{const.}$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représentation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement n est un nombre commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale

$$\xi = \text{const.}$$

et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand μ n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du § 3 (1ère partie, chapitre III)

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^2 = \mu R,$$

R étant une fonction de ρ et de t, holomorphe par rapport à ρ et s'annulant avec ρ et périodique par rapport à t. Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}.$$

ivec:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho\,,\,\xi)d\rho + \eta$$

Posons:

$$\sigma = \sqrt{n}\sqrt{2x_1}\cos y_1\,, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1}\sin y_1\,.$$

.es équations conserveront la forme canonique des équations de la dynanique et la fonction F dépendra de deux variables linéaires x_1 et η de leux variables angulaires y_1 et ξ.

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces ives C, x_1, y_1 et ξ, la quatrième variable η est entièrement déterminée; n a en effet:

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2}x_1^2\sin^4 y_1 + \mu\int R(\rho\,,\,\xi)d\rho.$$

Pour $x_1 = 0$, la situation du système ne dépend pas de y_1. Nous ouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les oordonnées sont:

$$X = \cos\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Y = \sin\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Z = x_1\sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace t inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe es Z qui nous donneraient $x_1 = \infty$ et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se iouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une osition d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan es xy le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des x et des y les xes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu\varphi(x\,,\,y),$$

$(x\,,\,y)$ étant un ensemble de termes du 3ème degré au moins en x et en et μ un coefficient très petit.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variable en posant:

$$x = \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}}\cos y_1, \qquad x' = \sqrt{2x_1}\sqrt[4]{ga}\sin y_1,$$

$$y = \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}}\cos y_2, \qquad y' = \sqrt{2x_2}\sqrt[4]{gb}\sin y_2.$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga}\,x_1 + \sqrt{gb}\,x_2 + \mu g\varphi(x_1\,,\,x_2\,,\,y_1\,,\,y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2, et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1er ordre. Nous en conclurons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du 1er ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$\left|\mu\frac{d\varphi}{dx_1}\right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \left|\mu\frac{d\varphi}{dx_2}\right| < \sqrt{\frac{b}{g}}. \tag{8}$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi) + \mu g\varphi(x_1\,,\,\xi x_1\,,\,y_1\,,\,y_2) = C. \tag{9}$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi + \mu g\frac{d\varphi}{dx_1} + \mu\xi g\frac{d\varphi}{dx_2}\ \&c.$$

En vertu des inégalités (S), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ, y_1 et y_2, et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1, y_2 et ξ.

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1, pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2.

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

§ 2. *Équation des surfaces asymptotiques.*

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2, deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Que F dépend d'un paramètre très petit μ, de telle façon qu'on puisse développer F suivant les puissances de μ et écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

Que F_0 ne dépend que de x_1 et x_2 et est indépendant de y_1 et de y_2.

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de x_1 et de x_2, par exemple pour:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0$$

les deux nombres

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(que j'appellerai pour abréger n_1 et n_2) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0,$$

qui portait le n° 15 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (15) correspond une solution périodique des équations (1).

Par conséquent les équations (1) ont une infinité de solutions périodiques si μ est suffisamment petit.

Nous avons vu ensuite dans le § 4 (1ère partie, chapitre III) que le nombre des racines de l'équation (15) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

Les équations (1) ont donc une infinité de solutions périodiques instables.

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III) que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable, passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \phi_2(y_1, y_2),$$

ϕ_1 et ϕ_2 étant deux fonctions de y_1 et de y_2 qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$F(\phi_1, \phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître x_2, en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de x_1, de y_1 et de y_2.

Voici comment nous procéderons pour intégrer les équations (3) en supposant que x_1 et x_2 sont très voisins de x_1^0 et de x_2^0, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que x_1 et x_2 sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots \end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions x_i^k de telle façon qu'en

substituant dans les équations (3) à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites.[1]

Si dans F nous substituons à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots.$$

On voit d'ailleurs sans peine que:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1x_1^1 - n_2x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(x_1^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1x_2^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0} + (x_2^1)^2\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1x_1^2 - n_2x_2^2,$$

. . . .

et plus généralement:

$$H_k = \theta_k - [Lx_1^1x_1^{k-1} + M(x_1^1x_2^{k-1} + x_2^1x_1^{k-1}) + Nx_2^1x_2^{k-1}] - n_1x_1^k - n_2x_2^k,$$

θ_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}, \qquad M = -\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_2^0}, \qquad N = -\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déter-

[1] Si x_1^0 et x_2^0 étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, on pourrait se contenter de développer x_1 et x_2 suivant les puissances de μ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. Lindstedt pourraient rendre des services dans certains cas.

miner successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k$; en effet, si nous posons pour abréger:

$$[i, k] = \frac{dH_i}{dx_1^0}\frac{dx_1^k}{dy_1} + \frac{dH_i}{dx_2^0}\frac{dx_1^k}{dy_1},$$

ces équations s'écriront:

$$[0, 0] + \frac{dH_0}{dy_1} = 0,$$

$$[0, 1] + [1, 0] + \frac{dH_1}{dy_1} = 0,$$

(5) $$[0, 2] + [1, 1] + [2, 0] + \frac{dH_2}{dy_1} = 0,$$

. . . .

$$[0, k] + [1, k-1] + \ldots + [k-1, 1] + [k, 0] + \frac{dH_k}{dy_1} = 0.$$

Développons d'abord la première des équations (5); elle s'écrira:

$$-n_1\frac{dx_1^0}{dy_1} - n_2\frac{dx_1^0}{dy_2} = 0.$$

Cette première équation sera satisfaite d'elle-même, puisqu'on a supposé plus haut que

$$x_1^0 = \text{const.}$$

Dans ces conditions nous aurons:

$$[k, 0] = 0,$$

car les dérivées partielles de x_1^0 doivent être nulles.

On a d'autre part:

$$[0, k] = -n_1\frac{dx_1^k}{dy_1} - n_2\frac{dx_1^k}{dy_2}.$$

On trouve également:

$$[k-1, 1] = Z_k - Lx_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1} - M\left(x_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1} + x_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2}\right) - Nx_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2},$$

Z_k étant une fonction qui ne dépend que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$, et enfin

$$[1, k-1] = -Lx_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - M\left(x_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} + x_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}\right) - Nx_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}.$$

Quant aux expressions $[2, k-2], [3, k-3], \ldots, [k-2, 2]$, il est clair qu'elles ne peuvent dépendre que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$.

Nous pouvons donc écrire les équations (5) en mettant en évidence les termes qui dépendent de x_1^k, de x_2^k, de x_1^{k-1} ou de x_2^{k-1}, mais nous devons d'abord observer que ces équations sont susceptibles d'être mises sous une forme plus simple.

Nous pouvons toujours supposer en effet que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = \quad dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction F qui est périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2, est encore périodique de période 2π par rapport à y_1'' et à y_2''. Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres n_1 et n_2 sont remplacés par deux nouveaux nombres n_1'' et n_2'' qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que n_1 et n_2 par rapport aux équations primitives et l'on a:

$$n_1'' = \quad dn_1 - cn_2,$$

$$n_2'' = -bn_1 + an_2.$$

Mais le rapport de n_1 à n_2 étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers a, b, c, d de telle sorte que

$$n_2'' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que n_2 soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre.

ou

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0\,, \quad \ldots$$

ou:

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad -n_1 x_1^1 = 0\,, \quad \ldots.$$

Ainsi la constante x_1^1 est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

La plus générale des équations (6) s'écrit alors:

$$-n_1\frac{dx_1^k}{dy_1} - Mx_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - Nx_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} + T_k = 0$$

ou bien:

$$n_1\frac{dx_1^k}{dy_1} + Nx_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} = Y_k, \tag{9}$$

Y_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$ et $\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}$.

Nous avons obtenu l'équation (9) en partant des équations (6) et les équations (6) elles-mêmes sont des transformations de la première équation (3). En opérant de même sur la seconde équation (3) nous aurions trouvé:

$$n_1\frac{dx_2^k}{dy_1} + Mx_1^{k-1}\frac{dx_2^1}{dy_2} + N\left(x_2^1\frac{dx_2^{k-1}}{dy_2} + x_2^{k-1}\frac{dx_2^1}{dy_2}\right) = Y'_k, \tag{9'}$$

Y'_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$ et $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$.

Nous allons chercher à déterminer par récurrence les fonctions x_i^k et à cet effet, voici comment nous procéderons. Supposons qu'on ait déterminé par un calcul préalable, d'une part:

$$x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2},$$
$$x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$$

d'une manière complète et d'autre part:

$$x_1^{k-1} \quad \text{et} \quad x_2^{k-1}$$

à une fonction arbitraire près de y_2. Nous pourrons alors regarder $\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}$, $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$ et par conséquent Y_k et Y'_k comme des fonctions connues de y_1 et de y_2; les équations (9) et (9') nous donneront donc, si nous voulons que x_1^k et x_2^k soient des fonctions périodiques de y_1:

$$Nx_2^1\left[\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}\right] = [Y_k] \tag{10}$$

et

$$M\frac{dx_2^1}{dy_2}[x_1^{k-1}] + N\left[\frac{d(x_2^1 x_2^{k-1})}{dy_2}\right] = [Y'_k]. \tag{10'}$$

Ces équations (10) et (10') détermineraient complètement les fonctions x_1^{k-1} et x_2^{k-1} que nous ne connaissions encore qu'à une fonction arbitraire près de y_2; mais il y a intérêt à remplacer l'équation (10) par une autre équivalente mais plus simple, qu'on obtient de la façon suivante:

Nous avons vu plus haut que l'on doit avoir:

$$H_0 = C, \qquad H_1 = H_2 = \ldots = H_{k-1} = 0.$$

Considérons l'équation $H_{k+1} = 0$; elle peut s'écrire:

$$n_1 x_1^{k-1} = \theta'_{k-1}, \tag{11}$$

θ'_{k-1} ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$.

En vertu de cette équation (11) la fonction x_1^{k-1} peut être regardée comme entièrement déterminée.

J'écrirai alors l'équation (10') sous la forme:

$$N\frac{d(x_2^1[x_2^{k-1}])}{dy_2} = [Y'_k] - M\frac{dx_2^1}{dy_2}[x_1^{k-1}]. \tag{12}$$

Le second membre de (12) est une fonction entièrement connue de y_2 et je pourrai la représenter par la notation:

$$\frac{dS_{k-1}}{dy_2},$$

S_{k-1} étant une fonction entièrement connue de y_2. L'équation (12) nous donnera alors:

$$[x_2^{k-1}] = \frac{S_{k-1}}{Nx_2^1} + \frac{C_{k-1}}{Nx_2^1}, \tag{13}$$

C_{k-1} désignant une constante d'intégration que nous choisirons d'une manière arbitraire. Une fois cette constante choisie, $[x_2^{k-1}]$ sera entièrement déterminé.

Connaissant à la fois $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_2}$ et $[x_2^{k-1}]$ nous pourrons regarder x_2^{k-1} comme complètement connu.

Ayant choisi x_1^{k-1} et x_2^{k-1} de façon à satisfaire aux équations (10) et (10'), les équations (9) et (9') nous donneront $\frac{dx_1^k}{dy_1}$ et $\frac{dx_2^k}{dy_1}$ sous la forme de séries trigonométriques en y_1, n'ayant pas de terme tout connu. Elles nous feront donc connaître x_1^k et x_2^k à une fonction arbitraire près de y_2, de sorte qu'on peut recommencer la même opération sur les équations analogues à (9) et à (9') mais correspondant à une valeur de k plus élevée d'une unité, et ainsi de suite.

On pourra donc par la méthode que je viens d'exposer calculer par récurrence x_1^0 et x_2^0, x_1^1 et x_2^1, ..., x_1^k et x_2^k, ...; mais il reste plusieurs points à discuter:

1°. Dans quels cas les séries ainsi obtenues sont-elles convergentes?

2°. Comment faut-il choisir les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, \ldots$?

3°. Quelles sont les propriétés des fonctions définies par les séries qui précèdent?

C'est à cette discussion que nous consacrerons les paragraphes suivants.

§ 3. *Construction des surfaces asymptotiques.*

(Première approximation.)

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposerons donc que x_1 et x_2 sont définis en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu}x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu}x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement, indépendante de y_1.

Revenons à notre premier exemple du § 1. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \quad \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \quad \xi \sin y_2',$$

où

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \qquad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x_2'}{x_1'},$$

$$y_1 = g - l, \qquad y_2 = l.$$

Nous avions observé de plus que les variables

$$x_1' = x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - x_2$$

forment avec y_1' et y_2' un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ, y_1' et y_2' comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre ξ, y_1', y_2' est l'équation d'une surface.

Mais pour amener les équations à la forme que nous leur avions donnée dans le paragraphe précédent, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé dans ce paragraphe:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé n_2''.

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x_1'', x_2'', y_1'' et y_2''.

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui remplit le § 2, et *auxquelles nous conserverons désormais ce nom,* ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du § 1, c'est à dire $G, L, g - l$ et l.

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de:

$$y_1' = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{et de} \quad y_2' = \frac{1}{2}(g - t - l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ.

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complétement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1, le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 de telle façon que toute relation entre y_1, y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

Dans ces conditions, il est clair que l'équation exacte de nos surfaces trajectoires sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + \dots}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + \dots}$$

et que l'équation approximative, en négligeant les termes en μ sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}. \tag{1}$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (1).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{dy_1}{dt} \gtrless 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

il vient:

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu\frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2\frac{dF_2}{dx_1} + \dots.$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. Q. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π.

Reprenons les surfaces définies par l'équation (1) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complétement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1].$$

Revenons aux notations du § 3 (1ère partie, chapitre III). Dans ce paragraphe nous avons posé:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

A et h étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite:

$$y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2) t + m_2 \varpi_2 + h,$$

nous trouvions:

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega.$$

Je posais ensuite:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega,$$

la sommation indiquée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$\omega = m_2 \varpi_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et on a $y_2 = \varpi_2$; il vient donc:

$$\psi = \mathrm{S} A \sin(m_2 \varpi_2 + h) = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de F_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc:

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h) = \psi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignions par ψ dans la 1ère partie.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

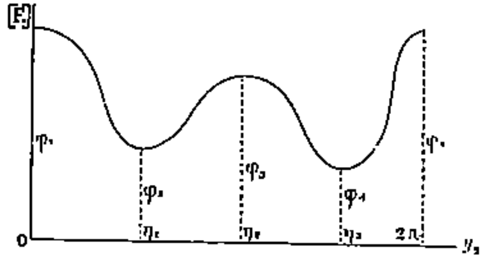
Nous supposerons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à 2π.

Pour $y = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_1.
Pour $y = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_2.
Pour $y = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_3.
Pour $y = \eta_3$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_4.
Pour $y = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur φ_1.

$$\varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est y_2 et l'ordonnée $[F_1]$:

Fig. 6.



Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1, ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein ——— les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3$$

et:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_1.$$

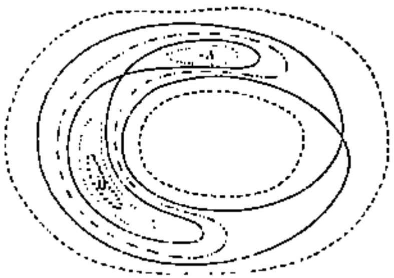
J'ai représenté par un trait pointillé ------- les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait mixte —..—..—..— .. une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué .... les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_2$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait ××××××.

Fig. 7.



Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduit à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient toute entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est:

$$y_2 = \text{const.}; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (1).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_2$, ou entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables:

$$C_1 = -\varphi_1, \ -\varphi_2, \ -\varphi_3 \quad \text{et} \quad -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de PASCAL à point double, ou d'une lemniscate autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) nous avons envisagé l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_1} = 0$$

qui portait le n° 15 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire:

$$\frac{d[F_1]}{dy_1} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ et deux solutions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_1$.

Mais voyons de plus près en quoi consiste cette correspondance.

Envisageons en particulier la solution périodique qui correspond à la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$. Cette solution pourra d'après ce que nous avons vu dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) se mettre sous la forme suivante:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots, \\ x_2 &= \xi'_0 + \mu\xi'_1 + \mu^2\xi'_2 + \dots, \\ y_1 &= \zeta_0 + \mu\zeta_1 + \mu^2\zeta_2 + \dots, \\ y_2 &= \zeta'_0 + \mu\zeta'_1 + \mu^2\zeta'_2 + \dots, \end{aligned}$$

où l'on a:

$$\xi_0 = x_1^0, \qquad \xi'_0 = x_2^0, \qquad \zeta_0 = n_1 t, \qquad \zeta'_0 = \eta_2,$$

et où $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, \zeta_1$ etc. sont des fonctions périodiques de t.

Cette solution périodique serait représentée géométriquement par une courbe trajectoire fermée qui aurait pour équations:

$$(3)\qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \mu\theta_1, \qquad y_2 = \eta_2 + \mu\theta_2,$$

θ_1 et θ_2 étant des fonctions de y_1 et de μ qui restent finies quand μ s'annule.

D'autre part la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$ a pour équations:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_2.$$

Cela montre que ces deux courbes diffèrent infiniment peu l'une de l'autre si l'on regarde μ comme une quantité infiniment petite et on peut faire correspondre les deux courbes point par point de façon que la distance de deux points correspondants soit du même ordre de grandeur que μ.

Comme la solution périodique définie par les deux équations (2) est instable, on pourra faire passer par la courbe définie par les équations (3) deux surfaces trajectoires asymptotiques.

Voyons quelle relation il y a entre ces surfaces asymptotiques et la surface $C_1 = -\varphi_4$ que nous venons de construire.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III), ces surfaces asymptotiques auront pour équations:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu} + \xi_1^2\mu + \xi_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots, \\ x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu} + \xi_2^2\mu + \xi_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots. \end{aligned}$$

Les séries qui entrent dans les seconds membres des équations (4) sont des séries convergentes développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et les quantités $\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2$ etc. sont des fonctions de y_1 et de y_2 sur lesquelles nous ne savons qu'une chose, c'est qu'elles sont périodiques de période 2π par rapport à y_1.

De plus la surface définie par les équations (4) doit passer par la courbe définie par les équations (3), ce qui veut dire qu'en substituant dans les seconds membres de (4) les valeurs de y_1 et de y_2 tirées des deux dernières équations (2), on doit retomber sur les deux premières équations (2). On doit donc avoir:

$$\begin{aligned} \xi_0 + \mu\xi_1 + \dots = {} & \xi_1^0(\zeta_0 + \mu\zeta_1 + \dots, \zeta'_0 + \mu\zeta'_1 + \dots) \\ & + \sqrt{\mu}\,\xi_1^1(\zeta_0 + \mu\zeta_1 + \dots, \zeta'_0 + \mu\zeta'_1 + \dots) + \dots. \end{aligned}$$

Ce qui prouve qu'on doit avoir:

$$\xi_1^0(\zeta_0, \zeta'_0) = x_1^0, \qquad \xi_2^0(\zeta_0, \zeta'_0) = x_2^0, \qquad \xi_1^1(\zeta_0, \zeta'_0) = 0, \qquad \xi_2^1(\zeta_0, \zeta'_0) = 0.$$

Il est aisé de voir à quoi se réduisent les surfaces asymptotiques quand on suppose $\mu = 0$, on trouve alors simplement

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0.$$

On a donc identiquement:

$$\xi_1^0 = x_1^0, \qquad \xi_2^0 = x_2^0.$$

Les surfaces asymptotiques devant être des surfaces trajectoires, les fonctions de μ, de y_1 et de y_2 définies par les équations (4) devront satisfaire identiquement aux équations (3) du paragraphe précédent. On verrait donc par le même calcul que dans le paragraphe précédent que

$$\xi_1^1 = 0, \qquad \xi_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)},$$

C_1 étant une constante qu'il s'agit de déterminer. C'est ce que nous ferons à l'aide de l'équation:

$$\xi_2^1(\zeta_0, \zeta_0') = \xi_2^1(nt, \eta_2) = 0.$$

La fonction ξ_2^1 ne dépendant que de y_2, il suffira d'y remplacer y_2 par η_2, ce qui donnera

$$\sqrt{\frac{2}{N}(\varphi_1 + C_1)} = 0$$

ou

$$C_1 = -\varphi_1.$$

Donc la surface $C_1 = -\varphi_1$ a pour équation:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu}}{\xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu}}.$$

Elle ne diffère donc de la surface asymptotique (4) que par des termes de l'ordre de μ.

Cette surface à ligne double $C_1 = -\varphi_1$ peut donc être regardée comme une première approximation de la surface asymptotique cherchée et on peut faire correspondre les deux surfaces point par point de telle façon que la distance de deux points correspondants soit de même ordre de grandeur que μ.

De là on peut tirer diverses conséquences:

1°. *En première approximation les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées;* c'est là un résultat que les approximations suivantes confirmeront.

2°. Toute surface asymptotique étant une surface trajectoire, son intersection par la portion de surface sans contact S qui a pour équation $y_1 = 0$ sera une courbe invariante C (cf. § 4, chapitre II, 1ère partie).

Considérons donc la courbe C'

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_1)}.$$

Cette courbe différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de la courbe invariante de C. Sa conséquente différera aussi infiniment peu de la conséquente de C, c'est à dire de C elle-même. Donc la courbe C' différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de sa propre conséquente. Ce sera donc, pour employer le langage du paragraphe cité, *une courbe pénininvariante aux quantités près de l'ordre de* μ.

3°. La courbe C' est une courbe fermée; la courbe C'[1] qui en diffère infiniment peu sera donc une courbe *quasi fermée* et de telle façon que la distance des deux points de fermeture soit de l'ordre de μ. Ainsi *la surface asymptotique coupe la surface* $y_1 = 0$, *suivant une courbe quasi fermée.*

Si l'on faisait $\mu = 0$, la solution la plus générale des équations données serait:

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.},$$

$$y_1 = -t\frac{dF_0}{dx_1} + \text{const.}, \qquad y_2 = -t\frac{dF_0}{dx_2} + \text{const.}$$

Par conséquent si les valeurs initiales de x_1 et de x_2 étaient $x_1^0 + \partial x_1$, $x_2^0 + \partial x_2$, x_1 et x_2 resteraient constamment égaux à $x_1^0 + \partial x_1$ et $x_2^0 + \partial x_2$; de même $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ conserveraient des valeurs constantes et l'on aurait:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} = n_1 + L\partial x_1 + M\partial x_2 + \partial^2 n_1,$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} = M\partial x_1 + N\partial x_2 + \partial^2 n_2,$$

[1] Tous ces raisonnements supposent que dans les équations (4) des surfaces asymptotiques, les séries des seconds membres restent convergentes quelque soit y_1 pourvu que μ soit suffisamment petit; c'est ce que des considérations empruntées au calcul des limites permettent d'établir aisément. Voir ce que j'ai dit à ce sujet page 96 et aussi ce que j'ai dit du calcul des limites dans l'introduction. Consulter également la *Note E*.

$\delta^2 n_1$ et $\delta^2 n_2$ étant des infiniment petits du 2^d ordre quand δx_1 et δx_2 sont des infiniment petits du 1^er ordre.

Soit alors y_2^0 la valeur initiale de y_2 quand on fait $y_1 = 0$; faisons croître le temps jusqu'à ce que y_1 devienne égal à 2π; alors y_2 sera devenu égal à:

$$y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0,$$

$\delta^2 y_2^0$ étant infiniment petit du 2^d ordre, si on regarde δx_1 et δx_2 comme des infiniment petits du 1^er ordre.

Si donc nous supposons $\mu = 0$ et qu'un point P appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$, ait pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = y_2^0$$

son conséquent aura pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2,$$

$$y_1 = 2\pi, \qquad y_2 = y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0.$$

Si l'on ne suppose plus $\mu = 0$, le conséquent de ce même point P aura pour coordonnées:

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 + \mu\omega_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2 + \mu\omega_2,$$

$$y_1 = 2\pi, \qquad y_2 = y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0 + \mu\omega_3,$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ étant des fonctions de $\mu, y_2^0, \delta x_1$ et δx_2 qui restent finies quand μ s'annule.

Imaginons maintenant que le point P appartienne à la surface $C_1 = -\varphi_4$.

Si alors y_2 n'est pas très voisin de η_2, l'expression $[F_1] - \varphi_4$ n'est pas infiniment petite, et par conséquent si μ est très petit:

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^0}{x_1^0}$$

est précisément du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$; d'où l'on conclut

que $x_1 - x_1^0 = \delta x_1$ est du même ordre de grandeur que μ et $x_2 - x_2^0 = \delta x_2$ du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$.

Si donc le point P (appartenant à la surface $C_1 = -\varphi_4$) a pour coordonnées $x_1, x_2, y_1 = 0$ et y_2; si son conséquent P' a pour coordonnées $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, y_1 = 2\pi$ et $y_2 + \Delta y_2$; Δx_1 et Δx_2 sont *au moins de l'ordre* de μ et Δy_2 est précisément de l'ordre de $\sqrt{\mu}$. La distance PP' est donc de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

Si donc on considère la courbe:

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)},$$

qui ainsi que nous venons de le voir est une courbe péninvariante, la distance d'un point P quelconque de cette courbe (à moins qu'il ne soit très voisin du point double) à son conséquent est un infiniment petit du même ordre que $\sqrt{\mu}$ et non pas un infiniment petit d'ordre supérieur.

§ 4. *Construction exacte des surfaces asymptotiques.*

Reprenons les séries auxquelles nous sommes parvenus dans le § 2.

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots, \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots. \end{aligned}$$

Les x_i^k sont des fonctions de y_1 et de y_2, périodiques de période 2π par rapport à y_1. Mais ces fonctions ne sont pas encore entièrement déterminées, car nous avons introduit dans le calcul du paragraphe 2 une suite de constantes d'intégration $C_1, C_2, \dots, C_n$ que nous avons jusqu'ici laissées arbitraires.

Supposons d'abord que l'on ait donné à C_1 une valeur quelconque $> -\varphi_4$; alors

$$[F_1] + C_1$$

est une fonction périodique de y_2 qui reste constamment positive, et x_2^1

est toujours réel. Cela ne suffirait pas toutefois pour déterminer complètement x_2^1 car on a:

$$x_2^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Il faut encore choisir entre les deux signes du radical; donnons par exemple à ce radical le signe $+$. Alors x_2^1 sera une fonction périodique de y_2 qui sera constamment réelle et positive.

Nous pourrons choisir ensuite toutes les autres constantes C_2, C_3 etc., d'une manière tout à fait arbitraire.

Je dis que les x_i^k qui sont déjà périodiques de période 2π par rapport à y_1 sont également périodiques par rapport à y_2.

Je suppose en effet que cela soit démontré pour:

$$x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{k-2},$$
$$x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{k-2}.$$

Je dis que cela sera encore vrai pour x_1^{k-1} et x_2^{k-1}.

En effet l'équation (11) du § 2 montre immédiatement que cela est encore vrai pour x_1^{k-1}.

L'équation (12) du § 2 montre ensuite que:

$$\frac{d(x_2^1[x_2^{k-1}])}{dy_2}$$

est une fonction connue de y_2 et que cette fonction est périodique de période 2π.

Cette fonction peut se développer en série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2. On peut démontrer que cette série ne contient pas de terme tout connu; car si elle en contenait un, on arriverait à des résultats contraires à la deuxième extension du théorème III (1ère partie, chapitre II, § 4). Je n'insiste pas davantage sur ce point qui n'importe pas à mon objet principal.

Si cette série ne contient pas de terme tout connu, $x_2^1[x_2^{k-1}]$ sera une fonction périodique de y_2 et comme (d'après la façon dont nous avons choisi C_1) x_2^1 est une fonction périodique réelle et positive de y_2 et que cette fonction ne s'annule pas, $[x_2^{k-1}]$ sera une fonction périodique de y_2 et cette fonction restera réelle et finie. C. Q. F. D.

Malheureusement en choisissant C_1 comme nous venons de le faire, les séries auxquelles nous parvenons ne sont pas convergentes (c'est ce qui fait que j'insiste peu sur ce 1er cas). Quoique divergentes elles peuvent cependant rendre des services au même titre que les séries de M. Lindstedt et dans des cas où les méthodes habituelles sont en défaut.

Observons que dans les intégrations successives qui donnent par récurrence les x_i^k, il ne s'introduit pas de *petits diviseurs*. Si donc nos séries divergent, ce n'est pas pour la même raison que les séries ordinaires de la mécanique céleste. C'est au contraire parce que les différentiations peuvent introduire de *grands multiplicateurs*. Cette circonstance peut plutôt être regardée comme facilitant l'emploi de ces séries; les termes qui doivent détruire la convergence se présenteront en effet moins vite que s'ils étaient dus à de petits diviseurs.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\varphi_4$. Alors

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1, x_2^1 reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6. Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6:

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7.

J'observe d'abord que x_2^1 est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical: donnons d'abord par exemple à ce radical le signe $+$.

Imaginons que l'on ait calculé successivement

$$x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{k-1},$$
$$x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^{k-2}.$$

L'équation (11) du § 2 nous permet alors de calculer sans difficulté x_1^{k-1} et l'équation (12) du même paragraphe nous donne:

$$\frac{d(x_2^1[x_2^{k-1}])}{dy_2}.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$x_2^1[x_2^{i-1}] = \theta(y_2) + C_{i-1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{i-1} une constante d'intégration.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_6) + C_{i-1} = 0.$$

Alors bien que x_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_6$, la fonction

$$[x_2^{i-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_6)}{x_2^1}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_6$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^k pour $\eta_6 < y_2 < \eta_7$ et nous appellerons $x_{0,i}^k$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe —. On trouvera pour les fonctions x_i^k de nouvelles valeurs que j'appelle $x_{1,i}^k$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C_1' très voisine de C_1.

Alors le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6.

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^k pour les valeurs de y_2 comprises entre η_7 et η_8, d'abord en faisant:

$$x_2^1 = +\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{2,i}^k$ les fonctions ainsi calculées), puis en faisant

$$x_2^1 = -\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{3,i}^k$ les fonctions ainsi calculées).

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes;

1°. $\quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{0,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{0,2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_6$ à $y_2 = \eta_7$.

2°. $\quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{1,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{1,2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_6$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

3°. $\quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{2,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{2,2}(y_2)$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

4°. $\quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{3,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{3,2}(y_2)$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

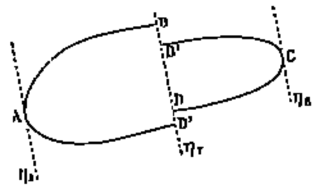
Dans ces formules nous avons posé:

$$\varphi_{p,q}(y_2) = x_{p,q}^0 + x_{p,q}^1\sqrt{\mu} + \ldots + x_{p,q}^k \mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la seconde de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_6$.

La troisième et la quatrième courbes se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.

Fig. 8.



C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois arcs pointillés représentent les trois courbes

$$y_2 = \eta_6, \eta_7, \eta_8,$$

où l'arc AB représente la 1ère de nos quatre branches de courbe, l'arc AD' la seconde, l'arc $B'C$ la 3me et l'arc DC la quatrième.

Nous regarderons C_1' comme une donnée, mais C_1'' est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C_1'' par la condition que la 1ère et la 3me courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions:

$$\varphi_{0,1}(\eta_i) = \varphi_{2,1}(\eta_i), \qquad \varphi_{0,2}(\eta_i) = \varphi_{2,2}(\eta_i). \tag{3}$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant encore sur la deuxième extension du théorème III (1ère partie, chapitre II, § 4) nous pourrions démontrer que si C_1'' est déterminé par les équations (3), les équations

$$\varphi_{1,1}(\eta_i) = \varphi_{3,1}(\eta_i), \qquad \varphi_{1,2}(\eta_i) = \varphi_{3,2}(\eta_i) \tag{3'}$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est à dire que la 2de et la 4me courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries (1) auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Aussi n'insisterai-je pas davantage sur tous ces points et ai-je hâte d'arriver aux cas où les séries (1) convergent.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III) et rappelé dans le paragraphe précédent, il existe des surfaces asymptotiques ayant pour équations:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu} + \xi_1^2\mu + \ldots, \\ x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu} + \xi_2^2\mu + \ldots. \end{aligned} \tag{4}$$

Nous conserverons à ces équations le même numéro (4) que dans le paragraphe précédent.

Voyons d'abord quelles conséquences nous pouvons immédiatement déduire des principes posés dans les paragraphes cités.

1°. Les fonctions ξ_i^k sont périodiques par rapport à y_1.

2°. Elles sont finies et réelles.

3°. Les séries (4) sont convergentes pour les valeurs suffisamment petites de μ. Nous pouvons même prendre μ assez petit pour que ces séries restent convergentes pour une valeur donnée quelconque de y_2.

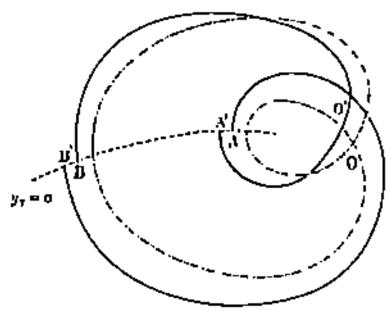
Nous allons chercher à définir nos fonctions ξ_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre o et 2π.

Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que:

$$\xi_1^0 = x_1^0, \qquad \xi_2^0 = x_2^0, \qquad \xi_1^1 = 0, \qquad \xi_2^1 = \pm\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)},$$

en admettant que ce soit la surface asymptotique correspondant à $C_1 = -\varphi_4$ que nous nous proposons de construire.

Fig. 9.



Dans la figure 9 j'ai représenté par un trait pointillé ------- la courbe $y_1 = y_2 = 0$, par un trait mixte —.—.—.—.— la courbe

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_2^0}{\xi_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{\xi_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_1)}$$

que nous avons appris à construire dans le paragraphe précédent. J'ai figuré en O le point double de cette courbe; en O' le point d'intersection de la surface $y_1 = 0$ et de la trajectoire T représentant la solution périodique instable qui correspond d'après ce que nous avons vu à $C_1 = -\varphi_4$. La distance OO' est comme je l'ai dit du même ordre de grandeur que μ.

J'ai représenté ensuite en trait plein ———— en $BO'A'$ et $AO'B'$ les intersections de $y_1 = 0$ avec les deux nappes de surfaces asymptotiques qui vont passer par la trajectoire fermée T; j'ai arrêté ces deux branches de courbes aux points A, B, A', B' parce que je conviens de faire varier y_2 depuis 0 jusqu'à 2π.

Le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)}$$

est toujours réel, mais il est susceptible d'un double signe. Donnons-lui par exemple le signe + quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à η_2 (valeur de y_2 qui donne $[F_1] = \varphi_4$) et le signe — quand y_2 varie depuis η_2 jusqu'à 2π. Appelons ξ_2^1 le radical ainsi défini.

La surface asymptotique étant une surface trajectoire, les fonctions (4) devront satisfaire aux équations (3) du § 2; nous pourrons donc calculer les fonctions ξ_i^k par récurrence par le procédé de ce § 2.

Mais il nous reste à voir comment on peut déterminer les constantes d'intégration C_2, C_3, ..., que ce procédé de calcul introduit.

Supposons que l'on ait calculé successivement par ce procédé

$$\xi_1^0, \xi_1^1, \ldots, \xi_1^{k-2}, \xi_1^{k-1},$$

$$\xi_2^0, \xi_2^1, \ldots, \xi_2^{k-2}, \frac{d\xi_2^{k-1}}{dy_1},$$

ainsi que les constantes d'intégration:

$$C_1, C_2, \ldots, C_{k-2}.$$

L'équation (12) du § 2 nous donne:

$$\frac{d(\xi_2^1[\xi_2^{k-1}])}{dy_2}$$

sous la forme d'une fonction connue de y_2. Nous pouvons donc écrire:

$$[\xi_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) + C_{k-1}}{\xi_2^1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante

d'intégration. Mais nous savons que $[\xi_2^{k-1}]$ doit rester fini et que ξ_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_2$; nous déterminerons donc la constante C_{k-1} par la condition

$$\theta(\eta_2) + C_{k-1} = 0.$$

Ainsi ce procédé permet de déterminer sans ambiguïté les constantes C_k et les fonctions ξ_i^k et nous fait ainsi connaître l'équation de la branche de courbe $BO'A'$.

En opérant de la même façon, mais en changeant le signe du radical, on aurait obtenu l'équation de la branche de courbe $B'O'A$.

Ainsi, si l'on choisit convenablement les constantes d'intégration, les séries (1) convergent pour les petites valeurs de μ et nous fournissent alors les équations des surfaces asymptotiques.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la distance BB' est un infiniment petit de même ordre que μ, de sorte que la courbe invariante $BO'B'$ est quasi-fermée et que la distance des points de fermeture est de l'ordre de μ.

De plus, nous avons vu à la fin du même paragraphe que la distance du point B à son conséquent est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, c'est à dire infiniment grande par rapport à la distance BB' des deux points de fermeture.

Donc en vertu du corollaire du théorème III (1ère partie, chapitre II, § 4) la courbe $BO'B'$ est non seulement quasi-fermée, mais rigoureusement fermée de telle sorte que les deux points B et B' se confondent.

De même la courbe invariante $AO'A'$ est rigoureusement fermée et les deux points A et A' se confondent.

Donc *les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées.*

Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.

Donc dans le cas particulier qui nous occupe, *la stabilité peut être regardée comme rigoureusement établie.*

Si nous étions partis de la solution périodique instable qui correspond à $C_1 = -\varphi_2$, nous aurions démontré par des raisonnements tout semblables que la surface asymptotique correspondante est une surface fermée et qu'elle présente la même forme générale que la surface $C_1 = -\varphi_2$ que

Nous regarderons C_1' comme une donnée, mais C_1'' est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C_1'' par la condition que la 1ère et la 3me courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions:

(5) $$\varphi_{0,1}(\eta_7) = \varphi_{7,1}(\eta_7), \qquad \varphi_{0,2}(\eta_7) = \varphi_{7,2}(\eta_7).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant encore sur la deuxième extension du théorème III (1ère partie, chapitre II, § 4) nous pourrions démontrer que si C_1'' est déterminé par les équations (5), les équations

(5') $$\varphi_{1,1}(\eta_7) = \varphi_{3,1}(\eta_7), \qquad \varphi_{1,2}(\eta_7) = \varphi_{3,2}(\eta_7)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est à dire que la 2de et la 4me courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries (1) auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Aussi n'insisterai-je pas davantage sur tous ces points et ai-je hâte d'arriver aux cas où les séries (1) convergent.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III) et rappelé dans le paragraphe précédent, il existe des surfaces asymptotiques ayant pour équations:

(4) $$x_1 = \xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu} + \xi_1^2\mu + \ldots,$$
$$x_2 = \xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu} + \xi_2^2\mu + \ldots.$$

Nous conserverons à ces équations le même numéro (4) que dans le paragraphe précédent.

Voyons d'abord quelles conséquences nous pouvons immédiatement déduire des principes posés dans les paragraphes cités.

1°. Les fonctions ξ_i^k sont périodiques par rapport à y_1.

2°. Elles sont finies et réelles.

3°. Les séries (4) sont convergentes pour les valeurs suffisamment petites de μ. Nous pouvons même prendre μ assez petit pour que ces séries restent convergentes pour une valeur donnée quelconque de y_1.

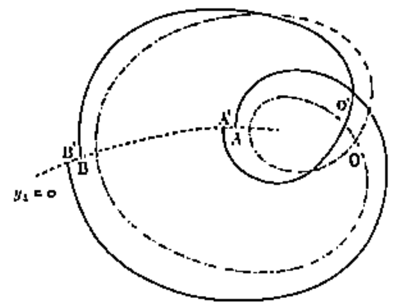
Nous allons chercher à définir nos fonctions ξ_i^k pour toutes les valeurs de y_1 comprises entre 0 et 2π.

Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que:

$$\xi_1^0 = x_1^0, \qquad \xi_2^0 = x_2^0, \qquad \xi_1^1 = 0, \qquad \xi_2^1 = \pm\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)},$$

en admettant que ce soit la surface asymptotique correspondant à $C_1 = -\varphi_4$ que nous nous proposons de construire.

Fig. 9.



Dans la figure 9 j'ai représenté par un trait pointillé - - - - - - la courbe $y_1 = y_2 = 0$, par un trait mixte —..—..—..—.. la courbe

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_1)}$$

que nous avons appris à construire dans le paragraphe précédent. J'ai figuré en O le point double de cette courbe; en O' le point d'intersection de la surface $y_1 = 0$ et de la trajectoire T représentant la solution périodique instable qui correspond d'après ce que nous avons vu à $C_1 = -\varphi_4$. La distance OO' est comme je l'ai dit du même ordre de grandeur que μ.

J'ai représenté ensuite en trait plein ——— en $BO'A'$ et $AO'B'$ les intersections de $y_1 = 0$ avec les deux nappes de surfaces asymptotiques qui vont passer par la trajectoire fermée T; j'ai arrêté ces deux branches de courbes aux points A, B, A', B' parce que je conviens de faire varier y_2 depuis 0 jusqu'à 2π.

Le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_1)}$$

est toujours réel, mais il est susceptible d'un double signe. Donnons-lui par exemple le signe $+$ quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à η_2 (valeur de y_2 qui donne $[F_1] = \varphi_1$) et le signe $-$ quand y_2 varie depuis η_2 jusqu'à 2π. Appelons ξ_2^1 le radical ainsi défini.

La surface asymptotique étant une surface trajectoire, les fonctions (4) devront satisfaire aux équations (3) du § 2; nous pourrons donc calculer les fonctions ξ_i^k par récurrence par le procédé de ce § 2.

Mais il nous reste à voir comment on peut déterminer les constantes d'intégration C_2, C_3, ..., que ce procédé de calcul introduit.

Supposons que l'on ait calculé successivement par ce procédé

$$\xi_1^0, \xi_1^1, \ldots, \xi_1^{k-2}, \xi_1^{k-1},$$

$$\xi_2^1, \xi_2^2, \ldots, \xi_2^{k-2}, \frac{d\xi_2^{k-1}}{dy_1},$$

ainsi que les constantes d'intégration:

$$C_1, C_2, \ldots, C_{k-2}.$$

L'équation (12) du § 2 nous donne:

$$\frac{d(\xi_2^1[\xi_2^{k-1}])}{dy_2}$$

sous la forme d'une fonction connue de y_2. Nous pouvons donc écrire:

$$[\xi_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) + C_{k-1}}{\xi_2^1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante

d'intégration. Mais nous savons que $[\xi_2^{k-1}]$ doit rester fini et que ξ_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_2$; nous déterminerons donc la constante C_{k-1} par la condition

$$\theta(\eta_2) + C_{k-1} = 0.$$

Ainsi ce procédé permet de déterminer sans ambiguïté les constantes C_k et les fonctions ξ_i^k et nous fait ainsi connaître l'équation de la branche de courbe $BO'A'$.

En opérant de la même façon, mais en changeant le signe du radical, on aurait obtenu l'équation de la branche de courbe $B'O'A$.

Ainsi, si l'on choisit convenablement les constantes d'intégration, les séries (1) *convergent pour les petites valeurs de μ et nous fournissent alors les équations des surfaces asymptotiques.*

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la distance BB' est un infiniment petit de même ordre que μ, de sorte que la courbe invariante $BO'B'$ est quasi-fermée et que la distance des points de fermeture est de l'ordre de μ.

De plus, nous avons vu à la fin du même paragraphe que la distance du point B à son conséquent est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, c'est à dire infiniment grande par rapport à la distance BB' des deux points de fermeture.

Donc en vertu du corollaire du théorème III (1[re] partie, chapitre II, § 4) la courbe $BO'B'$ est non seulement quasi-fermée, mais rigoureusement fermée de telle sorte que les deux points B et B' se confondent.

De même la courbe invariante $AO'A'$ est rigoureusement fermée et les deux points A et A' se confondent.

Donc *les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées.*

Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.

Donc dans le cas particulier qui nous occupe, *la stabilité peut être regardée comme rigoureusement établie.*

Si nous étions partis de la solution périodique instable qui correspond à $C_1 = -\varphi_2$, nous aurions démontré par des raisonnements tout semblables que la surface asymptotique correspondante est une surface fermée et qu'elle présente la même forme générale que la surface $C_1 = -\varphi_2$ que nous avons construite dans le paragraphe précédent et dont l'intersection avec $y_1 = 0$ est représentée sur la figure 7.

§ 5. *Solutions périodiques du 2^me genre.*

La surface asymptotique que nous venons de construire est une surface fermée à courbe double et possède par conséquent deux nappes.

Une pareille surface divisera donc l'espace en trois régions:

1°. une région R_1 intérieure à la fois aux deux nappes.

2°. une région R_2 comprise entre les deux nappes.

3°. une région R_3 extérieure aux deux nappes.

Si nous considérons une courbe trajectoire, cette courbe ne pourra couper la surface asymptotique sans quoi par un point de l'espace passeraient deux trajectoires ce qui n'est pas possible.

Ainsi, si notre point représentatif est originairement dans une de ces trois régions, il y restera toujours.

La stabilité est donc, comme je l'ai dit plus haut, rigoureusement démontrée.

Appelons moyen mouvement la quantité suivante: soit φ_1 la quantité dont y_1 a augmenté pendant un temps très long, l_1 la quantité dont y_2 a augmenté dans le même temps. Le moyen mouvement sera la limite du rapport $\frac{\varphi_1}{l_1}$ quand le temps tend vers l'infini.

Dans toute la région R_2, le moyen mouvement est constant; il y a donc *libration*.

Dans la région R_3 on peut faire passer une infinité de courbes fermées représentant des solutions périodiques. En effet à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_2}{n_1}$ correspond une équation $\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$ et à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique. Parmi ces solutions périodiques une infinité seront instables.

Choisissons une de ces solutions instables; la surface asymptotique correspondante partagera la région R_3 en trois régions partielles:

R_1' extérieure aux deux nappes; R_2' région de libration comprise entre les deux nappes; R_3' intérieure aux deux nappes.

De même en envisageant d'autres surfaces asymptotiques la région R_1' et la région R_3' se trouveront de nouveau subdivisées en trois régions partielles.

Occupons-nous maintenant des régions de libration et en particulier de R_2 et voyons si cette région peut comme R_3 être subdivisée en trois régions partielles. Il suffit pour cela de démontrer que dans la région R_2 on peut faire passer une infinité de courbes fermées représentant des solutions périodiques.

On peut y arriver par les considérations suivantes.

Ecrivons les équations:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1, \\
x_2 &= x_2^0 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu x_2^2.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir figure 8); elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du § 2. Quant à x_2^2 c'est une fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^1 que par une fonction de y_2 de telle sorte que

$$\frac{dx_2^2}{dy_1} = \frac{dx_2^1}{dy_1}.$$

Cette fonction x_2^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que ces équations (1) satisfassent *exactement* aux équations (3) du § 2.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_2}, \\
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_2},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (1).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^*.

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut tirer de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonctions de C. Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C.

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2, de x_1^0 et de x_2^0, ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de y_2 et de C.

Les équations (1) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonctions de y_1, de y_2, de C et de C_1.

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que:

$$\frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}.$$

Résolvons maintenant les équations (1) par rapport à C et C_1, il viendra

$$C = F^*(x_1, x_2, y_1, y_2),$$
$$C_1 = \Phi^*(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

La fonction F^* est ainsi définie et on aura en employant la notation de JACOBI:

$$[F^*, \Phi^*] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\Phi^* = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (2).

La solution la plus générale de ces équations (2) s'écrit alors:

$$(\alpha) \qquad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \qquad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \qquad \frac{dS}{dC} = C' + t, \qquad \frac{dS}{dC_1} = C_1',$$

C' et C_1' étant deux nouvelles constantes d'intégration.

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence:

$$F - F^*.$$

Or x_1^1 est défini par la condition suivante:

$$F(x_1^0 + \mu x_1^1, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) - C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$. (Cf. l'équation (11) du § 2).

Donc comme $\frac{dF_0}{dx_2^0}$ est nul, la fonction

$$F(x_1^0 + \mu x_1^1, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu x_2^2) - C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction x_2^2.

D'ailleurs on a identiquement:

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^1, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu x_2^2) = C.$$

Donc la différence

$$F - F^*$$

regardée comme fonction de μ, de C, de C_1, de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant:

$$\xi_2\sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonctions de x_1, ξ_2, y_1, y_2 et μ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2.

Nous venons de voir que $F - F^*$ est une fonction de μ, de y_1, de y_2, de C et de C_1 dont le développement suivant les puissances de μ commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonctions de μ, de x_1, de ξ_2, de y_1 et de y_2, nous verrons que cette différence $F - F^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ, dont les coefficients dépendent de x_1, ξ_2, y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction:

$$\frac{F - F^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire les équations (2) deviennent:

$$(2') \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF^*}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1},$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF^*}{\sqrt{\mu}dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}d\xi_2}.$$

De même les équations proposées:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

doivent se réduire à:

$$(3) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1},$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{dF}{\sqrt{\mu}dy_2}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{\sqrt{\mu}d\xi_2}.$$

Nous formerons en outre les équations suivantes:

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dy_1}(F^* + \varepsilon F'), \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{d}{dx_1}(F^* + \varepsilon F'),$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d}{\sqrt{\mu}dy_2}(F^* + \varepsilon F'), \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{d}{\sqrt{\mu}d\xi_2}(F^* + \varepsilon F'),$$

qui se réduisent à (2') pour $\varepsilon = 0$ et à (3) pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (2) et par conséquent les équations (2') peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (α) la solution générale.

Si l'on discute cette solution générale et si on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que

dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation:

$$(5) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^2 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu x_2^2}{x_1^2 + \mu x_1^2}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le § 3 et dont l'équation s'écrivait:

$$(6) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^2 + \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}}{x_1^2}.$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation (6). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le § 3 au sujet des maxima et des minima de $[F_1]$, deux de nos surfaces (5) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ de la constante C_1. Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (2') une surface asymptotique et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libration et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (α) qui nous font connaître la solution générale des équations (2) et (2'). D'après la forme des équations (1), nous pouvons écrire:

$$S = ay_1 + by_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{2\mu}{N}}\int\sqrt{([F_1] + C_1)}dy_2,$$

a et b étant des fonctions de C et de C_1 seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2.

On en déduit:

$$C_1' = \frac{dS}{dC_1} = \frac{da}{dC_1}y_1 + \frac{db}{dC_1}y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}}\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_4$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2.

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que le tore, nous pouvons en faire le tour de deux manières différentes: 1° en regardant y_2 comme constant; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de

$$2\pi\frac{da}{dC_1}.$$

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale

$$\int\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}$$

aura augmenté d'une certaine période v définie comme il suit:

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $\sqrt{([F_1]+C_1)}$ est réel soient les valeurs comprises entre η_1 et η_0, on aura:

$$v = 2\int_{\eta_0}^{\eta_1}\frac{dy_2}{\sqrt{([F_1]+C_1)}}.$$

Quand notre intégrale augmentera de v, $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de

$$v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}.$$

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités:

$$2\pi\frac{da}{dC_1} \quad \text{et} \quad v\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de va-

leurs de C_1; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation:

$$(7) \qquad 2\pi\frac{da}{dC_1} = Kv\sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

(qui contient C_1 parce que $\frac{da}{dC_1}$ et v sont des fonctions de C_1) nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que:

$$a = x_1^0 + \mu[x_1^1]$$

et que:

$$F_0(x_1^0+\mu x_1^1,\, x_2^0+\sqrt{\mu}\,x_2^1) + \mu F_1(x_1^0,\, x_2^0,\, y_1,\, y_2)$$

doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut:

$$-n_1x_1^1 - \frac{N}{2}(x_2^1)^2 + F_1(x_1^0,\, x_2^0,\, y_1,\, y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1[x_1^1] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

et:

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1, de sorte que l'équation (7) peut s'écrire

$$(7') \qquad \frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const.}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf. figure 7.)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (7') comme définissant C_1 en fonction de μ, C_1 sera fonction continue de μ, mais nous pourrons prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ, toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (4) admettent pour $\varepsilon = 0$ une infinité de solutions périodiques; les principes du chapitre III (1ère partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε. Comme μ est très petit, nous voulons conclure qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est à dire pour les équations (3) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous voyons que dans la *région de libration R_2 il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques.*

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et *disparaître* ensuite pour une certaine valeur de μ. Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le chapitre III (1ère partie) et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe

une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées,[1] mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

Je regrette également de ne pouvoir montrer ici, comment le théorème IV du chapitre II (1ère partie) peut être utilisé pour l'étude de la distribution des trajectoires fermées dans l'espace.

CHAPITRE II.

Résumé général des résultats.

§ 1. *Résultats positifs.*

Nos résultats s'appliquent aux équations de la dynamique toutes les fois qu'il n'y a que deux degrés de liberté; ils s'appliquent donc spécialement à un cas particulier du problème des trois corps qui est celui

1° où la masse de la planète troublée étant nulle, le mouvement de la planète troublante reste Képlerien.

2° où l'excentricité de la planète troublante est nulle, celle de la planète troublée pouvant être quelconque.

3° où l'inclinaison des orbites est nulle.

Lorsqu'il n'y a que deux degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace, ce qui permet d'énoncer les résultats obtenus sous une forme géométrique.

Toute solution peut être représentée par une courbe gauche appelée trajectoire; les trajectoires fermées correspondent aux solutions périodiques. Il y a toujours une infinité de trajectoires fermées, mais ces trajectoires fermées peuvent être réparties en deux classes:

---

[1] Les travaux récents de M. Cantor nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait sans être continu.

1°. Les trajectoires stables. Si la position initiale du point représentatif est très voisine d'une trajectoire stable, ce point restera éternellement très près de cette trajectoire.

2°. Les trajectoires instables qui ne jouissent pas de la même propriété.

Il y a une infinité de trajectoires fermées stables et une infinité de trajectoires fermées instables.

Dans le voisinage d'une trajectoire fermée instable, il y a une infinité de trajectoires dites asymptotiques qui jouissent de la propriété suivante:

Le point représentatif qui parcourt une trajectoire asymptotique es pour $t = -\infty$ infiniment rapproché de la trajectoire fermée correspondante; il s'en éloigne asymptotiquement, finit par en être très éloigné, puis s'en rapproche asymptotiquement de manière à en être de nouveau infiniment près pour $t = +\infty$.

On voit sans peine qu'il doit exister des trajectoires qui s'éloignent asymptotiquement d'une trajectoire fermée instable et d'autres qui s'en rapprochent asymptotiquement, mais le résultat difficile à établir et véritablement inattendu, c'est que ce sont *les mêmes* trajectoires asymptotiques, qui après s'être éloignées asymptotiquement d'une trajectoire fermée se rapprochent ensuite asymptotiquement de *la même* trajectoire fermée.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même solution périodique instable, forme une surface dite asymptotique.

Les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées à courbe double présentant les mêmes connexions que la surface qu'engendrerait la révolution d'un limaçon à point double ou d'une lemniscate autour d'un axe ne rencontrant pas la courbe.

Chacune de ces surfaces partage donc l'espace en trois régions.

Dans chacune de ces trois régions, il y a encore une infinité de trajectoires fermées instables, et par conséquent une infinité de surfaces asymptotiques. Il en résulte que chacune de ces trois régions peut à son tour être subdivisée en trois autres et ainsi de suite.

Cette subdivision peut être continuée à l'infini et on peut la pousser assez loin pour que le volume de chaque région partielle soit aussi petit qu'on le veut.

Comme aucune trajectoire ne peut passer d'une région dans l'autre, on doit conclure que la stabilité est rigoureusement démontrée; qu'il est possible, étant donnée la position initiale du point représentatif de la situation du système, de trouver une région d'où ce point ne pourra sortir et d'assigner à cette région, sinon *ses limites précises*, du moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Il y a donc trois sortes de trajectoires:

1°. Les trajectoires fermées correspondant aux solutions périodiques et dont il est aisé par les principes du chapitre III (1ère partie) de trouver les équations sous forme d'égalités où entrent des séries convergentes.

2°. Les trajectoires asymptotiques dont nous venons de parler en détail. En ce qui les concerne, nous avons donné dans le chapitre précédent le moyen de former l'équation des surfaces asymptotiques; quand on possèdera cette équation, on pourra en déduire l'équation des trajectoires asymptotiques elles-mêmes par une application convenable des principes des *Vorlesungen über Dynamik*.

3°. Les trajectoires les plus générales qui ne rentrent dans aucune des deux premières catégories.

Nous pouvons affirmer (théorème I, chapitre II, 1ère partie) que si l'on envisage une portion de l'espace quelconque, si petite qu'elle soit, il y aura toujours des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

Il est même hautement vraisemblable que toute portion de l'espace est traversée par une infinité de trajectoires fermées. S'il en est ainsi, et si nous considérons une trajectoire quelconque de la 3me catégorie, nous pouvons toujours trouver une trajectoire de l'une des deux premières catégories qui pendant un temps aussi long qu'on veut, s'en écarte aussi peu qu'on veut, ce qui permettrait de trouver l'équation avec telle approximation qu'on voudrait.

§ 2. *Résultats négatifs.*

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, non seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'étrangeté des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

La plus importante de ces conclusions négatives peut s'énoncer aussi:

En dehors de l'intégrale des forces vives, les équations de la dynamique n'admettent en général aucune intégrale qui soit à la fois une fonction analytique et uniforme.

Si en effet une pareille intégrale existait et si l'on avait:

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{const.},$$

Φ étant une fonction uniforme, l'équation $\Phi = \text{const.}$ devrait être l'équation générale des surfaces trajectoires fermées et en donnant à la constante différentes valeurs, on devrait retrouver les équations des diverses surfaces asymptotiques. Mais chaque surface asymptotique a une courbe double et en tous les points de cette courbe double les quatre dérivées partielles de Φ devraient s'annuler.

Mais dans le voisinage d'une de ces courbes doubles passe une infinité d'autres courbes doubles de sorte que l'on devrait trouver dans le voisinage d'un point donné une infinité de courbes le long desquelles les quatre dérivées de Φ s'annulent à la fois. Cette fonction Φ ne saurait donc être analytique.[1]

C. Q. F. D.

Ce résultat ne cesserait d'être vrai que dans le cas exceptionnel où les deux nappes d'une infinité de surfaces asymptotiques viendraient à se confondre en une seule.

En effet le raisonnement qui précède est en défaut si l'on peut admettre que dans une région déterminée, il n'y a pas de surface asymptotique à courbe double; pour cela il faut que quand la constante varie, entre certaines limites, l'équation:

$$\Phi = \text{const.}$$

représente une série de surfaces sans courbe double s'enveloppant mutuellement. On peut alors intégrer complètement les équations différentielles et on reconnait sans peine que, parmi ces surfaces sans courbe double,

[1] Cf. *Note C.*

il y en a une infinité qui sont sillonnées par une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques. Ces surfaces ainsi sillonnées par des trajectoires fermées doivent être regardées comme des surfaces asymptotiques dont les deux nappes se sont confondues.

Il existe donc certainement des équations différentielles de la forme des équations de la dynamique qui admettent une intégrale analytique et uniforme, mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement et l'on peut dire que l'on ne rencontrera de pareilles équations que si on les fabrique tout exprès.

Il est aisé de voir que ce cas exceptionnel ne se rencontrera pas dans le problème des trois corps. Pour qu'il se produisit, il faudrait en effet que la condition suivante fût remplie:

Soit

$$A \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

un terme quelconque de la fonction perturbatrice (A étant fonction de x_1 et de x_2 et m_1 et m_2 étant des entiers).

Il faudrait que A s'annulât toutes les fois que l'on aurait:

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0$$

ou du moins que cela arrivât pour une infinité de ces termes, à savoir pour tous ceux où le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ serait compris entre certaines limites.

Il faudrait que tous les termes de la fonction perturbatrice disparussent au moment où ils deviennent séculaires.

Or il n'en est pas ainsi; donc en dehors de l'intégrale des forces vives et dans le cas particulier qui nous occupe, *le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale analytique et uniforme.*

Cela montre en même temps que les séries habituellement employées en mécanique céleste, et en particulier les séries de M. Lindstedt ne sont pas convergentes, car leur convergence entrainerait l'existence d'une intégrale analytique et uniforme.

Ainsi se trouve confirmé un résultat que M. Bruns avait obtenu par une voie entièrement différente.

CHAPITRE III.

Tentatives de généralisation.

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la dynamique comportent plus de deux degrés de liberté et par conséquent au cas général du problème des n corps?

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'une représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p-1$ dimensions. La plupart des conclusions de la première partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement. Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même trajectoire fermée instable forme une multiplicité à p dimensions; il me semble très probable, quoique je n'aie pas achevé le calcul, que cette multiplicité est fermée (comme le sont les surfaces asymptotiques envisagées dans les chapitres qui précèdent); mais comme elle n'a que p dimensions, elle ne partage pas en deux ou plusieurs régions l'espace à $2p-1$ dimensions, car du moment que $p>2$, on a $2p-1>p+1$.

Nous ne pouvons donc conclure à la stabilité.

Les difficultés que l'on rencontrait autrefois en mécanique céleste et qui s'opposaient à la convergence des séries tenaient, comme on le sait, à la présence de certains petits diviseurs; j'ai trouvé le moyen de tourner ces difficultés et c'est ce qui m'a permis d'arriver pour le cas de $p=2$ aux résultats que j'ai exposés dans ce travail; mais un obstacle analogue se dresse devant nous dès que $p>2$. Si en effet les anciens petits diviseurs ont disparu, nous rencontrons de nouveaux petits diviseurs qui sont ceux que j'ai appelés (5) dans le § 5 (1ère partie, chapitre III). La difficulté étant de même nature que celle qui a déjà été vaincue, on peut espérer que des moyens analogues permettront d'en venir à bout, mais malgré mes efforts, je n'ai pu encore les trouver.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du § 2 (2me partie, chapitre I) en laissant de côté la question de convergence qui ne peut être regardée comme résolue que dans le cas des multiplicités asymptotiques à p dimensions que nous venons de définir. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut-être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et reprenons les équations (1) du § 3 (1ère partie, chapitre III) en faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3:

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_2 = \phi_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_3 = \phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

satisfaisant aux équations:

$$\frac{dx_1}{dy_1}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_1}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_1}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dy_2}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_2}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_2}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dy_3}\frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_3}\frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_3}\frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_3} = 0,$$

ou, ce qui revient au même, aux équations:

$$F = C, \qquad \frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_2}, \qquad \frac{dx_1}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_1}.$$

Nous supposerons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu = 0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0.

Nous poserons ensuite comme plus haut:

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1, \qquad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2, \qquad \frac{dF_0}{dx_3^0} = -n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3 il n'y a aucune relation linéaire à coëfficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1, à y_2 et à y_3. Mais il s'introduit de petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3 il y a une relation linéaire et une seule à coëfficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le § 2 du chapitre I. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et elles sont au moins doublement périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas grand $y_1 . y_2$ et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coëfficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$
$$m_1' n_1 + m_2' n_2 + m_3' n_3 = 0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π et de telle sorte que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m_1' y_1 + m_2' y_2 + m_3' y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la dynamique, *mais avec deux degrés de liberté seulement*. Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des chapitres I et II (1ère partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i; par conséquent, non seulement le hessien de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessien d'une fonction arbitraire de F_0 est encore nul. (Cf. la note au bas de la page 103.) Cela vient du fait suivant: si $\mu = 0$, c'est à dire dans le mouvement Képlerien, les périhélies sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (1er exemple, § 1, chapitre I, deuxième partie) parce que nous avions pris pour variable, non pas g longitude du périhélie, mais $g - l$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences:

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques: les solutions du 1er genre, dont nous avons parlé dans le chapitre III (1ère partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ, et les solutions du 2d genre dont nous avons parlé dans le § 5 (chapitre I, 2me partie) et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ.

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses Képleriennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du 1er genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouvement Képlerien? les unes correspondent au cas où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, *à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre.* Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement Képlerien et *que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.*

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, je n'ai pu faire encore du cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance, et qu'ils y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.

Mai 1888.

Note A.

Sur la divergence des séries de M. Lindstedt.

J'ai annoncé plus haut sans démonstration que les séries proposées par M. Lindstedt ne sont pas convergentes. Je crois nécessaire de revenir sur ce sujet avec plus de détails, mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. Lindstedt. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je désire, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

Mettons les équations de la dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent mémoire et écrivons:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2, indépendante de y_1 et de y_2; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la *fonction perturbatrice.*

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de la dynamique et en particulier les problèmes de la mécanique céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2, les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ.

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, les différences:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2$$

seront du même ordre de grandeur que μ, ce qui nous permettra de poser:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu\varphi_1(x_1, x_2),$$
$$-\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu\varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors:

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu\frac{dF_1}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu\frac{dF_1}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés *directement* comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables:

$$w_1 \quad \text{et} \quad w_2$$

et que l'on pose:

$$w_1 = \lambda_1 t + \varpi_1, \qquad w_2 = \lambda_2 t + \varpi_2.$$

ϖ_1 et ϖ_2 seront des constantes d'intégration arbitraires; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complétement.

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$(1)\quad \begin{aligned}
&\lambda_1\frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2\frac{dx_1}{dw_2} - \mu\frac{dF_1}{dy_1} = 0,\\
&\lambda_1\frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2\frac{dx_2}{dw_2} - \mu\frac{dF_1}{dy_2} = 0,\\
&\lambda_1\frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2\frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1}\right) = 0,\\
&\lambda_1\frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2\frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$(2)\quad \begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots,\\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots,\\
y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu\lambda_1^1 + \mu^2\lambda_1^2 + \ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu\lambda_2^1 + \mu^2\lambda_2^2 + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Je suppose que les coëfficients λ_i^k sont des constantes et que les coëfficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2.

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1 est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et de y_2 et que les coëfficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2.

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2, x_1$ et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ et il est clair que les coëfficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2.

J'appelle:

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \quad \text{et} \quad \Phi_2'$$

ces quatre fonctions.

Cela posé, le théorème de M. Lindstedt consiste en ceci:

Il est possible de déterminer les $2q + 2$ constantes

$$\lambda_1^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^q,$$
$$\lambda_2^0, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_2^q,$$

et les $4q$ séries trigonométriques:

$$x_1^1, \ldots, x_1^q,$$
$$x_2^1, \ldots, x_2^q,$$
$$y_1^1, \ldots, y_1^q,$$
$$y_2^1, \ldots, y_2^q,$$

de façon à annuler dans

$$\Phi_1\,,\ \Phi_2\,,\ \Phi_1'\quad\text{et}\quad\Phi_2'$$

les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ, de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1}.

On trouve d'abord:

$$\lambda_1^0 = n_1\,,\qquad \lambda_2^0 = n_2\,,\qquad x_1^0 = \xi_1 + \omega_1\,,\qquad x_2^0 = \xi_2 + \omega_2\,,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposerons de l'ordre de μ.

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable:

$$\lambda_i^0\,,\ \lambda_i^1\,,\ \ldots,\ \lambda_i^{q-1},$$
$$x_i^1\,,\ \ldots,\ x_i^{q-1},$$
$$y_i^1\,,\ \ldots,\ y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer

$$\lambda_1^q\,,\ \lambda_2^q\,,\ x_1^q\,,\ x_2^q\,,\ y_1^q\,,\ y_2^q.$$

Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2 et Φ_1', Φ_2'.

Il vient:

$$n_1\frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2\frac{dx_1^q}{dw_2} = X_1,$$

$$n_1\frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2\frac{dx_2^q}{dw_2} = X_2,$$

$$n_1\frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2\frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q = Y_1,$$

$$n_1\frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2\frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q = Y_2,$$

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant des fonctions connues.

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2.

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible, il faut:

1° que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, ce qu'il est toujours permis de supposer.

2° que dans les séries trigonométriques X_1 et X_2, les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi, mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux.

3° que dans les séries trigonométriques Y_1 et Y_2, les termes tout connus se réduisent à λ_1^q et λ_2^q; comme λ_1^q et λ_2^q sont deux inconnues, nous déterminerons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autres constantes arbitraires que ω_1, ω_2, ϖ_1 et ϖ_2.

Ainsi les séries de M. Lindstedt sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi suivant les puissances des deux constantes ω_1 et ω_2.

Ces séries d'après le théorème de M. Lindstedt, satisfont *formellement* aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet supposons qu'il en soit ainsi et que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ, de ω_1 et de ω_2.

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2. Pour certaines valeurs de ω_1 et ω_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre *d'exposants caractéristiques.* Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations données.

Soit:

$$x_1 = \psi_1(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad x_2 = \psi_2(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2),$$

$$y_1 = \psi'_1(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2), \qquad y_2 = \psi'_2(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2)$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à $\omega_1, \omega_2, \varpi_1$ et ϖ_2 des valeurs déterminées $\omega_1^0, \omega_2^0, \varpi_1^0, \varpi_2^0$, les fonctions $\psi_1, \psi_2, \psi'_1, \psi'_2$ deviennent périodiques en t. Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_1}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1}, \quad \frac{dx_2}{d\varpi_1}, \quad \frac{dy_1}{d\varpi_1}, \quad \frac{dy_2}{d\varpi_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dx_2}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_1}{d\omega_2}, \quad \frac{dy_2}{d\omega_2},$$

$$\frac{dx_1}{d\varpi_2}, \quad \frac{dx_2}{d\varpi_2}, \quad \frac{dy_1}{d\varpi_2}, \quad \frac{dy_2}{d\varpi_2}$$

et nous y ferons ensuite

$$\omega_1 = \omega_1^0, \qquad \omega_2 = \omega_2^0, \qquad \varpi_1 = \varpi_1^0, \qquad \varpi_2 = \varpi_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ par exemple prendra la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t}\theta_1(t) + e^{\alpha_2 t}\theta_2(t) + e^{\alpha_3 t}\theta_3(t) + e^{\alpha_4 t}\theta_4(t),$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons:

$$x_1 = \varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2.

Il vient alors:

$$\frac{dx_1}{d\varpi_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \qquad \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}\right)t.$$

Les trois fonctions:

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t.

On trouverait pour $\frac{dx_1}{d\varpi_2}$ et $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, *si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tous les exposants caractéristiques seraient nuls.*

Dans quel cas en est-il ainsi?

Nous avons vu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (1ère partie, chapitre III, §§ 2 et 4).

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu\frac{dF_1}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu\frac{dF_1}{dx_i}$$

pouvaient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coëfficient α_1 de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation:

Nous avions posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2F_0}{dx_i dx_k}, \qquad B_{ik}^0 = \frac{d^2F_1}{dy_i dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacés par x_1^0 et x_2^0, pendant que y_1 et y_2 sont remplacés par $n_1 t + \varpi_1, n_2 t + \varpi_2$.[1] C_{ik}^0 est donc une constante et B_{ik}^0 une fonction périodique de t. J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite:

$$c_{11} = b_{11}C_{11}^0 + b_{12}C_{21}^0, \qquad c_{21} = b_{21}C_{11}^0 + b_{22}C_{21}^0,$$

$$c_{12} = b_{11}C_{12}^0 + b_{12}C_{22}^0, \qquad c_{22} = b_{21}C_{12}^0 + b_{22}C_{22}^0.$$

[1] Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de M. Lindstedt. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

L'équation qui nous donne α_1 s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines nulles, il faudrait que l'on eût:

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

ou

(4) $$b_{11} C_{11}^0 + 2b_{12} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0 = 0.$$

Or on a comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité

$$n_1 b_{11} + n_2 b_{12} = n_1 b_{21} + n_2 b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que:

(5) $$b_{11} = 0$$

ou bien que:

(6) $$n_2^2 C_{11}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_1^2 C_{22}^0 = 0.$$

Occupons-nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2$$

F_1 deviendra une fonction périodique de t. Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ψ le terme tout connu; ψ sera une fonction périodique de ϖ_1 et ϖ_2 et il viendra:

$$b_{11} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_1}.$$

Nous devrons donc avoir:

(7) $$\frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} = 0.$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps a été choisi

de telle sorte que ϖ_2 soit nul et que ψ soit fonction périodique de ϖ_1 seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. Lindstedt convergeaient) satisfaite identiquement. Et en effet si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ψ est une fonction périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire:

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire:

$$F_1 = \Sigma A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \Sigma B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2.

On aura alors

$$\psi = \mathrm{S} A_{m_1 m_2}^0 \cos(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2) + \mathrm{S} B_{m_1 m_2}^0 \sin(m_1 \varpi_1 + m_2 \varpi_2),$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A_{m_1 m_2}^0$ et $B_{m_1 m_2}^0$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0.

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ψ, on aura

$$A_{m_1 m_2}^0 = B_{m_1 m_2}^0 = 0.$$

Ainsi les coëfficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que:

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons examiné et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2\frac{d^2F_0}{dx_1^2} - 2\frac{dF_0}{dx_1}\frac{dF_0}{dx_2}\frac{d^2F_0}{dx_1dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2\frac{d^2F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Elle exprime que la courbe

$$F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$$

a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2) =$ const. devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas particulier que nous laisserons de côté; car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, *dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.*

On peut présenter cette démonstration sous une autre forme.

Soit:

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= \theta_1(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), & x_2 &= \theta_2(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), \\ y_1 - w_1 &= \mu\theta_1'(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), & y_2 - w_2 &= \mu\theta_2'(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2) \end{aligned}$$

les séries de M. Lindstedt. Nous avons vu que les fonctions θ et θ' sont ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2 et qu'elles sont périodiques en w_1 et w_2.

Des équations:

$$y_1 - w_1 = \mu\theta_1', \qquad y_2 - w_2 = \mu\theta_2'$$

nous pouvons par la formule de Lagrange tirer $y_1 - w_1$ et $y_2 - w_2$

développées suivant les puissances de μ et exprimées non plus en fonctions de w_1 et de w_2, mais en fonctions de y_1 et y_2; nous aurons alors:

$$(9)\qquad y_1 - w_1 = \mu f_1(\mu, \omega_1, \omega_2, y_1, y_2), \qquad y_2 - w_2 = \mu f_2(\mu, \omega_1, \omega_2, y_1, y_2).$$

f_1 et f_2 sont des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ, ω_1 et ω_2; ce sont en outre des fonctions périodiques de y_1 et y_2.

Dans les équations (8) substituons à la place de w_1 et w_2 leurs valeurs tirées de (9).

Il viendra:

$$(10)\qquad x_1 = \eta_1(\mu, \omega_1, \omega_2, y_1, y_2), \qquad x_2 = \eta_2(\mu, \omega_1, \omega_2, y_1, y_2),$$

η_1 et η_2 étant des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ, de ω_1 et de ω_2 et suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2.

Des équations (10) nous pouvons tirer ω_1 et ω_2 et nous trouverons:

$$\omega_1 = \zeta_1(\mu, x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$\omega_2 = \zeta_2(\mu, x_1, x_2, y_1, y_2),$$

ζ_1 et ζ_2 étant des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ, $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$ et les sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2.

Comme ω_1 et ω_2 sont des constantes d'intégration, ζ_1 et ζ_2 seront des intégrales des équations (1); elles seront analytiques et uniformes au moins pour les valeurs suffisamment petites de ω_1 et ω_2.

Or nous avons vu que les équations (1) ne pouvaient admettre qu'une seule intégrale analytique et uniforme, l'intégrale des forces vives.

Donc les séries de M. Lindstedt ne peuvent être convergentes.

Je dois, avant de terminer, faire quelques remarques.

En premier lieu, la méthode dont je me suis servi pour trouver les séries de M. Lindstedt diffère beaucoup de celle qu'a exposée ce savant, mais les séries finalement obtenues sont les mêmes et d'ailleurs les démonstrations précédentes s'appliquent à toutes les séries de même forme.

Ce n'est pas tout. J'ai démontré que les séries qui nous occupent ne sont pas convergentes pour toutes les valeurs des constantes arbitraires qui y entrent. Il reste possible, quoique peut-être peu vraisemblable, que ces séries deviennent convergentes pour certains systèmes particuliers de valeurs de ces constantes.[1]

En terminant, je dois déclarer que les considérations qui précèdent n'enlèvent rien au mérite pratique des développements de M. Lindstedt. Ils ne convergent pas; donc ils ne peuvent donner une approximation indéfinie; mais ils peuvent donner assez rapidement une approximation très grande et très suffisante pour les besoins de la pratique.

Je serais désolé d'avoir jeté quelque discrédit sur ces séries; si je les ai choisies comme exemple pour développer des considérations qui s'appliquent également bien à tous les autres développements proposés, c'est précisément parce que je regarde la méthode de M. Lindstedt comme l'une des meilleures qui soit connue.

Note B.

Nouvel exposé des résultats.

Il ne sera peut-être pas inutile de reprendre l'énoncé des principaux résultats obtenus dans ce mémoire, en les exprimant dans le langage habituel de l'astronomie.

Nous nous sommes placés dans un cas particulier et nous avons supposé:

1°. que la masse de la planète troublée étant nulle, la planète troublante suit exactement les lois de Képler;

2°. que l'excentricité de la planète troublante étant nulle, cette planète décrit une circonférence d'un mouvement uniforme;

[1] Ce qu'il conviendrait surtout d'examiner, c'est si les séries ne convergent pas quand on donne à ω_1 et ω_2 des valeurs telles que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

3°. que l'inclinaison des deux orbites étant nulle, les deux planètes restent constamment dans un même plan.

La position de la planète troublante sera entièrement définie par sa *longitude moyenne* l'.

Pour définir la situation de la planète troublée, il faut se donner sa *longitude moyenne* l et ses éléments osculateurs à savoir:

le grand axe a,

l'excentricité e,

la longitude du périhélie ϖ.

Nous prendrons:

pour unité de longueur le rayon constant de l'orbite de la planète troublante;

pour unité de masse la masse du Soleil augmentée de la masse de la planète troublante.

Nous choisirons l'origine du temps et l'unité de temps de telle sorte que

$$l' = t.$$

Nous appellerons μ la masse de la planète troublante et $\mu\Omega$ la fonction perturbatrice.

Ω sera une fonction uniforme de $a, e, l - l'$ et $l' - \varpi$, périodique par rapport à ces deux dernières variables.

Ces diverses quantités sont liées par une relation connue depuis longtemps sous le nom d'intégrale de Jacobi.

Cette relation s'écrit:

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1 - e^2)} + \mu\Omega = \text{const.} \tag{1}$$

Je regarderai la constante qui entre dans le second membre de la relation (1) comme une donnée de la question. Nous supposerons que cette constante soit notablement plus grande que $\frac{3}{2}$, ce qui arrivera toujours dans les applications.

Introduisons maintenant une variable auxiliaire en posant:

$$\epsilon = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

ξ est donc une fonction de e seulement et on voit sans peine que quand ξ varie de 0 à 1, e (que nous regarderons comme essentiellement positif) variera de 0 à 1, le mouvement étant direct; et que quand ξ varie de 1 à $+\infty$ l'excentricité e variera de 1 à 0, le mouvement étant rétrograde. Il résulte de là que *e est fonction uniforme de ξ.*

La relation (1) montre ensuite que a est fonction uniforme de ξ, de $l-l'$ et de $l'-\varpi$ et qu'elle est périodique par rapport à ces deux dernières variables.

Cela posé, le problème admettra une infinité de solutions particulières que nous appellerons solutions périodiques et qui jouiront des propriétés suivantes.

On aura:

$$a=\varphi_1(t),\qquad e=\varphi_2(t),\qquad l-l'=n_1t+\varphi_3(t),\qquad l'-\varpi=n_2t+\varphi_4(t)$$

n_1 et n_2 étant des constantes dont le rapport est commensurable; φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 étant des fonctions périodiques du temps dont la période est le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n_1}$ et de $\frac{2\pi}{n_2}$. (Il résulte de là que $\cos(l-l')$, $\sin(l-l')$, $\cos(l'-\varpi)$ et $\sin(l'-\varpi)$ sont aussi des fonctions périodiques du temps.)

Parmi les solutions périodiques, nous distinguerons celles du 1er genre, pour lesquelles φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, n_1 et n_2 sont développables suivant les puissances croissantes de μ.

Il existe aussi des solutions périodiques du 2d genre, pour lesquelles ce développement n'est pas possible et qui disparaissent pour les petites valeurs de μ.

Occupons-nous spécialement des solutions du 1er genre.

A chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspondent au moins deux solutions périodiques du 1er genre.

Nous distinguerons les solutions du 1er genre en stables et instables.

Supposons que les valeurs de a, e, $l-l'$, $l'-\varpi$ soient à l'origine du temps infiniment voisines des valeurs qui correspondent à une solution périodique; si elles en restent infiniment voisines pendant un temps infiniment long, la solution sera stable; elle sera instable dans le cas contraire.

On démontre qu'à toute valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspondent au moins une solution périodique stable et au moins une solution instable.

Considérons en particulier les solutions instables. Soit donc:

$$a=\varphi_1(t),\qquad e=\varphi_2(t),\qquad l-l'=n_1t+\varphi_3(t),\qquad l'-\varpi=n_2t+\varphi_4(t)$$

une solution périodique instable.

Il existera une infinité de solutions particulières qui pour t négatif et très grand prendront la forme suivante:

$$(2)\qquad a=\varphi_1+\psi_1,\qquad e=\varphi_2+\psi_2,\qquad l-l'=n_1t+\varphi_3+\psi_3,$$
$$l-\varpi=n_2t+\varphi_4+\psi_4,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 étant des fonctions développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, de $Ae^{\alpha t}$, de $\cos\frac{2\pi t}{\lambda}$ et $\sin\frac{2\pi t}{\lambda}$. A désigne une constante arbitraire d'intégration; λ est la période de la solution périodique considérée; enfin α est un nombre positif développable selon les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Il existera également une infinité de solutions particulières qui pour t positif et très grand prendront la forme suivante:

$$(2')\qquad a=\varphi_1+\psi'_1,\qquad e=\varphi_2+\psi'_2,\qquad l-l'=n_1t+\varphi_3+\psi'_3,$$
$$l'-\varpi=n_2t+\varphi_4+\psi'_4,$$

ψ'_1, ψ'_2, ψ'_3 et ψ'_4 étant des fonctions développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, de $Be^{-\alpha t}$, de $\cos\frac{2\pi t}{\lambda}$ et $\sin\frac{2\pi t}{\lambda}$. B désigne une nouvelle constante d'intégration.

Mais ce que rien ne permettait de prévoir, *ce sont les mêmes solutions particulières* qui prendront la forme (2) pour t négatif et très grand et la forme (2') pour t positif et très grand.

Entre les quatre relations (2) éliminons le temps t et la constante d'intégration A, il viendra:

$$(3)\qquad (a-\theta)^2-\mu(\theta')^2=0,\qquad (e-\theta_1)^2-\mu(\theta'_1)^2=0,$$

$\theta, \theta', \theta_1$ et θ'_1 étant des fonctions périodiques de $l' - \varpi$ et $l - l'$ ordonnées suivant les puissances de μ.

Observons que les relations (2) ne sont vraies que pour t négatif et très grand et qu'au contraire les relations (3) qu'on en déduit, sont encore vraies pour toutes les valeurs du temps pourvu que μ soit assez petit.

Des relations (3) nous tirerons

$$a = \theta \pm \theta'\sqrt{\mu}, \qquad e = \theta_1 \pm \theta'_1\sqrt{\mu}$$

et par conséquent

$$\xi = \theta \pm \theta'\sqrt{\mu}$$

θ et θ' étant des fonctions de même forme que $\theta, \theta', \theta_1$ et θ'_1.

Il résulte de là que si l'on a à une époque quelconque:

$$(\xi - \theta)^2 - \mu(\theta')^2 = 0 \tag{5'}$$

cette relation subsistera pour toutes les valeurs du temps.

Supposons que l'on ait à l'origine des temps

$$\xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu}. \tag{4}$$

Je dis que cette inégalité sera satisfaite pour toutes les valeurs du temps, et en effet elle ne pourrait cesser de l'être sans que $(\xi - \theta)^2 - \mu(\theta')^2$ devînt nul; or nous venons de voir que cette quantité ne pouvait être nulle à une époque quelconque à moins d'être toujours nulle.

Pour des conditions initiales convenables, on voit donc que ξ sera assujetti à rester toujours plus petit que $\theta - |\theta'|\sqrt{\mu}$. Si, comme cela arrivera toujours dans les applications, ξ est très petit, e sera une fonction croissante de ξ.

L'inégalité

$$\xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu}$$

entraîne la suivante:

$$e < \theta_1 - |\theta'_1|\sqrt{\mu}.$$

On a ainsi une limite supérieure de l'excentricité et la relation (1) permettrait d'en déduire une limite supérieure (ou inférieure suivant les cas) pour le grand axe a.

Pour la même raison si on a à l'origine des temps

$$\theta - |\theta'|\sqrt{\mu} < \xi < \theta + |\theta'|\sqrt{\mu} \tag{4'}$$

ces inégalités subsisteront toujours; c'est le cas où il y a ce qu'on appelle libration.

Enfin si on a à l'origine des temps

$$\xi > \theta + |\theta'|\sqrt{\mu} \tag{4''}$$

cette inégalité subsistera toujours.

A chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond au moins une solution instable et par conséquent au moins une inégalité analogue à (4), (4') ou (4''). Nous aurons donc une infinité d'inégalités de cette nature et chacune d'elles nous donnera pour a et pour e une limite supérieure ou inférieure. En choisissant convenablement parmi ces inégalités, on peut resserrer autant qu'on le veut les limites entre lesquelles a et e restent comprises.

Dans le cas particulier qui nous occupe, la stabilité est donc entièrement démontrée.

Mais il me reste une remarque à faire.

Précisément dans ce cas particulier, M. Hill, dans ses recherches sur la lune (American Journal, tome 1), a donné une démonstration de la stabilité en se servant seulement de l'intégrale de Jacobi.

C'est ce qu'a refait depuis M. Bohlin avec plus de détails (Acta mathematica, tome 10).

Mais il y a une très grande différence entre les résultats qu'ont obtenus ces deux géomètres et ceux que j'énonce ici.

MM. Hill et Bohlin démontrent seulement que la distance de la planète troublée au Soleil ne peut croître indéfiniment; ils ne démontrent pas qu'elle ne peut pas s'annuler; d'ailleurs la limite supérieure qu'ils lui assignent est extrêmement éloignée de la limite précise.

J'ajouterai que le raisonnement de MM. Hill et Bohlin ne prouve pas que l'excentricité ne peut pas devenir très voisine de 1 et même que le mouvement ne peut pas devenir rétrograde.

Au contraire, la méthode que je propose permet d'obtenir pour le grand axe a et pour l'excentricité e, des limites supérieures et inférieures qui sont, sinon les limites précises elles-mêmes, du moins aussi rapprochées qu'on le veut des limites précises.

Je démontre ainsi que le grand axe restera constamment compris entre deux limites très resserrées, que l'excentricité restera toujours très petite et que le mouvement restera toujours direct.

Addition à la Note B.

Dans la plupart des applications la valeur initiale de ξ sera très petite; en effet ξ s'annule avec l'excentricité et l'excentricité des orbites des corps célestes est toujours une très petite quantité.

Soit donc ξ_0 cette valeur initiale de ξ. Nous aurons:

$$0 < \xi_0 < 1.$$

Soit ensuite n_1 un nombre commensurable. Posons

$$n_1^2 a_1^3 = 1,$$

$$\frac{1}{2a_1} + \sqrt{a_1(1-e_1^2)} = C, \qquad \xi_1 = \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{1+\sqrt{1-e_1^2}}.$$

Nous pourrons choisir le nombre commensurable n_1 de telle façon que ξ_1, quoique très petit, soit supérieure à ξ_0. On aura alors:

$$0 < \xi_0 < \xi_1 < 1.$$

A cette valeur commensurable n_1 correspondra au moins une solution périodique instable; à cette solution instable correspondront une infinité de solutions de la forme (2) que j'appelle solutions asymptotiques. A ce nombre commensurable n_1 correspondra donc une équation de la forme (3')

$$(\xi_0 - \theta)^2 - \mu(\theta')^2 = 0.$$

D'ailleurs pour $\mu = 0$, θ se réduit à ξ_1 et θ' reste fini.

Si donc μ est assez petit, l'expression

$$\theta - |\theta'|\sqrt{\mu}$$

(qui différera très peu de ξ_1) sera constamment supérieure à ξ_0 et constamment inférieure à un nombre fixe λ plus petit que 1 (et même très petit). On aura ainsi

$$\xi_0 < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu} < \lambda < 1.$$

Mais nous avons vu que si une inégalité de la forme

$$\xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu}$$

est satisfaite à un instant donné, elle le sera toujours; on aura donc à une époque quelconque:

$$\xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu} < \lambda < 1.$$

Ainsi l'excentricité restera toujours très petite, puisque ξ sera toujours inférieure à λ qui est un nombre très petit.

Cela exclut la possibilité d'une rencontre entre la planète troublée et le Soleil. Cette rencontre ne pourrait en effet se produire que si l'excentricité (et par conséquent ξ) devenait égale à 1.

Mais il y a plus; nous pouvons assigner une limite inférieure à la distance de la planète troublée et du Soleil.

En effet ce rayon vecteur est toujours plus grand que $a(1-e)$; il ne pourrait donc devenir très petit que si a devenait très petit ou e très voisin de 1. Nous venons de voir que, ξ restant inférieur à λ, e qui est lié à ξ par une relation très simple, restera aussi très petit et ne pourra se rapprocher de 1.

Le rayon vecteur ne pourrait donc devenir très petit que si a devenait très petit; mais cela est impossible à cause de l'équation de Jacobi

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} + \mu\Omega = \text{const.}$$

Le second membre étant une constante, le premier membre doit rester limité; or si l'on fait tendre le rayon vecteur et a vers 0, $\frac{1}{2a}$ croît indéfiniment et les deux autres termes tendent vers des limites finies; le premier membre tendrait donc vers l'infini, ce qui est impossible.

D'autre part la distance des deux planètes troublée et troublante ne peut décroître non plus au delà de toute limite, car Ω devrait alors croître indéfiniment et comme le premier membre de l'équation de Jacobi doit rester fini, il faudrait que l'un des deux autres termes de ce premier membre devînt aussi infini. Ce ne pourrait être $\frac{1}{2a}$ parce que si la distance des deux planètes est très petite, le rayon vecteur doit être très voisin de 1 et que ce rayon vecteur devant être compris entre $a(1-e)$ et $a(1+e)$, on aura:

$$a(1-e) < 1 < a(1+e) < 2a.$$

Ce ne pourrait être non plus $\sqrt{a(1-e^2)}$ parce que l'inégalité

$$a(1-\lambda) < a(1-e) < 1$$

s'oppose à ce que a devienne infini.

Il est donc absurde de supposer que la distance de la planète troublée, tant au Soleil qu'à la planète troublante, puisse devenir très petite.

On peut présenter le résultat sous une forme plus précise encore.

Nous pouvons choisir deux surfaces asymptotiques

$$\xi = \theta - |\theta'|\sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad \xi = \theta_1 + |\theta_1'|\sqrt{\mu}$$

de telle façon que la valeur initiale ξ_0 de ξ satisfasse à la double inégalité:

$$\theta_1 + |\theta_1'|\sqrt{\mu} < \xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu}.$$

On aura alors à une époque quelconque:

$$\theta_1 + |\theta_1'|\sqrt{\mu} < \xi < \theta - |\theta'|\sqrt{\mu}.$$

Soient θ^0 et θ_1^0 les valeurs que prennent θ et θ_1 quand on y fait $\mu = 0$; ces valeurs sont des constantes et je puis choisir les deux surfaces asymptotiques de telle façon que la différence

$$\theta^0 - \theta_1^0$$

soit aussi petite que l'on veut.

Cela posé ξ va varier entre deux limites et la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure sera du même ordre de grandeur que:

$$|\theta - \theta^0 - |\theta'|\sqrt{\mu}| + |\theta^0 - \theta_1^0| + |\theta_1 - \theta_1^0 + |\theta_1'|\sqrt{\mu}|$$

c'est à dire du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$.

On peut raisonner de la même manière sur a et e et par conséquent, on peut dire:

Le grand axe (et il en est de même de l'excentricité) *varie entre deux limites et la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure est du même ordre de grandeur que* $\sqrt{\mu}$.

Note C.

Sur les invariants intégraux.

Soit:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que:

$$(2) \qquad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Cette solution s'écrira

$$x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$
$$x_2 = \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{da_1} & \frac{dx_2}{da_1} & \cdots & \frac{dx_n}{da_1} \\ \frac{dx_1}{da_2} & \frac{dx_2}{da_2} & \cdots & \frac{dx_n}{da_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_1}{da_n} & \frac{dx_2}{da_n} & \cdots & \frac{dx_n}{da_n} \end{vmatrix}$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} da_1 da_2 \ldots da_n$$

et

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la k^e colonne duquel on a remplacé:

$$\frac{dx_k}{da_1}, \frac{dx_k}{da_2}, \ldots, \frac{dx_k}{da_n}$$

par

$$\frac{d^2x_k}{da_1 dt}, \frac{d^2x_k}{da_2 dt}, \ldots, \frac{d^2x_k}{da_n dt}.$$

Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k,$$

d'où:

$$\frac{d^2x_k}{da_i dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\frac{dx_1}{da_i} + \frac{dX_k}{dx_2}\frac{dx_2}{da_i} + \ldots + \frac{dX_k}{dx_n}\frac{dx_n}{da_i}.$$

On déduit de là:

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n) da_1 da_2 \ldots da_n$$

$$= \int \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right) \Delta da_1 da_2 \ldots da_n = 0.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons:

$$(2') \qquad \frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0,$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je dis que

$$J = \int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int M \Delta da_1 da_2 \ldots da_n$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt}\right) da_1 da_2 \ldots da_n.$$

Il faut montrer que:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

On a en effet (en vertu des équations (1))

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et (d'après ce que nous venons de voir):

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n}\right).$$

Il vient donc:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n}\right) = 0.$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux équations de la dynamique.

Soient les équations

$$(1') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta),$$

$$y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta).$$

Je dis que:

$$J = \int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n) = \int \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} \right) d\alpha d\beta$$

est une constante.

Il vient en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} \right) d\alpha d\beta.$$

Il vient ensuite:

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\beta} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta}.$$

On conclut de là que:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} \right)$$

$$= \sum\sum \left(\frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_k}{d\alpha} \right).$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β, on a donc:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} \right) = \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} \right).$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la dynamique, mais en posant:

$$F = T + U,$$

T ne dependant que des y et U des x seulement. De plus T est homogène de degré 2 et U homogène de degré -1.

Prenons une solution

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha), \qquad y_i = \psi_i(t, \alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α.

Considérons l'intégrale simple:

$$J = \int \sum \left(2x_i \frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)t,$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(2\frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dx_i}{d\alpha} + 2x_i \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha} + y_i \frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Il vient:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i};$$

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2T}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2U}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \sum \left(2 \frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{d^2T}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha} - \frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dU}{dx_i} - 2x_i \frac{d^2U}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a:

$$\sum_i y_i \frac{d^2T}{dy_i dy_k} = \frac{dT}{dy_k}, \qquad \sum_i x_i \frac{d^2U}{dx_i dx_k} = -2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + 3\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3\int (dT + dU) + 3(C_1 - C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Note D.

Sur les équations linéaires à coëfficients périodiques.

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que

si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p - 2$ premières dérivées et si sa $p - 1^e$ dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quelque grand que soit n,

$$|n^p A_n| < K, \qquad |n^p B_n| < K.$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que:

$$|n^2 A_n| < K, \qquad |n^2 B_n| < K.$$

Il résulte de là que la série

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots$$
$$+ |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| + \ldots$$

converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{1,1}x_1 + \varphi_{1,2}x_2 + \ldots + \varphi_{1,n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{2,1}x_1 + \varphi_{2,2}x_2 + \ldots + \varphi_{2,n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \varphi_{n,1}x_1 + \varphi_{n,2}x_2 + \ldots + \varphi_{n,n}x_n. \end{aligned}$$

Les n^2 coëfficients $\varphi_{i,k}$ sont des fonctions de t périodiques et de période 2π.

Les équations (2) ne changent donc pas quand on change t en $t + 2\pi$. Cela posé soient:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &x_1 = \psi_{1,1}(t), \quad x_2 = \psi_{1,2}(t), \quad \ldots, \quad x_n = \psi_{1,n}(t), \\ &x_1 = \psi_{2,1}(t), \quad x_2 = \psi_{2,2}(t), \quad \ldots, \quad x_n = \psi_{2,n}(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1 = \psi_{n,1}(t), \quad x_2 = \psi_{n,2}(t), \quad \ldots, \quad x_n = \psi_{n,n}(t) \end{aligned}$$

n solutions, linéairement indépendantes, des équations (2).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t + 2\pi$ et les n solutions deviendront:

$$\begin{gathered}
x_1 = \psi_{1,1}(t + 2\pi)\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = \psi_{1,n}(t + 2\pi),\\
x_1 = \psi_{2,1}(t + 2\pi)\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = \psi_{2,n}(t + 2\pi),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_1 = \psi_{n,1}(t + 2\pi)\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = \psi_{n,n}(t + 2\pi).
\end{gathered}$$

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (3) de sorte qu'on aura:

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,1}(t + 2\pi) = A_{1,1}\psi_{1,1}(t) + A_{1,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{1,n}\psi_{n,1}(t),\\
(4)\qquad &\psi_{2,1}(t + 2\pi) = A_{2,1}\psi_{1,1}(t) + A_{2,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{2,n}\psi_{n,1}(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_{n,1}(t + 2\pi) = A_{n,1}\psi_{1,1}(t) + A_{n,2}\psi_{2,1}(t) + \ldots + A_{n,n}\psi_{n,1}(t),
\end{aligned}$$

les A étant des coefficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients)

$$\psi_{1,2}(t + 2\pi) = A_{1,1}\psi_{1,2}(t) + A_{1,2}\psi_{2,2}(t) + \ldots + A_{1,n}\psi_{n,2}(t)$$

etc.

Cela posé formons l'équation en S:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} - S & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n}\\ A_{2,1} & A_{2,2} - S & \ldots & A_{2,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coefficients constants

$$B_1\,,\ B_2\,,\ \ldots\,,\ B_n$$

tels que si l'on pose:

$$\theta_{1,1}(t) = B_1\psi_{1,1}(t) + B_2\psi_{2,1}(t) + \ldots + B_n\psi_{n,1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1,i}(t) = B_1\psi_{1,i}(t) + B_2\psi_{2,i}(t) + \ldots + B_n\psi_{n,i}(t)$$

on ait:

$$\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1,i}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1,i}(t).$$

Posons:

$$S_1 = e^{2\alpha_1\pi},$$

il viendra:

$$e^{-\alpha_1(t+2\pi)}\theta_{1,1}(t + 2\pi) = S_1 e^{-2\alpha_1\pi}e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t) = e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t).$$

Cette équation exprime que:

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,1}(t)$$

est une fonction périodique que nous pourrons développer en une série trigonométrique:

$$\lambda_{1,1}(t).$$

Si les fonctions périodiques $\varphi_{i,k}(t)$ sont analytiques, il en sera de même des solutions des équations différentielles (2) et de $\lambda_{1,1}(t)$. La série $\lambda_{1,1}(t)$ sera donc absolument et uniformément convergente.

De même

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1,i}(t)$$

sera une fonction périodique qu'on pourra représenter par une série trigonométrique:

$$\lambda_{1,i}(t).$$

Nous avons donc une solution particulière des équations (2) qui s'écrit:

$$(6)\qquad x_1 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t), \qquad x_2 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,2}(t)\,, \quad \ldots\,, \quad x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,n}(t).$$

A chaque racine de l'équation (5) correspond une solution de la forme (6).

Si l'équation (5) a toutes ses racines distinctes, nous aurons n solutions de cette forme linéairement indépendantes et la solution générale s'écrira:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,1}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,1}(t),\\
x_2 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,2}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,2}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,2}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2,n}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n,n}(t).
\end{aligned}
$$

Les C sont des constantes d'intégration, les α sont des constantes et les λ sont des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes.

Voyons maintenant ce qui arrive quand l'équation (5) a une racine double, par exemple quand $\alpha_1 = \alpha_2$. Reprenons la formule (7), faisons-y

$$C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1. Il vient:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}[C_1\lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t)]$$

ou en posant

$$C_1 = C_1' - C_2,$$

$$C_2 = \frac{C_2'}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

il viendra:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1,1}(t) + C_2'\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)}{\alpha_2-\alpha_1}\right].$$

Il est clair que la différence

$$\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)$$

s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrons donc poser:

$$\lambda_{2,1}(t) = \lambda_{1,1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda'(t).$$

Il vient ainsi:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1,1} + C_2'\lambda_{1,1}\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} - 1}{\alpha_2-\alpha_1} + C_2'\lambda'(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\right]$$

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$):

$$x_1 = C_1'e^{\alpha_1 t}\lambda_{1,1} + C_2'e^{\alpha_1 t}[t\lambda_{1,1} + \lim \lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante:

$$e^{\alpha_1 t}t\lambda(t),$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme:

$$e^{\alpha_1 t}t^2\lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. Floquet, Callandreau, Bruns, Stieltjes et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

Note E.

Sur le calcul des limites.

L'une des plus belles découvertes de Cauchy (Comptes Rendus, tome 14, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z),\\
\frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z).
\end{aligned}
$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de x, y et z, ces équations admettront une solution de la forme suivante:

$$y = \varphi_1(x), \qquad z = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x.

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme:

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1-\alpha x)(1-\beta y)(1-\gamma z)},$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2. En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f', on augmente les coefficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme:

$$(1') \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(x, y, z), \\ \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) = 1. \end{aligned}$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1-\alpha(x+y+z)};$$

elles deviendront:

$$(2') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1-\alpha(x+y+z)}.$$

Les équations (1') sont satisfaites formellement par des séries:

$$x = \varphi(t) = t, \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t.

De même les équations (2') seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \qquad y = \varphi_1'(t), \qquad z = \varphi_2'(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t. (On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) = \varphi_2'(t)$.)

Si M et α sont convenablement choisis, les coefficients des séries φ' sont plus grands que ceux des séries φ; or les séries φ' convergent; donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'Analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. Jordan (tome 3, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y et z, mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ. Ecrivons alors les équations (1) sous la forme:

$$(1'') \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, \mu) = 1, \\ \frac{dy}{dt} &= f_1(x, y, z, \mu), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(x, y, z, \mu). \end{aligned}$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui satisfassent formellement aux équations (1'') et qui soient développées suivant les puissances croissantes de t, de μ et de trois constantes d'intégration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction:

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1-\beta\mu)[1-\alpha(x+y+z)]}.$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ. On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f, de f_1 et de f_2.

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$(2'') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1-\beta\mu)[1-\alpha(x+y+z)]}.$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0, satisfaisant aux équations (2'') et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$.

En raisonnant comme le faisait Cauchy, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ. Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t, soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des *quatre* variables μ, x_0, y_0 et z_0, quelque grand que soit t,

pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0 et quand

$$|t| < \rho,$$

ρ étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t_1 est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0, c'est à dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs de x_1, y_1 et z_1 pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ y &= \varphi'_1(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ z &= \varphi'_2(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0). \end{aligned}$$

Les séries φ', φ'_1 et φ'_2, tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2, sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de $t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t = t_1$.

Elles convergeront si $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ sont assez petits et si

$$|t - t_1| < \rho_1,$$

ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1.

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1, on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$

et $z_1 - z_1^0$. Mais $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$, $z_1 - z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0. Donc, pour tout point t intérieur au cercle C_1, les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1, le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de t, de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0, quelque grand que soit t_0.

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de CAUCHY cesse d'être vrai si les fonctions f_1 et f_2 ne sont plus holomorphes en x, y, z; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ, de $x - x_1^0$, $y - y_1^0$, $z - z_1^0$, il n'existera pas en général trois séries φ', φ_1' et φ_2' de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x = x_1^0, \qquad y = y_1^0, \qquad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t, on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0. Mais si pour $t = t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0.

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3 que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Ce théorème joue un grand rôle dans le présent mémoire.

Dans le § 5 (1ère partie, chapitre III) nous démontrons que certaines solutions particulières du problème, que nous appelons solutions asymptotiques, sont de la forme suivante.

Les quantités inconnues x_1, x_2, ..., x_n peuvent pour des valeurs de t négatives et très grandes être développées suivant les puissances d'un certain paramètre $\sqrt{\mu}$ et d'une certaine exponentielle $e^{\alpha t}$, les coefficients étant des fonctions périodiques de t.

Nous en concluons que si t_1 est une quantité négative suffisamment grande en valeur absolue, les quantités x_1, x_2, ..., x_n peuvent être développées suivant les puissances de $t - t_1$ et de $\sqrt{\mu}$.

Si nous appliquons maintenant le théorème que nous venons de démontrer, nous verrons que, dans une solution asymptotique, les quantités x_1, x_2, ..., x_n sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, *pour toutes les valeurs de* t.

Ce même théorème peut servir également pour l'étude de ce que nous avons nommé le conséquent d'un point donné.

Soit:

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation d'une surface S que nous supposerons passer par l'origine O. Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

D'après la terminologie que nous avons adopté, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Supposons de plus que dans le voisinage du point O, $\varphi(x, y)$ soit développable suivant les puissances de x et y, et dans le voisinage du point P suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

En effet, d'après le théorème que nous venons d'établir, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t - \tau$ sont suffisamment petits, on aura:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x &= \psi_1(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\
y &= \psi_2(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\
z &= \psi_3(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),
\end{aligned}
$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t - \tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$, si $x - a$ et $y - b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons:

$$(5)\qquad \psi_3 = \psi_4.$$

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t - \tau$, μ, x_0, y_0 et z_0 et on peut chercher à la résoudre par rapport à $t - \tau$. Pour:

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = 0.$$

D'après un théorème de Cauchy, sur lequel nous allons d'ailleurs revenir dans un instant, on pourra tirer de la relation (5) $t - \tau$ sous la forme suivante:

$$(6)\qquad t - \tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point O pour $\mu = 0$ va *toucher* la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par θ et x, y, z par x_1, y_1, z_1; il viendra:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0),\\
y_1 &= \theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0),\\
z_1 &= \theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0),
\end{aligned}
$$

θ_1, θ_2 et θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

C. Q. F. D.

C'est de ce résultat (qui, malgré la longueur de la démonstration que nous venons d'en donner, est presque évident) que nous avons fait usage dans le lemme qui précède le théorème III (§ 4, 1ère partie, chapitre II).

Nous avons encore fait usage du même théorème, pour démontrer l'existence des solutions périodiques dans le § 1 (1ère partie, chapitre III). A la fin de ce paragraphe, par exemple, nous considérons le cas où les équations différentielles ne contiennent pas explicitement le temps t.

Pour $\mu = 0$, nous avons supposé qu'il existe une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Nous avons appelé ensuite (en suppososant que μ reste très petit, mais cesse d'être nul) $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur initiale de x_i pour $t = 0$ et $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$.

D'après le théorème que nous venons de démontrer, ψ_i est une fonction développable suivant les puissances croissantes de μ, de τ et des β_i, si ces quantités sont assez petites et il est évident d'ailleurs que cette fonction s'annule pour

$$\mu = \tau = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

C'est sur ce résultat que nous nous sommes appuyés dans le paragraphe que je viens de citer.

Mais dans ce même paragraphe, nous avons encore appliqué un autre théorème de CAUCHY.

Voici quel est ce théorème:

Si on a $n + p$ quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p$ entre lesquelles ont lieu n relations:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0; \end{aligned}$$

si les f sont développables suivant les puissances des x et des y et s'annulent avec ces $n + p$ variables;

si enfin le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas nul quand les x et les y s'annulent à la fois;

on pourra tirer des équations (7) les n inconnues y sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Considérons en effet x_1 comme la seule variable indépendante, $x_2, x_3, \ldots, x_p$ comme des paramètres arbitraires, nous pourrons remplacer les équations (7) par les n équations différentielles:

$$(8)\qquad \frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \ldots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$; si quand les x et y s'annulent à la fois on a:

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dy} \gtrless 0;$$

si enfin y est défini par l'égalité

$$f = 0,$$

y sera développable suivant les puissances des x.

C'est ainsi que dans le paragraphe cité (§ 1, chapitre III, 1ère partie) nous avons établi que l'on peut résoudre les n équations

$$(9)\qquad \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$$

par rapport à n quelconques des $n + 1$ inconnues:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau.$$

L'existence des solutions périodiques une fois démontrée, il reste à faire voir que ces solutions peuvent se développer suivant les puissances de μ et s'écrire:

$$x_i = \theta_{i,0}(t) + \mu\theta_{i,1}(t) + \mu^2\theta_{i,2}(t) + \ldots, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

$\theta_{i,0}(t)$, $\theta_{i,1}(t)$, etc., étant des fonctions périodiques de t développables selon les sinus et cosinus des multiples de:

$$\frac{2\pi t}{T + \tau} = \lambda t.$$

D'après le théorème que nous avons déjà appliqué bien des fois, nous aurons

$$x_i = H_i[t - t_1, \mu, x_1^0 - \varphi_1(0), x_2^0 - \varphi_2(0), \ldots, x_n^0 - \varphi_n(0)]$$

si $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sont les valeurs initiales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour $t = 0$.

H_i sera développable suivant les puissances de

$$t - t_1, \mu \quad \text{et} \quad x_i^0 - \varphi_i(0)$$

si μ est assez petit et si t est assez voisin de t_1 et x_i^0 de $\varphi_i(0)$.

Nous prendrons

$$t = t_1 + \frac{t_1 \tau}{T}.$$

De plus nous prendrons:

$$x_i^0 - \varphi_i(0) = \beta_i.$$

Nous choisirons les β_i et τ de façon à obtenir une solution périodique, c'est à dire de façon à satisfaire aux équations (9). Nous venons de voir que si τ et les β_i satisfont à ces équations (9), on pourra développer τ, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ suivant les puissances croissantes de μ et que τ et les β_i s'annuleront avec μ.

On aura donc

$$x_i = H_i\left(\frac{t_1 \tau}{T}, \mu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right) = K_i(\mu),$$

K_i étant une fonction développée suivant les puissances de μ.

K_i ne dépend pas seulement de μ, il dépend encore de t_1; nous écrirons donc:

$$x_i = K_i(t_1, \mu)$$

en rappelant toutefois que K_i est développé suivant les puissances de μ, mais non pas suivant celles de t_1.

Cela posé, quand on augmente t_1 de T, on augmente t de $T + \tau$ et comme on s'est arrangé de manière à avoir une solution périodique de période $T + \tau$, x_i ne doit pas changer, on a donc:

$$K_i(t_1 + T, \mu) = K_i(t_1, \mu). \tag{10}$$

K_i étant développable suivant les puissances de μ, on peut écrire

$$K_i(t_1, \mu) = \theta_{i,0} + \theta_{i,1}\mu + \theta_{i,2}\mu^2 + \ldots,$$

$\theta_{i,0}, \theta_{i,1}, \theta_{i,2}$ etc. ne dépendant que de t_1. L'identité (10) montre alors que $\theta_{i,k}$ ne change pas quand on change t_1 en $t_1 + T$. Donc $\theta_{i,k}$ est une fonction périodique et peut se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de

$$\frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi t}{T + \tau} = \lambda t.$$

C. Q. F. D.

Cauchy avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame Kowalevski a considérablement simplifié la démonstration de Cauchy et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame Kowalevski (Journal de Crelle, tome 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en fonctions de p variables indépendantes.

Supposons que ce système s'écrive:

$$(11) \qquad \begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx_1} &= f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),\\
\frac{dz_2}{dx_1} &= f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_n}{dx_1} &= f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_p; \frac{dz_i}{dx_2}, \frac{dz_i}{dx_3}, \ldots, \frac{dz_i}{dx_p}\right),
\end{aligned}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant développés suivant les puissances de

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \quad \text{et des} \quad \frac{dz_i}{dx_k} - a_{ik}$$

(i prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$; k les valeurs $2, 3, \ldots, p$; enfin les a_{ik} sont des constantes quelconques).

Soit maintenant

$$\psi_1(x_2, x_3, \ldots, x_p), \psi_2(x_2, x_3, \ldots, x_p), \ldots, \psi_n(x_2, x_3, \ldots, x_p)$$

n fonctions données *quelconques*, développées suivant les puissances croissantes de $x_2, x_3, \ldots, x_p$ et telles que:

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = a_{ik}$$

pour

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_p = 0.$$

Il existera n fonctions

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ \ldots, \ z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

développables suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, qui satisferont aux équations (11) *et qui se réduiront respectivement à $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ pour $x_1 = 0$.*

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Madame Kowalevski (*Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars 1879) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation:

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z, \tag{12}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; je suppose de plus que dans le développement de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1[er] degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une suite de termes du 2[d] degré au moins par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour que cette intégrale existe, il suffit:

1° que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine,

2° que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.[1]

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (12) envisageons l'équation suivante:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z. \tag{13}$$

Nous avons encore

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ne comprenant que des termes du 2[d] degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i ne dépend pas seulement des x, il dépend aussi de t, de sorte que les coefficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t. Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (13) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de t.

Voyons d'abord quelle va être la forme de Y_i. Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; considérons le terme en

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra

---

[1] Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait

$$m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1 \ (m_2 + m_3 + \ldots + m_n \geq 1)$$

certains coefficients du développement prendraient la forme $\frac{A}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$ certains coefficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t, ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{t\sqrt{-1}}$.

Nous pourrons donc écrire

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Les C sont des coëfficients constants; β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geqq 2.$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices:

$$Y_i = \sum C e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Posons maintenant:

$$Y'_i = \sum |C| e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

et envisageons l'équation suivante:

(14) $$(\lambda'_1 x_1 - Y'_1)\frac{dz}{dx_1} + (\lambda'_2 x_2 - Y'_2)\frac{dz}{dx_2} + \dots + (\lambda'_n x_n - Y'_n)\frac{dz}{dx_n} = \lambda'_1 z.$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (14) (qui est de même forme que l'équation (12)) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposerons

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n.$$

Nous supposerons de plus λ'_1 réel et positif.

Cela posé soit

(15) $$z = \sum A_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (13). Comment pourra-t-on calculer les coëfficients A par récurrence.

En écrivant l'équation (13) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve:

$$A_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}[\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1] = P[C, A],$$

$P[C, A]$ étant un polynôme entier à coëfficients positifs par rapport aux C et aux coëfficients A déjà calculés.

Soit maintenant

(16) $$z = \sum A'_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\sqrt{-1}\beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant à l'équation (14). Pour calculer les coëfficients A' nous écrirons l'équation (14) sous la forme:

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}.$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons:

$$A'_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}[\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \dots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1] = P[|C|, A'].$$

$P[|C|, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A'.

Les λ' étant réels positifs ainsi que les coëfficients du polynôme P, les A' seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite:

$$|A_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}| < A'_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n},$$

il suffit que l'on ait toujours:

$$\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \dots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1 < |\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1|$$

ou

(17) $$\lambda'_1 < \left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right|.$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité (17), on aura donc

$$|A| < A'.$$

Or la série (16) converge, donc il en sera de même de la série (15). Ainsi donc pour que la série (15) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive λ'_1 satisfaisant à l'inégalité (17) pour toutes les valeurs entières et positives des α, et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β.

Commencons par remarquer que le second membre de l'inégalité (17) est toujours plus grand que:

$$\left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right|. \tag{18}$$

Il suffira donc que λ'_1 soit plus petit que l'expression (18). Or cette expression (18) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G. Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre de gravité des $n + 2$ masses suivantes:

1° n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2° une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$;

3° une masse égale à -1 située au point λ_1.

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ'_1.

Composons d'abord les $n + 1$ premières masses; nous obtiendrons une masse:

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point G' et comme ces $n + 1$ premières masses sont positives, le point G' sera située à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les $n + 1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad +\sqrt{-1},$$

et le second les $n + 1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance OG' une limite inférieure μ et écrire:

$$OG' > \mu.$$

Il reste à composer la masse M située en G' et la masse -1 située en λ_1. On obtiendra ainsi une masse $M - 1$ située en G. On aura évidemment:

$$OG > OG' - GG',$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1},$$

d'où

$$OG > OG'\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}.$$

Si donc:

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité

$$OG > \frac{\mu}{2} \tag{19}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (19) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante:

Pour que l'équation (13) admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t, il suffit:

1° qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine,

2° qu'il n'y ait entre les quantités λ aucune relation de la forme

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1,$$

les α étant entiers positifs et β entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation:

$$(20) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0,$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (13).

Considérons en outre l'équation:

$$(13) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation:

$$(21) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z.$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (13) admettra une intégrale

$$z = T_1$$

où T_1 est ordonné suivant les puissances des x et périodique par rapport à t.

De même l'équation (21) admettra une intégrale

$$z = T_2$$

où T_2 est de même forme que T_1.

On en conclut que l'équation (20) admet comme intégrale particulière:

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Comme on peut dans le second membre de (13) remplacer successivement $\lambda_1 z$, par $\lambda_2 z, \lambda_3 z, \dots, \lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n - 1$ équations

analogues à l'équation (21), on peut conclure que l'équation (20) admet $n - 1$ intégrales particulières

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}},\ T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}},\ \dots,\ T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$$

où $T_2, T_3, \dots, T_n$ sont de même forme que T_1.

Pour avoir l'intégrale générale de (20), il faudrait posséder encore une n^e intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation:

$$(22) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z.$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en conclurons que l'équation (20) admet comme intégrales particulières

$$T_1 e^{-\lambda_1 t},\ T_2 e^{-\lambda_2 t},\ \dots,\ T_n e^{-\lambda_n t},$$

de sorte que l'intégrale générale de cette équation (20) sera:

$$z = \text{fonction arbitraire de } (T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t}).$$

En d'autres termes les équations différentielles:

$$(20') \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

admettront comme intégrale générale

$$T_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad T_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad T_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

$K_1, K_2, \dots, K_n$ étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 70 de ma thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

en fonctions des $n - p$ autres à savoir

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$$

et de t, à l'aide des l'équations suivantes:

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_1}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_1}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_1}{dx_n} = X_1,\\
&\frac{dx_2}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_2}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_2}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_2}{dx_n} = X_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_p}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_p}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_p}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_p}{dx_n} = X_p.
\end{aligned}
$$

Il est aisé de voir que l'intégrale générale des équations (23) s'écrira:

$$
(24)\qquad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,
$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ représentant p fonctions arbitraires de

$$
T_1e^{-\lambda_1 t},\ T_2e^{-\lambda_2 t},\ \ldots,\ T_ne^{-\lambda_n t}.
$$

Prenons en particulier:

$$
\varphi_1 = T_1e^{-\lambda_1 t},\qquad \varphi_2 = T_2e^{-\lambda_2 t},\quad \ldots,\quad \varphi_p = T_pe^{-\lambda_p t}.
$$

Les équations (24) s'écriront:

$$
(24')\qquad T_1 = T_2 = \ldots = T_p = 0.
$$

Des équations (24') on pourra tirer $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonctions de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et t et on verra que ce sont des fonctions holomorphes par rapport à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et périodiques par rapport à t.

Donc les équations (23) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ce théorème est démontré quand les λ satisfont aux conditions énoncées plus haut; voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la 4$^{\text{me}}$ partie de mes recherches sur les *courbes définies par les équations différentielles* (Journal de Liouville, 4$^{\text{me}}$ série, T. 2, pages 156—157).

Proposons-nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe

des équations (23) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (23) sous la forme suivante:

$$
(23')\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1}x_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2}x_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda_nx_n\frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_ix_i\\
&\quad = Y_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y_n\frac{dx_i}{dx_n} - Y_i. \qquad (i=1,2,\ldots,p)
\end{aligned}
$$

Soit:

$$
Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}e^{\beta t\sqrt{-1}}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}
$$

une quelconque des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les p fonctions

$$
x_1, x_2, \ldots, x_p
$$

sous la forme

$$
(25)\qquad x_i = \sum A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}e^{\beta t\sqrt{-1}}x_{p+1}^{\alpha_{p+1}}x_{p+2}^{\alpha_{p+2}}\ldots x_n^{\alpha_n}.
$$

Pour calculer les coefficients A par récurrence, substituons les séries (25) dans les équations (23') et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n}$ l'équation suivante:

$$
\begin{aligned}
A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}&(\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i)\\
&= P[C, (-C'), A],
\end{aligned}
$$

$P[C, (-C'), A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients C de

$$
Y_{p+1}, Y_{p+2}, \ldots, Y_n,
$$

aux coefficients C' de Y_i changés de signe et aux coefficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients A ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme:

$$
(26)\qquad \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0
$$

où les α sont entiers positifs et β entier positif ou négatif.

Cela posé soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite:

$$Y'_i = \Sigma \,|\, C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \,|\, e^{i\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour

$$i = p + 1\,,\, p + 2\,,\, \ldots\,,\, n$$

et

$$Y'_i = - \Sigma \,|\, C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \,|\, e^{i\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, p$.

Formons les équations

$$(23'') \qquad \lambda' x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda' x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i$$

$$= Y'_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y'_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,p)}$$

Cherchons à satisfaire aux équations (23″) à l'aide de séries de la forme suivante

$$(25') \qquad x_i = \Sigma B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les coëfficients B nous seront donnés par les équations suivantes:

$$B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}[\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1)] = P[|C|\,,\,|C'|\,,\,B]$$

où $P[|C|\,,\,|C'|\,,\,B]$ diffère de $P[C\,,\,(-C')\,,\,A]$ en ce que les coëfficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coëfficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que:

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1) < |\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i|.$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (25) sera plus petit que le terme correspondant de la série (25′) et comme cette dernière converge, la série (25) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours:

$$\lambda' < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \ldots + \alpha_n - 1} \right|$$

c'est à dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, qu'aucun des deux *polygones convexes* circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}\,,\lambda_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_{p+1}\,,\,\lambda_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,\lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine.

Si donc aucun de ces deux polygones convexes ne contient l'origine, s'il n'y a entre les λ aucune relation de la forme (26), les équations (23) admettront une intégrale particulière de la forme suivante:

$$x_1 = \varphi_1(x_{p+1}\,,\,x_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,x_n\,,\,t),$$

$$x_2 = \varphi_2(x_{p+1}\,,\,x_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,x_n\,,\,t),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_p = \varphi_p(x_{p+1}\,,\,x_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,x_n\,,\,t),$$

les φ étant développables suivant les puissances de $x_{p+1}\,,\,x_{p+2}\,,\,\ldots\,,\,x_n$ et les sinus et cosinus des multiples de t.

Cela posé envisageons les équations:

$$(20'') \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Ces équations sont de même forme que les équations (20′); la seule différence, c'est que les λ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (20″), mais une solution contenant $n - p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (20″), je considère en particulier les suivantes:

$$(27) \qquad \frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \qquad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}\,, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n.$$

J'écris en outre les équations:

$$x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t); \qquad (28) \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,p)}$$

les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (23) definies plus haut.

Il est évident que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (27) et (28), elles satisferont également aux équations (20″).

Dans les équations (27) substituons à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ leurs valeurs (28), ces équations deviendront:

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, \qquad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n, \qquad (29)$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \ldots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$, dont tous les termes sont du 2ᵈ degré au moins et dont les coëfficients sont des fonctions périodiques de t.

Ces équations (29) sont de la même forme que les équations (20′); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante:

$$T'_{p+1} = K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, \qquad T'_{p+2} = K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \quad \ldots, \quad T'_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

où $K_{p+1}, \ldots, K_n$ sont des constantes d'intégration, où $T'_{p+1}, \ldots, T'_n$ sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t.

Les équations

$$(30) \qquad T_i = 0, \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,p)}$$
$$T'_q = K_q e^{\lambda_q t}, \quad {\scriptstyle (q=p+1,p+2,\ldots,n)}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (20″) dépendant des $n-p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \ldots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (30) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on trouve ainsi:

$$x_1 = \psi_1(t, K_{p+1}, \ldots, K_n),$$
$$x_2 = \psi_2(t, K_{p+1}, \ldots, K_n),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = \psi_n(t, K_{p+1}, \ldots, K_n),$$

les ψ étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \ldots, K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (26).

C'est donc là une nouvelle démonstration du théorème fondamental du § 5 (1ère partie, chapitre III).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci:

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots, t^{\lambda_n}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45ᵉ Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique et M. Picard y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes Rendus 1878).

Note F.

Sur les surfaces asymptotiques.

J'ai donné dans les § 2, 3 et 4 (2ᵐᵉ partie, chapitre I) la manière de trouver l'équation des surfaces asymptotiques et de démontrer que ces surfaces sont fermées.

On peut apporter quelques simplifications dans les calculs par lesquels on arrive à l'équation des surfaces asymptotiques. D'autre part, pour démontrer que ces surfaces sont fermées, je me suis appuyé sur les théorèmes du § 4 (1ère partie, chapitre II). Ces théorèmes ont été présentés sous une forme géométrique qui avait à mes yeux l'avantage de mieux faire comprendre la genèse de mes idées et de se prêter plus facilement à une généralisation ultérieure. Il ne sera pas inutile toutefois, au point de vue de certaines applications possibles, de donner ici une démonstration analytique.

J'adopterai les mêmes notations que dans les paragraphes cités; j'écrirai donc les équations différentielles sous la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
(1)
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2},$$

F étant une fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2, périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2.

Ces équations admettent l'intégrale des forces vives

(2)
$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C.$$

Nous regarderons la constante C comme une donnée de la question.

Nous supposerons en outre que F dépend d'un paramètre très petit μ et peut se développer suivant les puissances de ce paramètre de la manière suivante:

$$F = F_0 + F_1\mu + F_2\mu^2 + \dots.$$

Enfin F_0 ne dépendra que de x_1 et x_2 et sera indépendant de y_1 et de y_2.

Ecrivons:

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$
$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de y_1 et de y_2 et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1), c'est à dire que l'on ait:

(3)
$$\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$
$$\frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

C'est là le problème que nous nous sommes proposé dans le § 2 (2me partie, chapitre I).

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des *Vorlesungen über Dynamik*).

Si x_1 et x_2 sont deux fonctions de y_1 et de y_2 satisfaisant aux équations (3), l'expression:

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons:

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$

S sera une fonction de y_1 et de y_2 qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles:

(4)
$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C.$$

S pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura:

(5)
$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \dots.$$

$S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ seront des fonctions de y_1 et de y_2 et on aura:

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \qquad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe cité, aux fonctions x_1^k et x_2^k; nous avons supposé d'abord que x_1^0 et x_2^0 devaient être des constantes. On a alors:

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Si nous appelons ensuite n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ces quantités n_1 et n_2 seront encore des constantes.

L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que x_1^k et x_2^k sont des fonctions périodiques de y_1 qui ne changent pas de valeur quand on change y_1 et y_2 en $y_1 + 2\pi$ et y_2.

Il résulte de là que $\frac{dS_k}{dy_1}$ et $\frac{dS_k}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à y_1 et qu'on peut écrire:

$$S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k, \tag{6}$$

λ_k étant une constante et S'_k une fonction périodique de y_1.

Supposons que dans le premier membre de l'équation (4)

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

on remplace S par son développement (5); on verra que F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe cité:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

les H étant des fonctions de y_1, de y_2, et des dérivées partielles de S_0, S_1, S_2, etc.

On voit d'ailleurs que H_0 dépendra seulement de S_0, H_1 de S_0 et S_1, H_2 de S_0, S_1 et S_2, H_3 de S_0, S_1, S_2, S_3 etc.

On trouve d'ailleurs:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0) = C,$$
$$H_1 = -n_1\frac{dS_1}{dy_1},$$
$$H_2 = -n_1\frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,$$
$$H_3 = -n_1\frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_p = -n_1\frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\Delta S_p = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}x_1^1x_1^p + \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}(x_1^1x_2^p + x_2^1x_1^p) + \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}x_2^1x_2^p\right]$$

et où K_p ne dépend que de $S_0, S_1, \dots,$ jusqu'à S_{p-1}.

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions S_p, nous aurons les équations suivantes:

$$H_0 = C, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \dots, \quad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ fussent entièrement connues, l'équation

$$H_p = 0$$

ou

$$n_1\frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p \tag{7}$$

déterminerait la fonction S_p à une fonction arbitraire près de y_2.

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement

$$S_0, S_1, \dots, S_{p-2}$$

et que l'on connaisse S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2.

Par hypothèse les dérivées de $S_0, S_1, \dots, S_{p-2}, S_{p-1}$ sont des fonctions périodiques de y_1; donc K_p et ΔS_{p-1} seront des fonctions périodiques de y_1.

Désignons par $[U]$ comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité, la valeur moyenne de U, si U est une fonction périodique de y_1.

S_p doit être de la forme (6); nous en concluons que:

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1}\right]$$

doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de y_2, de sorte que l'équation (7) nous donne:

$$2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p \tag{8}$$

et cette équation déterminera complètement S_{p-1} (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante λ_p).

Nous trouvons d'abord l'équation:

$$H_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

qui nous montre que S_1 est une fonction arbitraire de y_2.

Nous en déduirons:

$$2\Delta S_p = -M\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_1} - N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_p}{dy_2}$$

(nous posons pour abréger:

$$-M = \frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_2^0}, \qquad -N = \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité).

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à 0 la valeur moyenne de H_2 est la suivante:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2}\left(\frac{dS_1}{dy_2}\right)^2 = [\Delta S_1].$$

D'autre part:

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

λ_2 est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

S_1 est ainsi entièrement déterminé à une constante près; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle puisque les fonctions S n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (8) devient ensuite:

$$\left[N\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\left[\frac{dS_1}{dy_2}\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{9}$$

Dans le second membre tout est connu; K_p ne dépend que de S_0, $S_1, \ldots, S_{p-2}$; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque S_{p-1} est supposée déterminée à une fonction arbitraire près de y_2.

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de y_1; le premier membre peut donc s'écrire:

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

de sorte que l'équation (9) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ en fonction de y_2. Nous connaîtrons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de y_2; donc S_{p-1} est entièrement déterminée.

La constante C_1 joue un rôle prépondérant. Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\varphi_1$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif parce que je suis libre de prendre le signe $+$ devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes λ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de y_1, mais encore de y_2. (S_p est alors de la forme

$$S_p = \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S_p'',$$

λ_p et μ_p étant des constantes pendant que S_p'' est périodique de période 2π tant par rapport à y_1 que par rapport à y_2.)

En effet, supposons que cela soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \sum A_{m_1 m_2}\cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les A et les α étant des constantes, m_1 et m_2 étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0,m_2}\cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2[\Delta S_{p-2}] + [K_{p-1}] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

λ_{p-1} étant une constante; on en conclut que:

$$A_{0,m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \gtrless 0, \qquad A_{0,0} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \sum A_{m_1 m_2}\frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

m_1 et m_2 prenant toujours sous le signe Σ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \gtrless 0$.

Ainsi, pour que S_{p-1} soit de la forme voulue, il suffit que:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

soit une fonction périodique de y_2. Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ est définie par l'équation:

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p].$$

K_p ne dépendant que de $S_1, S_2, \ldots, S_{p-2}$ sera périodique en y_2.

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une constante $\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}$; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_2 *qui ne s'annule jamais.*

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ peut être développé suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_2.

On a ensuite:

$$n_1\frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p,$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en y_1 et y_2.

Ainsi en choisissant pour C_1 une valeur supérieure à $-\varphi_4$ et en choisissant ensuite les autres constantes $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_1 et de y_2. Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas, ainsi que je l'ai dit au § 4 (2^me partie, chapitre I).

Passons maintenant au cas de

$$C_1 = -\varphi_4.$$

L'expression

$$[F_1] + C_1$$

n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de y_2 que nous avons appelée η_2 dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce qui va suivre que cette valeur est nulle; j'ai le droit de le faire, l'origine des y_2 étant restée jusqu'ici arbitraire.

Ecrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique:

$$[F_1] + C_1 = \sum A_m \sin m y_2 + \sum B_m \cos m y_2.$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante:

$$\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2\frac{y_2}{2}}$$

est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2; c'est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire:

$$\frac{\sin\frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1]+C_1}} = \Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2$$

et par conséquent:

$$\frac{dS_1}{dy_1} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2}.$$

Nous pourrons écrire maintenant l'équation (9) sous la forme suivante:

$$(9') \qquad \frac{\sqrt{2N}\sin\frac{y_2}{2}}{\Sigma A_m \cos m y_2 + \Sigma B_m \sin m y_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p + \phi_p(y_2),$$

ϕ_p étant une fonction connue de y_2.

Cela posé, je me propose de démontrer que:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

sont des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, dont la période est 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

Supposons en effet que cela soit démontré pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de y_2. Nous pourrons donc écrire:

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1}y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2),$$

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et y_2 et ζ_{p-1} une fonction arbitraire de y_2 seulement. Il vient ensuite:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2.

L'équation (9') montre que cela est vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante λ_p) et l'équation (7) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

quel que soit l'indice p.

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$. En effet ces fonctions ne sont pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes λ_p; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (9') d'où l'on doit tirer la valeur de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

a en facteur dans son premier membre $\sin\frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ contiendra $\sin\frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions S_p pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin\frac{y_2}{2}=0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 2k\pi.$$

Si y_2 a une valeur différente de $2k\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de y_1; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1.

Nous pouvons donc écrire par exemple:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes λ_p *d'indice impair* soient toutes nulles; je dis que

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

ne changeront pas quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice p sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice p sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1}\lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2.

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 augmente de 2π, il en sera de même de A_m et B_m et des dérivées de ces fonctions par rapport à y_2. Il en sera donc encore de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2}\frac{\sin my_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2}\frac{\cos my_1}{m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right].$$

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière K_p dépend des fonctions $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de K_p par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair

$$S_1, S_3, S_5, \dots$$

sera de même parité que p.

En effet, en faisant dans

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right),$$

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \dots,$$

nous avons trouvé:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \dots.$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change S_1, S_3, S_5, etc. en $-S_1, -S_3, -S_5$ etc. sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de F ne devra pas changer.

Donc H_p devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de H_p par rapport aux dérivées de S_1, S_3, S_5, etc., devra être de même parité que p. Il devra donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de K_p puisqu'on obtient K_p en supprimant dans H_p les termes qui dépendent de S_{p-1} ou de S_p.

Cela posé, changeons y_2 en $y_2 + 2\pi$; les dérivées de S_q ne changeront pas si q est pair et au plus égal à $p-1$; elles changeront de signe si q est impair et au plus égal à $p-2$. Donc K_p se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (9)

$$N\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] = -\lambda_p - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] + [K_p]. \tag{9}$$

Quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$,

$$[K_p] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p[K_p],$$

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^p\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right],$$

et

$$\frac{dS_1}{dy_2} \quad \text{se change en} \quad -\frac{dS_1}{dy_2}.$$

Nous pouvons même dire que

$$\lambda_p \quad \text{se change en} \quad (-1)^p \lambda_p.$$

En effet cela est vrai pour p pair parce que λ_p est une constante indépendante de y_2; cela est vrai encore pour p impair parce que nous avons supposé que les λ_p d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right] \quad \text{se change en} \quad (-1)^{p-1}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et par conséquent

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{en} \quad (-1)^{p-1}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que $\frac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p\frac{dS_p}{dy_1}$.

Ecrivons en effet l'équation (7)

$$n\frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p; \tag{7}$$

K_p et ΔS_{p-1} et par conséquent le second membre de l'équation (7) seront multipliées par $(-1)^p$ quand y_2 augmentera de 2π. Il devra donc en être de même du premier membre et de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes λ_p de façon que les dérivées des fonctions S_p ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2k\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \ldots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes λ_q d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir λ_p de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que λ_p devra être nulle si p est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ reste finie, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

et de

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M\frac{dS_1}{dy_2}\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right].$$

Reprenons maintenant l'équation (9'). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ s'annule pour $y_2 = 2k\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait:

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

Comme Φ_p ne change pas quand y_2 augmente de 4π, il suffira de prendre $k = 0$ et $k = 1$ et d'écrire

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p. \tag{10}$$

Si p est pair, il n'y a pas de difficulté, on a:

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre:

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Si au contraire p est impair, on a:

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et

$$\Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (10) ne peuvent être satisfaites que si l'on a:

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour p impair, $\Phi_p(0)$ est nul.

Soit en effet:

$$\Phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Je dis que α est nul.

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident.

Voici l'énoncé de ce lemme:

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions périodiques et de période 2π par rapport à y_1 et à y_2. On sait que si φ est une fonction périodique de y_1, par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0$$

ou

$$\iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1}\right) dy_1 dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de y_1 et de y_2 depuis 0 jusqu'à 2π.

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions φ_1 et φ_2 soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Ces dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous achèverons de déterminer la fonction S_{p-1} non plus par l'équation (9'), mais par l'équation suivante:

$$\frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2} = -\alpha \cos \frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2). \tag{11}$$

Elle ne diffère de l'équation (9') que par ce que λ_p à été remplacé par $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une fonction périodique de y_2 et de période 2π, (je rappelle que p est supposé impair). De plus cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2k\pi$, parce que le second membre de l'équation (11) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\zeta_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}} \eta,$$

$$\zeta_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

η sera une fonction de y_1, de y_2 et de μ définie par l'équation:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C. \tag{12}$$

Il est aisé de voir que ζ_2 est entièrement déterminé puisque nous connaissons maintenant complétement $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer η de l'équation (12) sous la forme suivante:

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta_1 + \mu \eta_2 + \ldots$$

les η_i étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2, de période 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2.

De plus on aura:

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^{\frac{p}{2}} \frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de η_0; or on voit tout de suite que η_0 est donnée par l'équation suivante:

$$n_1 \eta_0 = 2 \Delta S_{p-1} + K_p \tag{13}$$

qui ne diffère de l'équation (7) que par ce que l'inconnue y est désignée par η_0.

Cette équation montre que η_0 est une fonction périodique de y_1; il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (11), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (13) est $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$. On a donc:

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

ζ_2 est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai φ_2 la plus grande des deux valeurs de ζ_2 et ψ_2 la plus petite.

De même ζ_1 est susceptible de deux valeurs; j'appellerai φ_1 celle qui correspond à φ_2 et ψ_1 celle qui correspond à ψ_2.

Enfin η est susceptible de deux valeurs; j'appellerai η' celle qui correspond à φ_2 et η'' celle qui correspond à ψ_2; η_i est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même η_i' et η_i''.

La fonction φ_2 est périodique de période 2π par rapport à y_2; en effet, quand on augmente y_2 de 2π, les deux valeurs de ζ_2 se permutent entre elles; donc φ_2 qui est toujours égale à la plus grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, $\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \eta', \eta'', \eta_i', \eta_i''$ seront des fonctions de période 2π par rapport à y_2.

Des définitions précédentes, il résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et ψ_2 sont des

fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que η' et η'' puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrons écrire:

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta''}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\psi_1}{dy_2} - \frac{d\psi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

ou encore

$$\iint \frac{d(\eta' - \eta'')}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0,$$

ou enfin:

$$\iint \frac{d(\eta_0' - \eta_0'')}{dy_2} dy_1 dy_2 + \iint \left[\frac{d(\eta' - \eta_0')}{dy_2} - \frac{d(\eta'' - \eta_0'')}{dy_2} \right] dy_1 dy_2 = 0.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit μ.

Mais quand μ tend vers 0, $\eta' - \eta_0'$ et $\eta'' - \eta_0''$ tendent vers 0.

Donc on aura:

$$\lim \iint \frac{d(\eta_0' - \eta_0'')}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0). \tag{14}$$

Transformons le premier membre de l'égalité (14). Je remarque d'abord que p étant impair, η_0 est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à l'équation (13). Nous avons donc:

$$\eta_0' = -\eta_0'' = \pm \eta_0$$

d'où

$$\iint \frac{d(\eta_0' - \eta_0'')}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d(\pm \eta_0)}{dy_2} dy_1 dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta_0' = +\eta_0$ et pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta_0' = -\eta_0$.

Si nous avons:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \mu^2\frac{dS_5}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-2}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2} > 0, \tag{15}$$

nous devrons prendre d'après notre convention:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} + \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_2}{dy_2} - \mu\sqrt{\mu}\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (15) est négatif, nous devrons prendre:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu}\frac{dS_1}{dy_2} + \ldots + \mu^{\frac{p-1}{2}}\frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'inégalité (15). Egalons ce premier membre à 0, nous obtiendrons une équation:

$$\frac{dS_1}{dy_2} + \mu\frac{dS_3}{dy_2} + \ldots = 0. \tag{16}$$

Cette équation peut être regardée comme définissant y_2 en fonction de y_1 et de μ.

On pourra résoudre cette équation et écrire:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que θ est une fonction périodique de période 2π par rapport à y_1 et que cette fonction θ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand y_2 variera de θ à $\theta + 2\pi$, on aura:

$$\eta_0' = +\eta_0$$

et quand y_2 variera de $\theta + 2\pi$ à $\theta + 4\pi$, on aura

$$\eta_0' = -\eta_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de y_2 comprises entre 0 et 2π. Mais comme η_0' est une fonction de période 2π, on aura:

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0'}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2}.$$

Quand μ tendra vers 0, le premier membre devra tendre vers 0 et d'ailleurs θ tendra vers 0, on aura donc:

$$\lim \iint \frac{d\eta_0'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2} = 0$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\eta_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\eta_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi\frac{\alpha}{n_1}\int_0^{2\pi} \sin\frac{y_2}{2}\, dy_2 = -\frac{4\pi\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\alpha = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que si l'on annule les constantes λ_p d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes λ_p d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples pairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls dans le développement si p est pair; si au contraire p est impair, les multiples impairs de $\frac{y_2}{2}$ entreront seuls.

Nous aurons alors pour les équations de la surface asymptotique

$$(17) \qquad x_1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \qquad x_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS}{dy_2}.$$

Je n'ai pas à revenir sur la convergence de ces séries; en effet au § 5 (1[ère] partie, chapitre III) on a démontré l'existence de ces surfaces asymptotiques et on a montré que leur équation peut se mettre sous la forme suivante:

$$(18) \qquad x_1 = f_1(y_1, y_2, \mu), \qquad x_2 = f_2(y_1, y_2, \mu),$$

f_1 et f_2 étant des séries développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. On a vu que ces séries convergent pour des valeurs quelconques de y_1 et de y_2 pourvu que μ soit assez petit.

De plus ces séries f_1 et f_2 doivent satisfaire aux conditions suivantes:

I. Les divers termes de ces séries sont finis.

II. Ces divers termes sont des fonctions périodiques de y_1.

III. Si l'on pose:

$$f_1 = f_1' + \sqrt{\mu} f_1'', \qquad f_2 = f_2' + \sqrt{\mu} f_2''$$

(f_1', f_1'', f_2', f_2'' ne contenant plus que des puissances paires de $\sqrt{\mu}$) les deux équations:

$$f_1'' = 0, \qquad f_2'' = 0$$

seront équivalentes et les trois équations:

$$x_1 = f_1', \qquad x_2 = f_2', \qquad f_2'' = 0$$

définiront une solution périodique du 1[er] genre, qui pour $\mu = 0$ devra se réduire à

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \qquad y_2 = 0.$$

Or l'analyse qui précède démontre que les séries (17) sont les seules qui satisfassent aux équations différentielles et aux conditions I, II et III.

Les séries (17) doivent donc être identiques aux séries (18) et par conséquent convergent.

D'autre part la forme des équations (17) montre immédiatement que les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées puisque les seconds membres sont des fonctions périodiques.

Nous avons vu que la quantité appelée plus haut α est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Posons:

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \ldots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$

$$\xi = \eta_0 + \mu \eta_2 + \mu^2 \eta_4 + \ldots.$$

Je dis d'abord que T est une fonction périodique de y_1 et de y_2.

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques; on a donc:

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

β et γ étant des constantes et T' étant une fonction périodique de y_1 et y_2.

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \qquad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

$\frac{dT'}{dy_1}$ et $\frac{dT'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_3, \ldots, S_{p-2}$ étant d'indice impair, leurs dérivées changent de signe quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand y_2 augmente de 2π. Donc les termes tout connus β et γ sont nuls. Donc $T = T'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand y_1 augmente de 2π et qui change de signe quand y_2 augmente de 2π.

Cela posé, nous savons que ζ_1 et ζ_2 sont liés par l'équation:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de ζ_2 se confondent, les deux valeurs de ζ_1 se confondent également.

Ecrivons que les deux valeurs de ζ_2 se confondent, il vient:

$$(19) \qquad \frac{dT}{dy_2} = 0.$$

Cette équation (19) est d'ailleurs identique à l'équation (16). Ecrivons maintenant que les deux valeurs de ζ_1 se confondent, il viendra:

$$\frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}}\xi = 0. \tag{20}$$

Les équations (19) et (20) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

θ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe θ suivant les puissances croissantes de μ, il viendra:

$$y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \dots, \tag{21}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ étant des fonctions périodiques de y_1.

Supposons y_2 lié à y_1 par l'équation (21); quand y_1 augmentera de 2π, y_2 ne changera pas et T qui est périodique ne changera pas non plus; on aura donc:

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi}\left(\frac{dT}{dy_1}dy_1 + \frac{dT}{dy_2}dy_2\right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (19) et (20)

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}}\int_0^{2\pi}\xi dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_2 + \mu^2\eta_4 + \dots$$

on remplace y_2 par sa valeur (21) il viendra:

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots,$$

ξ_0, ξ_1, ξ_2, etc. étant des fonctions périodiques de y_1.

On devra avoir quel que soit μ:

$$\int_0^{2\pi} dy_1(\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots) = 0$$

et par conséquent:

$$\int_0^{2\pi}\xi_0 dy_1 = 2\pi[\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir ξ_0, il suffit de faire $y_2 = 0$ dans η_0, or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1}\cos\frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0$$

ou

$$\alpha = 0.$$

C. Q. F. D.

Note G.

Sur la non-existence des intégrales uniformes.

Je crois devoir revenir avec plus de détails sur la démonstration par laquelle j'établis que les équations que je traite n'admettent aucune intégrale analytique et uniforme, en dehors de l'intégrale des forces vives.

Ces équations sont:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2} \tag{1}$$

avec l'intégrale

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

F étant une fonction uniforme et analytique de x_1, x_2, y_1 et y_2, périodique de période 2π en y_1 et y_2.

Je dis qu'il ne peut pas exister une seconde intégrale

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1,$$

φ étant une fonction analytique et uniforme et de plus périodique de période 2π en y_1 et y_2.

Je ne veux pas me contenter de démontrer que cette fonction φ ne peut pas être uniforme pour toutes les valeurs réelles des x et des y.

D'un autre côté, il est clair que l'on peut toujours trouver un domaine assez petit pour qu'une intégrale φ du système (1) reste uniforme à l'intérieur de ce domaine.

Voici donc d'une façon plus précise ce que je me propose d'établir.

Je dis qu'une intégrale φ ne peut pas rester analytique, uniforme et périodique dans l'intérieur d'un domaine, si ce domaine est assez grand pour que le point mobile dont les coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2 varient conformément aux équations (1) ne puisse jamais en sortir.

Cela posé, soit

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \theta_2(y_1, y_2)$$

l'équation d'une surface asymptotique quelconque. Nous savons que θ_1 et θ_2 sont des fonctions périodiques de période 2π en ce qui concerne y_1 et 4π en ce qui concerne y_2.

Considérons maintenant les trois équations:

$$(2) \qquad \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1, \qquad x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \theta_2(y_1, y_2).$$

Si ces trois équations sont distinctes et compatibles, elles définissent une trajectoire, et cette trajectoire est une courbe fermée. En effet nous pouvons partager la surface asymptotique en deux régions, celle où la fonction uniforme φ est plus grande que C_1, et celle où elle est plus petite que C_1. Ces deux régions seront séparées par la courbe définie par les équations (2) et cette courbe partageant la surface en deux régions sera une courbe fermée.

Comme la constante C_1 est arbitraire, il résulterait de là qu'on pourrait tracer sur la surface asymptotique une infinité de trajectoires fermées et nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Nous devons donc conclure que les équations (2) ne peuvent être distinctes et compatibles, ou en d'autres termes que la fonction φ doit avoir même valeur en tous les points de la surface asymptotique.

En d'autres termes, si les équations

$$F = C, \qquad \varphi = C_1$$

sont considérées comme représentant une famille de surfaces, les surfaces asymptotiques devront faire partie de cette famille.

On a vu de plus que les équations:

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \theta_2(y_1, y_2), \qquad \theta_1(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_1(y_1, y_2)$$

(dont la dernière est équivalente à

$$\theta_2(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_2(y_1, y_2))$$

représentent la courbe double de la surface asymptotique.

D'après ce que nous venons de voir, on doit avoir identiquement:

$$F[\theta_1(y_1, y_2), \theta_2(y_1, y_2), y_1, y_2] = C,$$
$$\varphi[\theta_1(y_1, y_2), \theta_2(y_1, y_2), y_1, y_2] = C_1,$$

d'où en différentiant par rapport à y_1 et y_2

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{dF}{dx_1}\frac{d\theta_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\theta_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \qquad &&\frac{dF}{dx_1}\frac{d\theta_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2}\frac{d\theta_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0, \\ &\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\theta_1}{dy_1} + \frac{d\varphi}{dx_2}\frac{d\theta_2}{dy_1} + \frac{d\varphi}{dy_1} = 0, \qquad &&\frac{d\varphi}{dx_1}\frac{d\theta_1}{dy_2} + \frac{d\varphi}{dx_2}\frac{d\theta_2}{dy_2} + \frac{d\varphi}{dy_2} = 0. \end{aligned}$$

De ces équations on peut tirer en fonctions de x_1, x_2, y_1 et y_2 les quatre dérivées partielles

$$\frac{d\theta_1}{dy_1}, \frac{d\theta_1}{dy_2}, \frac{d\theta_2}{dy_1}, \frac{d\theta_2}{dy_2}.$$

Or si l'on a affaire à un point appartenant à la courbe double d'une surface asymptotique, on a

$$\theta_1(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_1(y_1, y_2),$$
$$\frac{d}{dy_1}\theta_1(y_1, y_2 + 2\pi) \neq \frac{d}{dy_1}\theta_1(y_1, y_2).$$

Par conséquent en ce point $\frac{d\theta_1}{dy_1}$ doit pouvoir prendre deux valeurs distinctes ce qui exige que

$$(4) \qquad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\varphi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\varphi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\varphi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\varphi}{dy_2}}.$$

Il existe dans un domaine quelconque une infinité de surfaces asymptotiques et de courbes doubles de ces surfaces. Dans un domaine quelconque il existera donc une infinité de points où les relations (4) sont remplies; si la fonction φ est analytique, ces relations (4) devront donc être satisfaites identiquement.

Si les équations (4) sont identiques, on en déduit:

$$\varphi = \text{fonction de } F$$

c'est à dire que les deux intégrales $F = C$, $\varphi = C_1$ ne sont pas distinctes.

C. Q. F. D.

On peut démontrer ce résultat d'une autre manière, en s'appuyant sur les principes des *Vorlesungen* de Jacobi.

Résolvons les deux équations:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$
$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1$$

par rapport à x_1 et à x_2. Je suppose que F et φ sont développés suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots.$$

Nous savons que F_0 ne dépend que de x_1 et de x_2; je dis que φ_0 ne dépendra non plus que de x_1 et de x_2. En effet dans le cas de $\mu = 0$, c'est à dire quand F se réduit à F_0, l'intégrale générale des équations (1) s'écrit:

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \quad y_1 = -t\frac{dF_0}{dx_1} + \text{const.}, \quad y_2 = -t\frac{dF_0}{dx_2} + \text{const.}$$

et il n'y a d'autre intégrale analytique et uniforme que celles qui sont de la forme suivante:

$$\text{fonction arbitraire de } x_1 \text{ et de } x_2 = \text{const.}$$

Cela posé, ne supposons plus que μ soit nul et cherchons à résoudre les équations

$$F = C, \qquad \varphi = C_1$$

par rapport à x_1 et à x_2 en développant x_1 et x_2 suivant les puissances croissantes de μ.

Cela sera toujours possible, par la formule de Lagrange, sauf pour les valeurs de x_1 et de x_2 pour lesquelles on aurait:

$$(5) \qquad \frac{dF_0}{dx_1}\frac{d\varphi_0}{dx_2} - \frac{dF_0}{dx_2}\frac{d\varphi_0}{dx_1} = 0.$$

Si cette relation (5) n'est pas satisfaite identiquement, nous pourrons supposer que nous avons choisi les valeurs de C et de C_1 et par conséquent celles de x_1 et de x_2 de façon que cette relation n'ait pas lieu.

Nous ne serions donc embarrassés que si la relation (5) était une identité, mais alors on aurait

$$\varphi_0 = \phi(F_0),$$

ϕ désignant une fonction quelconque de F_0. On pourrait alors considérer l'intégrale suivante:

$$\phi(F) - \varphi = C_2;$$

pour $\mu = 0$ le premier membre se réduit à

$$\phi(F_0) - \varphi_0$$

ou à zéro. Donc

$$\phi(F) - \varphi$$

est divisible par μ et l'on peut écrire:

$$\phi(F) - \varphi = \mu\varphi'_0 + \mu^2\varphi'_1 + \mu^3\varphi'_2 + \ldots.$$

On aura alors une autre intégrale de la forme suivante:

$$\varphi' = \varphi'_0 + \mu\varphi'_1 + \ldots = \text{const.}$$

qui pourra remplacer l'intégrale

$$\varphi = \text{const.}$$

En général φ'_0 ne sera pas une fonction de F_0; s'il en était ainsi on opérerait sur φ' comme on a opéré sur φ et on finirait par arriver à une intégrale pour laquelle la relation (5) ne serait pas satisfaite identiquement.

Supposons donc que cette relation (5) ne soit pas identique et qu'on ait choisi des valeurs de x_1 et de x_2 pour lesquelles cette relation n'ait pas lieu.

Nous pourrons alors appliquer la formule de LAGRANGE et écrire:

$$x_1 = x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \ldots,$$
$$x_2 = x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \ldots,$$

les x_i^k étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 dépendant en outre de C et de C_1.

Alors

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

sera une différentielle exacte, et nous pourrons poser:

$$S = \int (x_1 dy_1 + x_2 dy_2)$$

d'où

$$S = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \theta(y_1, y_2),$$

$\theta(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et de y_2 dépendant en outre de C et de C_1 pendant que α_1 et α_2 sont des fonctions dépendant seulement de C et de C_1.

Cela posé, la solution la plus générale de nos équations différentielles s'écrira:

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{d\theta}{dy_1}, \qquad x_2 = \alpha_2 + \frac{d\theta}{dy_2},$$

$$C_1' = y_1 \frac{d\alpha_1}{dC_1} + y_2 \frac{d\alpha_2}{dC_1} + \frac{d\theta}{dC_1}, \qquad C' + t = y_1 \frac{d\alpha_1}{dC} + y_2 \frac{d\alpha_2}{dC} + \frac{d\theta}{dC}$$

et contiendra quatre constantes arbitraires C, C_1, C' et C_1'.

Comment devra-t-on choisir ces constantes pour que cette solution soit périodique?

Pour que la solution soit périodique, il faut et il suffit que le rapport de $\frac{d\alpha_1}{dC_1}$ à $\frac{d\alpha_2}{dC_1}$ soit commensurable et que l'on ait:

$$n_1 \frac{d\alpha_1}{dC_1} + n_2 \frac{d\alpha_2}{dC_1} = 0, \tag{6}$$

n_1 et n_2 étant deux entiers premiers entre eux. Alors quand y_1 augmentera de $2n_1\pi$ et y_2 de $2n_2\pi$, le terme non périodique

$$y_1 \frac{d\alpha_1}{dC_1} + y_2 \frac{d\alpha_2}{dC_1}$$

ne changera pas. La durée de la période sera d'ailleurs

$$2\pi\left(n_1 \frac{d\alpha_1}{dC} + n_2 \frac{d\alpha_2}{dC}\right).$$

Comme la condition de périodicité est exprimée par l'unique équation (6), on voit qu'on peut, sans que la solution cesse d'être périodique, faire varier arbitrairement trois des quatre constantes C, C_1, C' et C_1'.

Cela montre que trois des exposants caractéristiques doivent être nuls, et comme ces exposants sont toujours égaux deux à deux et de signe contraire, il devra en être de même du quatrième.

Ainsi, s'il existait une intégrale analytique et uniforme, tous les exposants caractéristiques devraient être nuls. Or nous avons vu dans la note A qu'il n'en est pas ainsi dans le cas du problème des trois corps que nous avons traité.

Donc, *il n'y aura pas d'intégrale uniforme.*

C. Q. F. D.

Note H.

Sur les exposants caractéristiques.

Dans le § 4 (1ère partie, chapitre III) j'ai donné la manière de développer les exposants caractéristiques suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et de calculer les coëfficients du développement. On pourrait se demander si le développement ainsi obtenu est convergent; et bien que cette convergence soit une conséquence immédiate des principes les plus connus du »calcul des limites», il ne sera peut-être pas inutile d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

Je donne page 65, ligne 2, l'équation qui donne les exposants caractéristiques. Le déterminant qui sert de premier membre à cette équation est manifestement une fonction holomorphe en α; ce sera aussi une fonction holomorphe en μ. En effet les divers éléments de ce déterminant

$$\frac{d\gamma_i}{d\beta_k}$$

sont des fonctions holomorphes en μ. Il résulte de là que les exposants α nous sont donnés en fonctions de μ par une équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0 \tag{1}$$

dont le premier membre est développé suivant les puissances de α et de μ.

Si pour $\alpha = \mu = 0$, on avait

$$\frac{dG}{d\alpha} \neq 0$$

on en conclurait que α est développable selon les puissances de μ.

Mais il n'en est pas ainsi dans le cas traité au § 4. Dans ce cas en effet tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$ et par conséquent l'équation

$$G(\alpha, 0) = 0$$

ayant une racine multiple égale à 0, entraîne

$$\frac{dG}{d\alpha} = 0.$$

Nous aurions toutefois le droit de conclure, (en appliquant le raisonnement qui permet de développer y suivant les puissances fractionnaires de x dans le voisinage d'un point singulier d'une courbe algébrique) que α est développable suivant les puissances *fractionnaires* de μ et que tout développement de cette forme qui satisfait formellement à l'équation $G = 0$ est par cela même convergent.

Cela nous suffirait pour notre objet.

Mais voyons la chose d'un peu plus près.

Posons:

$$\alpha = \varepsilon\sqrt{\mu},$$

$G(\varepsilon\sqrt{\mu}, \mu)$ devient divisible par une certaine puissance de μ. Divisons par cette puissance, nous obtiendrons une certaine fonction

$$G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu})$$

développée suivant les puissances de ε et de $\sqrt{\mu}$. L'équation (1) peut être remplacée par

$$G_1(\varepsilon, \sqrt{\mu}) = 0.$$

Si dans cette équation, on fait $\mu = 0$, on obtient une équation

$$G_1(\varepsilon, 0) = 0$$

qui n'est autre que l'équation (11) de la page 84 (l'inconnue α_1 étant remplacée par ε). Or cette équation admet deux racines nulles; mais en dehors de ces racines nulles, elle n'a pas en général de racines multiples.

Si donc on fait $\mu = 0$, $\varepsilon = \alpha_1$ on aura:

$$G_1 = 0, \qquad \frac{dG_1}{d\varepsilon} \neq 0.$$

Le théorème fondamental du »calcul des limites» nous permet donc de conclure que ε et par conséquent α est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Note I.

Sur les solutions asymptotiques.

Dans le § 5 (1[ère] partie, chapitre III) nous avons étudié les équations des solutions asymptotiques et à la page 93 nous avons été conduits à examiner ce qui arrive quand les coefficients de ces équations dépendent d'un paramètre arbitraire μ.

Nous avons vu que deux cas peuvent se présenter:

1° ou bien les exposants caractéristiques α_i ne s'annulent pas avec μ; il arrive alors en général qu'ils sont développables suivant les puissances positives de μ et qu'il en est de même des séries (4') qui donnent les solutions asymptotiques.

2° ou bien les α_i s'annulent avec μ et d'après le § 3 (1ère partie, chapitre III) ils sont développables suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$. On doit en conclure que les séries (4') sont développables également suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, mais que le développement peut contenir non seulement les puissances positives, mais encore les puissances négatives de $\sqrt{\mu}$.

Nous avons trouvé en effet (page 91) la formule suivante:

$$\eta_i^q = \sum \frac{C A^q e^{t(\gamma\sqrt{-1}+\Sigma\alpha\beta)}}{\gamma\sqrt{-1}+\Sigma\alpha\beta-\alpha_i}.$$

Dans la fraction qui entre dans le second membre le numérateur, de même que le dénominateur sont développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. Mais le développement du dénominateur peut commencer par un terme en $\sqrt{\mu}$ (si γ est nul) de sorte qu'on ne peut pas être assuré que le développement du quotient ne contiendra pas de puissances négatives de $\sqrt{\mu}$.

Deux cas sont donc encore à distinguer.

1°. Ou bien les puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ ne se détruisent pas et subsistent dans les séries (4').

Dans ce cas il est clair que ces séries (4') et les solutions asymptotiques elles-mêmes *cessent d'exister* pour $\mu = 0$.

2°. Ou bien les puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ se détruisent et les séries (4') ne contiennent que des puissances positives de $\sqrt{\mu}$.

Il arrive alors que les solutions asymptotiques ne cessent pas d'exister pour $\mu = 0$.

C'est le second cas qui se présente dans la plupart des applications et en particulier dans l'étude des équations de la dynamique. Ecrivons en effet ces équations sous leur forme canonique:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad F = F_0 + \mu F_1,$$

où F_0 est une fonction dépendant des x seulement, pendant que F_1 dépend à la fois des x et des y et est une fonction périodique de période 2π par rapport aux y.

Une solution asymptotique est par définition de la forme suivante:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_i &= \varphi_i(t, A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}), \\ y_i &= n_i t + \psi_i(t, A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}), \end{aligned}$$

où les φ_i et les ψ_i doivent être des séries développées suivant les puis-

sances croissantes de $A_1 e^{\alpha_1 t}, A_2 e^{\alpha_2 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Quant aux n_i, c'est un nombre tel que $n_i T$ soit un multiple de 2π. Nous désignons d'ailleurs par T la période de la solution périodique à laquelle se rapportent les solutions asymptotiques considérées.

Telle est la définition des solutions asymptotiques. Voyons si pour $\mu = 0$, il existe encore des solutions des équations (1) satisfaisant à cette définition.

On trouve pour la solution générale de ces équations quand $\mu = 0$:

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = n_i t + A_i,$$

les x_i^0 et les A_i étant des constantes d'intégration et n_i étant la valeur de $-\frac{dF_0}{dx_i}$ pour $x_i = x_i^0$. Nous pouvons choisir les constantes x_i^0 de façon que les n_i aient de valeurs données et par conséquent de façon que les $n_i T$ soient des multiples de 2π. Les A_i restent encore arbitraires. Nous pourrons écrire ces solutions sous la forme:

$$x_i = x_i^0, \qquad y_i = n_i t + A_i e^{\alpha_i t}$$

en convenant de faire

$$\alpha_i = 0.$$

On voit ainsi que ces solutions sont encore de la forme (2) et rentrent par conséquent dans la définition qui précède.

Ainsi dans le cas des équations de la dynamique, les séries (4') et les solutions asymptotiques qu'elles représentent ne disparaissent pas pour $\mu = 0$, ce qui prouve qu'elles ne contiennent pas de puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Voyons par quel mécanisme ces puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ disparaissent. Posons:

$$A_i e^{\alpha_i t} = w_i$$

et considérons les x et les y comme des fonctions des variables t et w.

Il importe avant d'aller plus loin de faire la remarque suivante: parmi les $2n$ exposants caractéristiques α, deux sont nuls et les autres sont deux à deux égaux et de signe contraire. Nous ne conserverons que $n - 1$ de ces exposants en convenant de regarder comme nuls les coefficients A_i et les variables w_i qui correspondent aux $n + 1$ exposants rejetés. Nous rejetterons d'abord les deux exposants nuls et dans chaque couple d'exposants égaux et de signe contraire qui resteront, nous conviendrons encore de n'en conserver qu'un.

Cela posé, les équations (1) deviennent:

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i}, \tag{3}$$

$$\frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{4}$$

Cherchons, en partant de ces équations à développer les x_i et les $y_i - n_i t$ suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et des w de telle façon que les coëfficients soient des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire:

$$\alpha_k = \alpha_k^1 \sqrt{\mu} + \alpha_k^2 \mu + \ldots = \sum \alpha_k^p \mu^{\frac{p}{2}}$$

car nous avons vu au § 4 (1ère partie, chapitre III) comment on peut développer les exposants caractéristiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Ecrivons d'autre part:

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \sum x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1 \sqrt{\mu} + \ldots = \sum y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p et les y_i^p étant des fonctions de t et des w, périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances des w.

Si dans les équations (3) et (4) nous substituons ces valeurs à la place des α_k, des x_i et des y_i; les deux membres de ces équations seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Egalons dans les deux membres des équations (3) les coëfficients de $\mu^{\frac{p+1}{2}}$, et dans les deux membres des équations (4) les coëfficients de $\mu^{\frac{p}{2}}$, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i^{p+1}}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} &= Z_i^p + \sum_k \frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}, \\ \frac{dy_i^p}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} &= T_i^p - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} x_k^p \end{aligned} \tag{5}$$

où Z_i^p et T_i^p ne dépendent que de

$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{p-1},$$
$$y_i^0, y_i^1, \ldots, y_i^{p-2}.$$

Convenons, comme nous l'avons fait plus haut, de représenter par $[U]$ la valeur moyenne de U, si U est une fonction périodique de t.

Des équations (5) nous pourrons alors déduire les suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[x_i^p]}{dw_k} &= [Z_i^p] + \sum_k \left[\frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0} y_k^{p-1}\right], \\ \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} &= [T_i^p] - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} [x_i^p]. \end{aligned} \tag{6}$$

Supposons maintenant qu'un calcul préalable nous ait fait connaître:

$$x_i^0, x_i^1, \ldots, x_i^{p-1}, x_i^p - [x_i^p],$$
$$y_i^0, y_i^1, \ldots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}].$$

Les équations (6) vont nous permettre de calculer $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ et par conséquent x_i^p et y_i^{p-1}. Les équations (5) nous permettront ensuite de déterminer

$$x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}] \quad \text{et} \quad y_i^p - [y_i^p],$$

de sorte que ce procédé nous fournira par récurrence tous les coëfficients des développements de x_i et de y_i.

La seule difficulté est la détermination de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ par les équations (6).

Les fonctions $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ sont développées suivant les puissances croissantes des w et nous allons calculer les diverses termes de ces développements en commençant par les termes du degré le moins élevé.

Pour cela nous allons reprendre les notations du § 4 (1ère partie, chapitre III), c'est à dire que nous allons poser:

$$-\frac{d^2 F_0}{dx_i^0\, dx_k^0} = C_{ik}^0, \quad \text{et} \quad \left[\frac{d^2 F_1}{dy_i^0\, dy_k^0}\right] = b_{ik}$$

(pour les valeurs nulles de w).

Si alors nous appelons ξ_i et η_i les coëfficients de

$$w_1^{m_1} w_2^{m_2} \ldots w_{n-1}^{m_{n-1}}$$

dans $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$, nous aurons pour déterminer ces coefficients les équations suivantes:

$$(7) \qquad \Sigma_k b_{ik}\eta_k - S\xi_i = \lambda_i, \qquad \Sigma_k C^0_{ik}\xi_k - S\eta_i = \mu_i.$$

Dans ces équations (7) λ_i et μ_i sont des quantités connues, parce qu'elles ne dépendent que de

$$x_i^0,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{p-1},\ x_i^p - [x_i^p],$$
$$y_i^0,\ y_i^1,\ \ldots,\ y_i^{p-2},\ y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}]$$

ou des termes de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ dont le degré par rapport aux w est plus petit que:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}.$$

De plus nous avons posé pour abréger

$$S = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Nous avons donc pour le calcul des coëfficients ξ_i et η_i un système d'équations linéaires. Il ne pourrait y avoir de difficulté que si le déterminant de ces équations était nul; or ce déterminant est égal à:

$$S^2[S^2 - (\alpha_1^1)^2][S^2 - (\alpha_2^1)^2]\ldots[S^2 - (\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Il ne pourrait s'annuler que pour:

$$S = 0, \qquad S = \pm\,\alpha_i^1,$$

c'est à dire pour

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} = 0 \text{ ou } 1.$$

On ne pourrait donc rencontrer de difficulté que dans le calcul des termes du degré 0 ou 1 par rapport aux w.

Mais nous n'avons pas à revenir sur le calcul de ces termes; en effet nous avons appris à calculer les termes indépendants des w dans le § 3 (1[ère] partie, chapitre III) et les coëfficients de

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1}$$

dans le § 4 (1[ère] partie, chapitre III).

On ne sera donc jamais arrêté en cherchant à développer les x_i et les y_i suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des w.