La gran influència de la memòria de Poincaré sobre els problema dels tres cossos

Amadeu Delshams

29 de gener del 2 004

Resum

La famosa memòria sobre el problema de tres cossos que Poincaré presentà en juny del 1 888 al concurs commemoratiu dels 60 anys del Rei Òscar de Suècia va rebre el premi el 20 de gener del 1 889. Ara bé, la primera versió presentada a l'Acta Mathematica contenia un error essencial ja que, expressant'ho en el llenguatge actual dels sistemes dinàmics, suposava la conservació d'un tipus de trajectòries especials anomenades *separatrius*.

En la versió posterior, que fou l'única publicada, Poincaré introduí el concepte d'òrbites homoclíniques (les quals porten associades l'existència de caos) i va haver de enfrontar-se al problema d'estimació de fenòmens exponencialment petits respecte a un paràmetre de pertorbació.

En aquesta exposició comentarem la posterior influència que ha tingut aquesta memòria sobre el camp dels sistemes dinàmics i, per extensió, sobre la ciència no lineal. Així, és impressionant comprovar que els sistemes caòtics no van ser descoberts fins a mitjans dels 60 (Lorenz, Hénon, Smale, etc.), un cop es van portar a terme els primers experiments numèrics, i que llur explicació passa inevitablement per la cerca d'òrbites homoclíniques. Per altra banda, l'estimació de l'escissió exponencialment petita de les separatrius no va poder ésser atacada per primera vegada fins a mitjans dels 80, i, encara que s'ha progressat últimament molt en aquest camp dels sistemes dinàmics, avui en dia els resultats sobre aquest tipus de fenòmens són encara parcials.

1 El premi del rei Òscar

Som a principis de l'any 1 884 (aleshores Henri Poincaré tenia 30 anys). A Estocolm, Gösta Mittag Leffler, professor de matemàtiques pures en la recentment establerta "Stockholm Högskola" (més tard la Universitat d'Estocolm) pensa en proposar-li al rei Òscar II de Suècia i Noruega la realització d'un concurs matemàtic per celebrar el 60è aniversari del rei, a celebrar-se en 5 anys, concretament el 21 de gener del 1 889.

A finals del segle XIX no eren estranys els premis basats en competicions matemàtiques, típicament organitzats per les acadèmies nacionals de matemàtiques, on els premis no eren molt alts, però, en canvi, donaven molt prestigi al guanyador entre el món matemàtic. (Aquesta sembla ser una de les constants dels matemàtics: l'assoliment de la glòria pràcticament mai va acompanyada d'una recompensa econòmica. Hi ha, però, dues excepcions recentment instaurades: els *Premis del Mil·lenni* del *Clay Mathematics Institute* i el Premi Abel.)

Usualment, aquests tipus de concursos eren organitzats per les acadèmies nacionals. Mittag-Leffler, però, no pensava en que l'acadèmia sueca se'n fes càrrec de l'organització del concurs, sinó que volia associar-la a *Acta Mathematica*, una revista matemàtica sueca fundada dos anys abans per ell mateix, i de la qual n'era l'editor en cap, per donar així més prestigi a la revista.

Això també era volgut pel rei Òscar, qui era una persona cultivada, que de jove havia estudiat a la Universitat d'Uppsala, on s'havia distingit en els seus cursos de matemàtiques. Aquesta afició del Rei per a les matemàtiques ja s'havia posat de manifest en el seu suport fonamental a Mittag-Leffler per posar en marxa *Acta* en 1 882.

Mittag-Leffler, després d'assolir el seu doctorat a la Universitat d'Uppsala el 1 872, havia marxat a estudiar a París, sota la direcció de Charles Hermite, i també a Berlín, sota la direcció de Karl Weierstrass. Coneixia per tant a molts dels matemàtics més rellevants del moment i, juntament amb el seu càrrec d'editor en cap d'*Acta* i les seves relacions amb el Rei Òscar, estava especialment ben col·locat per promoure la idea d'un concurs internacional de matemàtiques, patrocinat a més por tot un Rei de Suècia.

Dissenyar el jurat per al premi no fou pas una tasca fàcil, sobre tot perquè molt sovint hi ha unes rivalitats molt profundes entre els matemàtics més rellevants que fa impossible que col·laborin de manera constructiva. Finalment, Mittag-Leffler va pensar que era millor tenir un jurat pròxim a ell, on les relacions fossin prou bones. Així, tot i que el Rei Òscar preferia un format més ampli i amb representació de més països, finalment Mittag-Leffler va optar per un jurat format per tres persones: Hermite i Weierstrass, com a representants il·lustres dels matemàtics francesos i alemanys, i ell mateix, com a editor en cap d'*Acta*.

Un cop establerta la comissió, el problema delicat de decidir el tema o els problemes del concurs també va portar el seu temps. D'entrada, van considerar que restringir el premi a resoldre un únic problema era contraproduent, ja que la comunitat matemàtica estava ja dispersa en molts camps, i això implicava atreure menys matemàtics rellevants a prendre-hi part. Per altra banda, deixar totalment oberta la pregunta propiciava el risc d'haver de comparar memòries sobre temes massa diferents, i escollir-ne una per sobre de les altres normalment implicaria les queixes de partidisme per part dels autors dels camps no premiats.

Després d'una correspondència intensa, finalment es va optar per posar quatre preguntes o qüestions i deixar l'oportunitat a que es presentessin memòries sobre altres temes, entenent, però, que es donaria prioritat a les memòries que responguessin les 4 preguntes plantejades.

A mitjans de 1 885 l'anunci oficial del concurs fou publicat en *Acta* en francès i anglès, així com una traducció a l'anglès a *Nature*, entre altres llocs. El premi consistia en una medalla d'or i en 2 500 corones, el valor del qual no era realment extraordinari (per apreciar-ho millor, el sou anual de Mittag-Leffler era de 7 000 corones, gairebé tres cops més gran), però el prestigi de tal premi es podia comparar, en aquella època, a la que té actualment un premi Nobel. En l'anunci es nomenava la comissió, es plantejaven les qüestions i es donaven els detalls del lliurament de les memòries, les quals havien de ser enviades anònimament, identificades únicament amb un lema i acompanyades per un sobre segellat on hi apareixia el lema i el nom de l'autor. Havien d'ésser lliurades a l'editor en cap d'*Acta* abans de l'ú de juny del 1 888; és a dir, hi havia uns 3 anys per endavant.

De les quatre preguntes, Weierstrass plantejà tres i Hermite una. La primera estava dirigida a la resolució del ben conegut problema general de n cossos; la segona requeria una anàlisi detallada de la teoria d'equacions diferencials fuchssianes; la tercera versava sobre les equacions diferencials no lineals de Briot i Bouquet; i l'última, estava dedicada a l'estudi de relacions algebraiques connectant les funcions fuchssianes, introduïdes per Poincaré, que tenen el mateix grup d'automorfismes.

La primera pregunta començava plantejant el problema:

> *Donat un sistema d'un nombre qualsevol de punts materials que s'atrauen mútuament seguint la llei de Newton, hom proposa, sota la suposició que un xoc entre dos o més punts no té mai lloc, representar les coordenades de cada punt com a sèries procedents de funcions conegudes del temps i que convergeixen uniformement per a tot valor real de la variable . . .*

i en ella se citava com Lejeune Dirichlet, poc abans de morir, havia comunicat a un geòmetra de la seva confiança (Leopold Kronecker), que havia descobert un mètode per integrar les equacions diferencials de la Mecànica, i que aplicant aquest mètode, havia tingut èxit en provar l'estabilitat del nostre sistema solar de manera absolutament rigorosa.

Aquesta pregunta reflectia el gran interès de Weierstrass per aquest problema, en el qual havia treballat, juntament amb Sofia Kovalevskaya, per construir solucions formals, fallant però en la prova de llur convergència. Cal dir que Weierstrass estava especialment convençut que tals series eren convergents, ja que tenia molta fe en la reputació de Dirichlet, pel que fa al seu rigor, claredat i fiabilitat.

Val la pena dir que el mètode de l'aproximació de les solucions per desenvolupament en sèries en mecànica celest havia estat introduït per Laplace i Lagrange molt abans, i era usat pels astrònoms per tenir aproximacions molt útils en el càlcul d'efemèrides, etc. Però sempre havia quedat pendent el problema de convergència de els desenvolupaments trobats. Immediatament després de l'anunci, l'artilleria pesada del món matemàtic es va dirigir cap al problema de n cossos. Molta gent volia resoldre'l, però finalment només cinc de les dotze entrades presentades ho van intentar.

2 La gesta de Poincaré

Quan es publicà l'anunci del premi, Henri Poincaré tenia només trenta-un anys[1]. Encara que ja era ben conegut dins del món dels matemàtics, es va adonar de seguida que l'assoliment del premi seria d'una gran importància per a ell, i que el seu nom transcendiria les matemàtiques. Però també va haver de valorar la formidable tasca que representava atacar un problema tan important, el temps en exclusiva que li hauria de dedicar, així com els riscos que comporta presentar-se un concurs. No n'hi ha prou amb ésser molt intel·ligent, tenir molts fonaments i intuïció. Cal també tenir una mica de sort i, sobretot, ésser molt tossut i fort mentalment.

Per altra banda, era molt clar que els tres membres de la comissió havien pensat en Poincaré com a possible participant en el concurs, i eren conscients que Poincaré podria optar per més d'un dels problemes proposats. (Un d'ells, el quart, estava basat en les funciones introduïdes per ell mateix.) La primera evidència escrita es troba en una carta enviada per Mittag-Leffler a Poincaré el 13 juliol del 1 887[2], on el convida amistosament a participar. De fet, Mittag-Leffler tenia la millor de les opinions sobre Poincaré i coneixia prou bé la seva obra perquè Poincaré havia enviat diversos treballs importants a

[1] Molts més detalls sobre Poincaré i el premi es poden trobar a [DH96, BG97, Bot02].

[2] La correspondència de Poincaré es pot trobar als Arxius Henri Poincaré de la Universitat de Nancy 2, `http://www.univ-nancy2.fr/poincare/`, i en particular la correspondència entre Poincaré i Mittag-Leffler també a [Nab99].

Acta des de la seva fundació. De fet, per raó d'aquests treballs, pensava que Poincaré es dedicaria a resoldre la quarta qüestió.

Durant el mateix mes de juliol, sembla ser que Poincaré es decideix a prendre-hi part en el concurs, i més concretament el 16 de juliol envia una carta a Mittag-Leffler on li diu que la seva ambició és resoldre justament la primera qüestió, la relacionada amb el problema dels n cossos, que era clarament considerada com la més difícil. Després de recordar-li diversos resultats seus sobre el *problema restringit de tres cossos*—on es tenen dos punts materials, anomenats primaris, girant un al voltant de l'altre en una circumferència, i que consisteix a estudiar el moviment d'un tercer punt de massa tan petita que no afecta al moviment dels primaris—, li comenta que espera abordar el problema general i, si no resoldre'l—cosa que no espera pas aconseguir—, poder trobar almenys resultats prou complets per poder-los enviar al concurs.

Poincaré va treballar contínuament durant mesos i mesos, al llarg d'uns dos anys, al final dels quals va construir uns fonaments impressionants sobre la posteriorment anomenada teoria qualitativa d'equacions diferencials ordinàries. Ell va inventar el concepte d'*invariant integral* en sistemes hamiltonians, i el va utilitzar per provar el famós *teorema recurrent*. Va desenvolupar una nova aproximació a les òrbites periòdiques i la seva estabilitat, incloent la idea d'*exponents característics*. Jugant amb l'existència d'exponents característics no nuls, va poder provar la inexistència d'*integrals primeres uniformes* per al problema restringit de tres cossos. Tals integrals primeres són constants al llarg del moviment, i la uniformitat vol dir aquí dependència analítica respecte a coordenades i moments del sistema, així com respecte als paràmetres del sistema, entre els quals la raó entre les masses primàries.

Aquest teorema generalitzava així un d'anterior de Bruns, sobre la no existència d'una integral primera algebraica en el problema de tres cossos, diferent de les deu clàssiques ben conegudes. Però la seva conseqüència més fonamental és que allunyava tota esperança de resoldre el problema de tres cossos per mètodes quantitatius, tal com suggeria l'enunciat del problema del concurs. Per altra banda, usant els mètodes qualitatius per ell desenvolupats, va presentar una prova de l'estabilitat del problema restringit de tres cossos. En relació a aquest últim resultat, no es va adonar fins mig any després que la prova era incorrecta, però els seus intents per arreglar-la el van portar a descobrir uns fenòmens d'inestabilitat totalment inesperats i una realitat molt més rica i complexa del que cabia esperar.

Poincaré fou plenament conscient que les eines quantitatives fins aleshores emprades no eren prou bones per entendre el comportament a llarg termini, i que calia introduir altres de noves, de caire més qualitatiu. Va posar plegats tots els seus resultats en una memòria que va presentar al concurs al maig de 1 888 [Poi89], la publicació de la qual ha estat posteriorment considerada com el primer tractat sobre teoria qualitativa d'equacions diferencials. Però aquesta memòria tan reconeguda avui en dia, no és la mateixa que la que es va presentar al concurs.

3 El concurs

Es van presentar un total de 12 memòries, totes elles amb un títol i un epígraf. Cinc de les memòries, incloent la de Poincaré, adreçaven la primera qüestió, una adreçava la tercera qüestió, i les sis restants havien escollit els seus propis temes. Es coneix també la identitat d'alguns dels altres autors, i entre aquests, apart de Poincaré, es trobava com a matemàtic distingit Paul Appell, autor també habitual en *Acta*. Les memòries eren anònimes, és clar, però no fou difícil per als membres del comitè reconèixer, per exemple, a aquests dos autors. Una gran part de l'avaluació de les memòries es va fer per correu. Mittag-Leffler, després de rebre les memòries a Estocolm, i ajudat per un dels editors d'*Acta*, Edvard Phragmén, va portar a terme una primera selecció de les memòries rebudes per tal d'enviar-les a Hermite i Weierstrass. Al cap de quinze dies ja va escriure a Hermite i Weierstrass dient-los que només tres entrades valien la pena (la d'Hermite i Appell, antics alumnes d'Hermite, i una altra enviada des de Heidelberg), encara que ningú d'ells no havia donat una solució completa a cap de les qüestions.

Mittag-Leffler i Weierstrass van passar plegats a Berlín un parell de mesos, mentre estaven en contacte per correu amb Hermite. Després d'un mes, Mittag-Leffler va enviar un missatge a Hermite dient-li que ells pensaven que Poincaré mereixia guanyar el premi, i que Appell mereixia una menció honorable. A més, argumentava que Poincaré almenys havia intentat resoldre una de les qüestions, mentre que Appell havia escollit el seu tema: Poincaré s'havia limitat al problema restringit de tres cossos, mentre que Appell havia considerat l'expansió de funcions abelianes en termes de sèries trigonomètriques. Mentrestant Hermite havia estat estudiant la memòria de Poincaré i no tenia cap dubte sobre la seva importància.

La comissió havia arribat ràpidament a una decisió unànime, però encara els quedava per fer la feina més feixuga. Una cosa és reconèixer la qualitat d'un treball, però una altra de ben diferent és comprendre'l completament per revisar-lo. La memòria de Poincaré no era només molt llarga (la memòria presentada al concurs tenia 162 pàgines), sinó que contenia moltes idees noves i resultats. A més, s'hi barrejava la característica absència de detalls dels escrits de Poincaré. Tots tres membres de la comissió van haver de patir diverses parts de la memòria, fins al punt que Mittag-Leffler, volent que la versió presentada al rei fos la més completa possible, i pensant segurament en la seva posterior publicació en *Acta*, va escriure a Poincaré en nom dels tres—trencant així les regles del concurs, on se suposava que les memòries eren anònimes i que el jurat havia d'ignorar llur identitat—, confiant-li, secretament, que pensaven que havia fet una obra mestra, però demanant-li els detalls de molts passos. Poincaré va enviar-los nou Notes més que contribuïren en augmentar en 94 pàgines el volum de la memòria.

Després de revisar les memòries de Poincaré i Appell, la comissió ja estava en condicions de produir els seus informes. En principi, Weierstrass havia de fer l'informe del treball de Poincaré, i Hermite el d'Appell, per aparèixer també a *Acta*. Aquest sí es va escriure, però no pas el de Weierstrass, que a causa del seu estat delicat de salut, no trobava temps per fer-lo, i al qual Mittag-Leffler va deixar finalment d'insistir a causa dels esdeveniments que s'havien de produir.

El 20 de gener del 1 889, el dia abans del seixantè aniversari del rei Òscar, Mittag-Leffler va anar al Palau i el resultat, consistent en donar a Poincaré el premi, i a Appell una menció honorable (a efectes pràctics, una medalla), fou aprovat oficialment.

El resultat fou publicat en la premsa internacional, sobre tot en la francesa, on els diaris francesos el van considerar com un triomf davant l'hegemònica Alemanya (almenys matemàticament), i tots don van ser nomenats cavallers de la Legió d'honor en reconeixement del seu èxit. De passada també Mittag-Leffler en va sortir beneficiat, ja que ell també va ser honorat pel seu paper en promoure matemàtics francesos.

Com totes dues memòries havien estat ja molt revisades, Mittag-Leffler tenia l'esperança que es poguessin publicar en un volum especial d'*Acta* al novembre del 1 889. De fet, apart de l'informe de Weierstrass, encara absent, el volum es va acabar d'imprimir a finals de novembre. Però no va aparèixer fins a finals de l'any següent, i quan ho va fer no contenia una rèplica de la memòria que Poincaré havia presentat al concurs.

4 Descobriment de l'error

El primer senyal que alguna cosa no rutllava bé va tenir lloc el juliol de 1 890 quan, Phragmén, que estava a càrrec de l'edició de l'article de Poincaré per a *Acta*[3], va trobar alguns passatges sobre la convergència d'uns desenvolupaments de les sèries d'unes superfícies asimptòtiques en funció del paràmetre $\sqrt{\mu}$, on μ és la raó relativa entre les masses dels primaris en el

[3]Segons Goroff [Poi93, pàg. I11], Phragmén fou un dels competidors del concurs

problema restringit, que li van semblar una mica foscos i així ho va comunicar a Mittag-Leffler, qui va escriure el 16 de juliol a Poincaré demanant-li més explicacions.

No és fins a l'ú de desembre que Poincaré contesta a Mittag-Leffler que l'error és essencial i que, com a conseqüència, les superfícies asimptòtiques que ell creia tancades no ho són pas, sinó que es tallen infinits cops. I afegeix a peu de pàgina que a més que llur distància és un infinitèsim petit d'ordre més elevat que μ^p per molt gran que sigui p.

Afegeix que lamenta molt haver descobert això, i li demana si encara creu que la resta de resultats que subsisteixen a la memòria (els quals enumera meticulosament: existència de solucions periòdiques, de solucions asimptòtiques, la teoria d'exponents característics, la no existència d'integrals uniformes i la divergència de les sèries de Lindstedt) mereixen encara la recompensa del premi.

Adverteix a més que caldrà fer modificacions grans i que no sap si ja s'ha començat a imprimir la memòria, i finalitza dient que li tornarà a escriure quan vegi una mica més clars aquests afers.

Mittag-Leffler li contesta el 4 de desembre manifestant-li primer la seva perplexitat en conèixer aquestes notícies, i afegint que està fora de dubte que la memòria és una obra mestra que serà en endavant un punt de partida dins la mecànica celeste, per la qual cosa li confirma que el premi ha estat molt dignament atorgat. (No és tan indulgent en una altra carta enviada a Hermite dos dies més tard, i que es conserva als arxius de l'Académie des Sciences, on li comenta que la falta comesa per Poincaré és tan greu i tan essencial que no hi ha moltes pàgines on no s'usen resultats que siguin falsos.)

Hi ha, però, un problema. La carta de Poincaré ha arribat massa tard i la memòria original, que havia estat impresa l'onze de novembre, ja ha estat distribuïda.

Sota aquestes circumstàncies, li demana que enviï una carta per a *Acta* fent esment de l'error trobat, i anunciant el lliurament d'un treball nou amb indicacions de totes les modificacions necessàries. Aquí val la pena esmentar que Mittag-Leffler aprofita el moment per demanar-li a Poincaré que afegeixi unes paraules de reconeixement a Phragmén, que li puguin ajudar a recolzar-lo en la competició per una càtedra a la Universitat d'Estocolm. (En canvi, ell no va trobar convenient per als seus interessos agrair públicament la participació de Phragmén i simplement no ho va fer. Nogensmenys, l'any següent promou Phragmén al comitè editorial d'*Acta* i més endavant, en 1 893, Phragmén guanyà la càtedra vacant per la mort de Sofia Kovalevskaya a la Universitat d'Estocolm.)

El dia següent, 5 de desembre, Mittag-Leffler li escriu una altra carta a Poincaré on li explica com se les ha enginyat per demanar que li retornin pràcticament tos els exemplars enviats de la memòria, excepte els de Gyldén i Lindstedt que espera recuperar personalment. Suggereix també a Poincaré que es faci càrrec de l'edició del nou volum, cosa que Poincaré farà, abonant més endavant més de 3 585 corones (el premi li va aportar només 2 500 corones, o sigui que per a Poincaré no fou un bon negoci). Finalment, Mittag-Leffler conserva, però, un exemplar que porta una menció manuscrita en suec assenyalant que tota l'edició ha estat destruïda, i hi ha una altre amb notes manuscrites de Poincaré. Tots dos es troben a l'institut Mittag-Leffler, on sembla que puguin haver altres exemplars. (Així, Richard McGehee, durant un post-doc a l'institut, sembla que en descobreix alguna altra còpia [DH96].)

En la mateixa carta, Mittag-Leffler li proposa a Poincaré que escrigui una nova versió de la memòria arreglant allò que calgui, i afegint en la introducció que la memòria publicada és una modificació de la presentada, de manera que uns desenvolupaments que estaven només indicats en la memòria original són ara explicats i a més es corregeix un error que havia en la versió original. Subtilment, Mittag-Leffler suggereix així a Poincaré que no especifiqui l'abast de l'error.

Finalment, a principis de gener de 1 890 Poincaré envia a Phragmén la versió corregida de la seva memòria. No només contenia substancials alteracions per corregir l'error, sinó que a més havia incorporat totes les notes de la primera edició al llarg del text, que finalment ocupava 270 pàgines [Poi90].

Tot i que la impressió començà a l'abril, el retard acumulat degut a altres treballs va fer que la memòria no aparegués publicada fins a mig novembre del 1 890. Quan el volum *tretze* d'*Acta* finalment aparegué, contenia tant la memòria de Poincaré com la d'Appell, juntament amb l'informe d'Hermite sobre aquesta última.

L'informe de Weierstrass no aparegué mai. Al principi, Mittag-Leffler pressionava Weierstrass demanant-li l'informe, però com Weierstrass es va queixar alguns cops a Mittag-Leffler sobre la forma com aquest havia portat tot aquest afer, finalment Mittag-Leffler va pensar que segurament era millor no pressionar-lo més i que no aparegués un informe de Weierstrass que potser no hauria tapat tant l'afer de l'error. D'aquesta manera, Mittag-Leffler va aconseguir que, quan aparegué la memòria de Poincaré, només sis persones coneixien la rellevància de l'error: Poincaré, Phragmén, Kovalevskaya, Hermite, Weierstrass i ell mateix. Després de la publicació de la memòria, els rumors sobre l'error s'esmortiren ràpidament i l'excel·lència del treball de Poincaré fou àmpliament reconeguda. L'objectiu de Mittag-Leffler que el concurs donaria lloc a resultats matemàtics nous molt importants s'havia acomplert, i la memòria de Poincaré havia aconseguit que la celebració del seixantè aniversari del rei no fos oblidada.

5 Separatrius i caos

Anem ara a intentar explicar breument en què consistia l'error que va cometre Poincaré, així com les seves implicacions.

En la primera part de la seva memòria, Poincaré havia estudiat l'existència i localització d'abundants òrbites periòdiques del problema restringit de tres cossos. Aquest és un sistema hamiltonià de dos graus de llibertat, diguem de la forma $H(x, q; y, p)$, on l'espai de variables es compon de dues posicions (x, q) i llurs dos moments associats (y, p), això és, una varietat 4-dimensional. Com l'energia del sistema és una constant de moviment, quan hom es restringeix a un nivell fixat d'energia, queda un hamiltonià d'un grau de llibertat depenent del temps, de la forma $H(x, y, t)$ que se sol anomenar hamiltonià amb un grau i mig de llibertat, on típicament la dependència del hamiltonià respecte a la variable t és periòdica, per exemple, 2π-periòdica. Les trajectòries poden ser dibuixades sobre una varietat 3-dimensional. Encara es pot rebaixar la dimensió una unitat més quan es considera l'aplicació de retorn o de Poincaré P associada a una superfície de secció. En el cas que ens ocupa, això equival a considerar simplement el difeomorfisme del pla que a cada punt $(x(0), y(0))$ li associa $(x_0(2\pi), y_0(2\pi))$, on $(x(t), y(t))$ és una trajectòria del sistema Hamiltonià. Tenim així que la dinàmica es redueix a l'iteració sota una aplicació bi-dimensional P que a més conserva l'àrea, com a resultat de provenir d'un sistema hamiltonià.

En tals superfícies de secció, una solució periòdica del sistema hamiltonià dóna lloc a un punt fix o, més generalment, a una òrbita periòdica de l'aplicació de Poincaré.

Per fixar idees, considerem un punt fix (x_0, y_0) de P: $P(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$. Per veure l'estabilitat local d'aquests punts fixos, hom estudia la matriu derivada $DP(x_0, y_0)$, i els seus valors propis, anomenats *multiplicadors característics* són de la forma $\exp(\pm\lambda T)$, on $\pm\lambda$ són els *exponents característics* de la solució periòdica (introduïts per Poincaré) i T és el període de la solució periòdica. En cas que λ sigui un nombre real no nul, tenim un punt fix *sella*, que és inestable, igual que la solució periòdica que el genera. Existeixen així solucions asimptòtiques, unes per a $t \to \infty$ i altres per a $t \to \pm - \infty$, a aquestes solucions periòdiques o, traduint a la superfície de secció, òrbites asimptòtiques al punt fix, sota l'acció de P o P^{-1}. En particular, poden també existir solucions doblement asimptòtiques (per a $t \to \pm\infty$).

Com a model per a explicar el que passava en el problema restringit prop d'una solució periòdica, Poincaré introduí el Hamiltonià de dos graus de llibertat [Poi90, pàg. 220]

$$H(x, q; y, p) = p + y2 - 2\mu \sin 2\frac{x}{2} - \mu\varepsilon \cos q \sin x \tag{1}$$

consistent d'un pèndol simple acoblat a un oscil·lador lineal, depenent de dos paràmetres $\mu > 0$ i ε, en principi petits, d'equacions hamiltonianes associades:

$$\dot{x} \;=\; \frac{\partial H}{\partial y} = 2y, \qquad \dot{y} \;=\; -\frac{\partial H}{\partial x} = \mu \sin x \; + \mu\varepsilon \cos q \cos x,$$

$$\dot{q} \;=\; \frac{\partial H}{\partial p} = 1, \qquad \dot{p} \;=\; -\frac{\partial H}{\partial q} = -\mu\varepsilon \sin q \sin x.$$

Si $\varepsilon = 0$, aquestes equacions tenen una solució 2π-periòdica

$$x = 0, \qquad q = t, \qquad y = 0, \qquad p = 0,$$

d'energia $H = 0$, essent els seus dos exponents característics iguals a $\pm\sqrt{2\mu}$. Les solucions asimptòtiques (estable i inestable) formen superfícies de dimensió 2 donades per les equacions

$$y = \frac{\partial S_0}{\partial x}, \qquad p = \frac{\partial S_0}{\partial q}, \qquad S_0 = S_0(x,q) = \pm\sqrt{2\mu} \cos \frac{x}{2},$$

d'on

$$y = \pm\sqrt{2\mu} \sin \frac{x}{2}, \qquad p = 0,$$

i així les superfícies asimptòtiques per $\varepsilon = 0$ *tanquen* una regió d'amplada del ordre de $\sqrt{\mu}$, són de fet *doblement asimptòtiques*, és a dir, asimptòtiques a l'òrbita periòdica per $t \to \pm\infty$, i són sovint anomenades *separatrius*.

Poincaré va tractar després el cas ε no nul però petit, buscant l'expressió de les superfícies asimptòtiques en la forma

$$y = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \tag{2}$$

on $S(x, q; \varepsilon, \mu)$ satisfà *l'equació de Hamilton-Jacobi*

$$\frac{\partial S}{\partial q} + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) 2 = 2\mu \sin 2\frac{x}{2} + \mu\varepsilon \cos q \sin x,$$

obtinguda en substituir l'expressió de les superfícies asimptòtiques (2) en l'equació $H = 0$, on el hamiltonià ve donat per (1). A més, l'existència d'exponents característics no nuls per a $\varepsilon = 0$ implica que (y, p) i per tant S és desenvolupable en potències de ε:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon 2 S_2 + \cdots \tag{3}$$

on S_0 ja és conegut.

En la primera memòria [Poi89, pàg. 143], Poincaré argumenta de manera errònia que les superfícies asimptòtiques estable i inestable *no* es poden creuar, i per un argument de conservació d'àrea, arriba a la conclusió que han de coincidir, donant lloc així a superfícies doblement asimptòtiques *tancades* que impedeixen així el moviment a través d'ells, resultat que aplica per enunciar l'estabilitat del problema restringit de tres cossos.

Com a conseqüència de l'observació de Phragmén, Poincaré s'adona que res no impedeix que les superfícies asimptòtiques es tallin en un punt sense coincidir. De fet, en la nova memòria [Poi90, pàg. 222] reprèn el càlcul de les superfícies doblement asimptòtiques, introduint llur desenvolupament (3) en l'equació de Hamilton-Jacobi, i igualant potències d'ordre 1 en ε resulta que S_1 ha de satisfer l'equació

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} + 2\sqrt{2\mu}\sin\frac{x}{2}\frac{\partial S_1}{\partial x} = \mu\cos q\sin x.$$

Resolent aquesta equació lineal en derivades parcials de primer ordre, i imposant que les superfícies 2 siguin asimptòtiques a l'òrbita periòdica, hom arriba a unes expressions en principi diferents per a la superfície inestable (que satisfà $S_1 = 0$ per $x = 0$) respecte de l'estable (satisfent $S_1 = 0$ per $x = 2\pi$), i per tal que coincideixin, cal que l'àrea de la regió envoltada per elles sigui zero. A la nova memòria [Poi90, pàg. 223], Poincaré calcula de fet aquesta àrea, i observa que és un múltiple de la quantitat

$$J = 2\pi\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2\mu}}\right) = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-\pi/2\sqrt{2\mu}}\right), \tag{4}$$

que és clarament no nul·la, amb la qual cosa conclou que les varietats doblement asimptòtiques no són tancades. En canvi, prova que les varietats asimptòtiques es tallen en infinits punts, donant lloc així a una infinitat de trajectòries doblement asimptòtiques, resultat que pràcticament tanca la seva memòria [Poi90, pàg. 223].

Hi ha diversa gent que diu que és aquí on Poincaré va descobrir el que avui s'anomena *caos* (vegeu, per exemple, [DH96, pàgs. 40-41], així com [Par98]), perquè el mecanisme més usual avui per detectar moviment quasi-aleatori en un sistema és a través de la detecció de trajectòries transversals doblement asimptòtiques (consulteu, per exemple, [GH90]).

És obvi que Poincaré es va avançar en *molts anys* als seus coetanis. És ben clar que la memòria [Poi90] fou la base sobre la qual Poincaré va escriure el seu famós tractat sobre la mecànica celest, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, [Poi87a, Poi87b, Poi87c], i en el tercer tom, que no aparegué fins al 1 899, Poincaré anomena *homoclíniques* les trajectòries doblement asimptòtiques i, en referència a la infinitat de trajectòries homoclíniques, fa només aquest comentari [Poi87c, §397, pàg. 389]:

> *Quan hom intenta representar la figura formada per aquestes dues corbes i llurs interseccions en nombre infinit on cadascuna de les quals correspon a una solució doblement asimptòtica, aquestes interseccions formen una mena de filat, de teixit, de xarxa de malles infinitament atapeïdes; cadascuna d'aquestes corbes no pot pas tornar a tallar-se a ella mateixa, sinó que ha de replegar-se sobre ella mateixa d'una manera molt complexa per tornar a tallar una infinitat de cops totes les malles del entrellat.*
>
> *Hom restarà frapat de la complexitat d'aquesta figura, que jo mateix no intento pas a traçar. No hi ha res més apropiat per donar-nos una idea de la complicació del problema de tres cossos i en general de tots el problemes de la Dinàmica on no n'hi ha pas d'integral uniforme i on les sèries de Bohlin són divergents.*

Aquest comentari, però, no va servir per estimular la recerca d'aquest tipus de comportament (excepte, potser, a Birkhoff), i aquest fenomen va restar sense tractar durant manta anys.

No fou fins a l'aparició dels ordinadors, i amb ells la possibilitat d'experimentació numèrica, que aquest fenomen fou detectat, i va començar una nova ciència multidisciplinar, anomenada *sistemes dinàmics* pels matemàtics, *dinàmica no lineal* pels físics, i *ciència no lineal* en general, on sovint apareixen comportaments caòtics.

Típicament s'anomena *caos* al comportament a llarg termini impredictible en un sistema dinàmic determinista, a causa de la dependència sensitiva del sistema respecte a les condicions inicials. Per trobar les seves primeres ocurrències cal viatjar fins a l'any 1 961, quan el meteoròleg Edward Lorenz, va detectar amb l'ajut de l'ordinador aquest fenomen de la dependència sensitiva respecte a les condicions inicials en un sistema d'equacions diferencials [Lor63]. (Aquest fenomen més endavant va ser popularitzat com a efecte papallona, quan Lorenz va impartir el desembre del 1972 una conferència en l'American Association for the Advance of Science titulada *Pot l'aleteig d'una papallona al Brasil provocar un tornado a Texas?*, vegeu [Gle87]).

Poc després, Stephen Smale [Sma65] va crear la seva cèlebre ferradura com a paradigma del moviment quasi-aleatori, seguint un mecanisme de construcció de trajectòries homoclíniques. Es feia així patent que calia retornar als càlculs de Poincaré per detectar l'existència de trajectòries homoclíniques.

No fou fins al 1 963–64 quan Melnikov [Mel63] i Arnold [Arn64] van reproduir el mètode de Poincaré de detecció de l'anomenada escissió de separatrius, donant lloc al que avui es coneix pel *mètode de Poincaré-Melnikov-Arnold*, abreviat sovint com a mètode de Melnikov.

És curiós, però, que un fenomen ja detectat per Poincaré en la seva memòria [Poi90], però potser no explicitat tant en [Poi87c], això és, el caràcter exponencialment petit de l'escissió de separatrius (vegeu la fórmula (4)), va restar com un problema obert. Així, la fórmula (4) dóna només la primera expansió en ε de l'àrea entre les varietats estable i inestable, amb la qual cosa l'expressió total per a aquesta àrea és proporcional a

$$\varepsilon J + \mathrm{O}(\varepsilon 2)$$

però com J és exponencialment petit en el paràmetre μ, $J = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-\pi/2\sqrt{2\mu}}\right)$, cal en principi, per tal d'assegurar que hi hagi o no intersecció de les varietats estable i inestable, i per tant, existència de trajectòries homoclíniques, que el terme J sigui el dominant, per a la qual cosa, una aplicació directa del mètode de Melnikov requereix $\varepsilon = \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-\pi/2\sqrt{2\mu}}\right)$, és a dir, que el paràmetre ε sigui exponencialment petit respecte a μ. Aquesta condició ja apareixia implícitament en l'article d'Arnold [Arn64] (que, per cert, és el primer exemple conegut del fenomen d'inestabilitat en sistemes Hamiltonians quasi integrables conegut com a *difusió d'Arnold*).

De nou, per veure l'avanç de Poincaré respecte als seus coetanis, o equivalentment la vigència actual de la seva obra, cal dir que la justificació d'existència de trajectòries homoclíniques transversals en el hamiltonià (1), o d'altres similars amb dos graus de llibertat, amb dos paràmetres, però suposant només una relació potencial entre ells (del tipus, per exemple, $\varepsilon = \mu^p$), no ha estat provat fins al final del segle passat (vegeu [DS92, DS97, Gel99] i les referències incloses, així com també els comentaris de [Ano01]), gràcies a l'ús de parametritzacions complexes de les varietats asimptòtiques (és a dir, usant els mètodes de variable complexa que Poincaré usava quan li calien, per exemple, en la derivació de la fórmula (4)).

En canvi, dins el camp dels hamiltonians de tres o més graus de llibertat, resultats sobre l'escissió de separatrius, sobre l'anomenada difusió d'Arnold, i en general sobre la dinàmica que es té, estan encara lluny de poder ser provats. És remarcable que molts dels nous atacs a aquests temes es basen en relectures de l'obra de Poincaré, com la seva memòria [Poi90] i el seu tractat de mecànica celeste [Poi87c] (vegeu, per exemple, [LMS03, DG00]), quan ja han passat més de cent anys de la seva publicació.

Referències

[Ano01] D. V. Anosov. Poincaré and the problems of Oscar II. *Istor.-Mat. Issled. (2)*, 6(41):57–72, 387, 2001.

[Arn64] V. I. Arnold. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156:9–12, 1964.

[BG97] June Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*, volume 11 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Bot02] U. Bottazzini. *Poincaré, philosophe et mathématicien*. Les Génies de la Science. Belin, Paris, 2002.

[DG00] A. Delshams and P. Gutiérrez. Splitting potential and the Poincaré-Melnikov method for whiskered tori in Hamiltonian systems. *J. Nonlinear Sci.*, 10(4):433–476, 2000.

[DH96] Florin Diacu and Philip Holmes. *Celestial encounters*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. The origins of chaos and stability.

[DS92] Amadeu Delshams and Teresa M. Seara. An asymptotic expression for the splitting of separatrices of the rapidly forced pendulum. *Comm. Math. Phys.*, 150(3):433–463, 1992.

[DS97] Amadeu Delshams and Tere M. Seara. Splitting of separatrices in Hamiltonian systems with one and a half degrees of freedom. *Math. Phys. Electron. J.*, 3(4):1–40, 1997.

[Gel99] V. G. Gelfreich. A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map. *Comm. Math. Phys.*, 201(1):155–216, 1999.

[GH90] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[Gle87] James Gleick. *Chaos*. Penguin Books, New York, 1987. Making a new science.

[LMS03] P. Lochak, J.-P. Marco, and D. Sauzin. On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 163(775):viii+145, 2003.

[Lor63] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Sci.*, 20:130–141, 1963.

[Mel63] V.K. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12:1–57, 1963.

[Nab99] Philippe Nabonnand. *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*. Publications des Archives Henri-Poincaré. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. Avec en annexes les lettres échangées par Poincaré avec Fredholm, Gyldén et Phragmén.

[Par98] Matthew W. Parker. Did Poincaré really discover chaos? Essay review of *Celestial Encounters* [Princeton Univ. Press, Princeton, 1996; by F. Diacu and P. Holmes]. *Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.*, 29(4):575–588, 1998.

[Poi89] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les èquations de la dynamique. *Acta Math.*, 13:1–255, 1889. Mémoire couronné du prix de S.M. le Roi Oscar II. Avec des notes par l'auteur. Imprès però no publicat.

[Poi90] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les èquations de la dynamique. *Acta Math.*, 13:1–270, 1890.

[Poi87a] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Reimpressió de l'original de 1892. Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard.

[Poi87b] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome II*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin. Reimpressió de l'original de 1893. Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard.

[Poi87c] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome III*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987. Invariant intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques. Reimpressió de l'original de 1899. Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard.

[Poi93] Henri Poincaré. *New methods of celestial mechanics. Vol. 3*, volume 13 of *History of Modern Physics and Astronomy.* American Institute of Physics, New York, 1993. Integral invariants and asymptotic properties of certain solutions, Translated from the French, Revised reprint of the 1967 English translation, With endnotes by G. A. Merman, Edited and with an introduction by Daniel L. Goroff.

[Sma65] Stephen Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, pages 63–80. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.