Poincaré, pensador de la matemática

Javier de Lorenzo

1. Presentación

Considerado en su época como un matemático excepcional, se puede afirmar hoy que Poincaré ha sido uno de los mayores matemáticos y físicos de todas las épocas. Nace en Nancy el 29 de Abril de 1854 y muere en París el 17 de Julio de 1912.

No imparte clases de Matemáticas "puras" —salvo de Análisis en Caen, dos años— sino que en la Sorbona enseñará Mecánica Física y Experimental, Física Matemática y Cálculo de Probabilidades, Astronomía matemática, Mecánica celeste... Desde 1902, Electricidad teórica en la Escuela Superior Profesional de Correos y Telégrafos...

Melómano entusiasta, junto a su obra matemática y física realiza informes sobre geodesia, astronomía, metrología, telegrafía; se preocupa por problemas político-sociales que dividen a la sociedad francesa de su época como el *affaire* Dreyfus. Por temas de Moral, Educacióny, sobre todo, por la defensa de la libertad de pensamiento porque (para las referencias véase las notas bibliogràficas al final),

> El pensamiento no debe someterse nunca ni a un dogma, ni a un partido, ni a una pasión, ni a un interés, ni a una idea preconcebida, ni a nada, si no es a los hechos mismos, porque, para él, someterse sería dejar de ser.(1909, p. 139)

Pensador de su praxis teórica, matemática y científica, en sus conferencias y ensayos de carácter filosófico se centra en la Filosofía de la Matemática y la Filosofía de la Ciencia, si es que ambas pueden desgajarse en su pensamiento.

Dispersos en las Revistas de la época reúne alguno de esos escritos en libros que se convierten en auténticos best-seller. En Diciembre de 1902 sale a luz **Ciencia e Hipótesis**; en 1905, **El valor de la Ciencia**; en 1908, **Ciencia y Método**. Un año después de morir, en 1913, se publica **Últimos pensamientos**. Son los libros que cimentan su popularidad, unida a su aureola de sabio, de cerebro viviente de las ciencias racionales como lo calificara Painlevé.

Publicaciones estimadas de alta divulgación, encierran más de un problema. La claridad y simplicidad de estos ensayos, su espléndida limpidez oculta un pensamiento profundo. Luis Rougier en 1919, cuando pretendía la publicación de un quinto libro de ensayos de Poincaré, escribía a León Daum que de entre los 24.000 lectores de **Ciencia e Hipótesis** probablemente sólo unos mil habrían comprendido el libro.

Y ello a pesar de que no se trata de los escritos estrictamente matemáticos, mezcla de intuición, cálculo y demostración. Estilo matemático que unía en ocasiones el rigor con la confusión. Algo plenamente reconocido en su época como muestra una de las cartas de Hermite —su gran maestro— a Mittag-Leffler, de 22 de Noviembre de 1888, con motivo de juzgar el trabajo enviado por Poincaré para optar al premio convocado por el rey de Suecia sobre Mecánica celeste y estabilidad del sistema solar. Hermite escribe

> Pero hay que reconocer que en este trabajo y en casi todas sus investigaciones Poincaré muestra el camino y da las señales, pero deja mucho por hacer para llenar las lagunas y completar su trabajo. Picard le ha pedido a veces ilustraciones y ejemplos de puntos muy importantes de sus artículos en los Comptes Rendus, sin ser capaz de obtener nada excepto la frase: "es así, es

> de esta forma", de modo que parece como un vidente a quien las verdades se le aparecen con una luz intensa, pero fundamentalmente a él solo. (Tomado de Gray, p. 32)

Estilo matemático de visionario que en sus trabajos de pensamiento parece oculto pero, también está en ellos. De ahí su complejidad a pesar de su aparente simplicidad.

2. Las ideas básicas

Me atrevo a señalar la existencia de dos fases en la plasmación de su pensamiento divididas por una fecha que, como toda división, es arbitraria: entornos de 1900. Hasta ese momento expone sus ideas sin reserva alguna. Esas ideas han sido asumidas por algunos; criticadas, de modo implícito en ocasiones, a veces de modo explícito, por otros. Han surgido nuevos campos y, hay que analizarlos. Y Poincaré entra, de pleno, en ellos.

Con lo cual se constituye en uno de los referentes para las distintas corrientes del pensamiento matemático del momento y de épocas posteriores: el constructivismo intuicionista ve en él uno de sus exponentes; cantorianos, formalistas y logicistas, el enemigo al que hay que destruir. En cuanto a su pensamiento científico, su convencionalismo será radicalizado en puro pragmatismo nominalista por unos, adoptado como base por otros como el Empirismo del Círculo de Viena.

Desde la inflexión temporal indicada y de lo que implican palabras como las anteriores, voy a esbozar alguna de sus ideas clave en cuanto al Pensamiento matemático y que va exponiendo desde 1882 hasta 1900, 1902. Alguna de ellas —no sé si he elegido correctamente— de plena actualidad en las discusiones en el campo de la llamada Filosofía de la Matemática, en el propio interior de la disciplina.

1. Relaciones entre la Matemática y la Física

En 1897 se celebra el Primer Congreso Internacional de Matemáticos (CIM), en Zürich del 9 al 11 de Agosto. Poincaré elige como tema *Sobre las relaciones del Análisis puro y la Física matemática* (VC, cap. V). Señala tres fines del Hacer matemático:

Físico: suministrar un instrumento para el estudio de la naturaleza

Filosófico: ayudar a profundizar las nociones de número, espacio, tiempo

Estético: el propio del matemático por el cual las matemáticas deben ser cultivadas por sí mismas.

Los fines Físico y Estético se le muestran

> Inseparables... La Física matemática y el Análisis puro... se penetran mutuamente y su espíritu es el mismo. (VC, 139—140)

Se tiene aquí una de las creencias básicas de Poincaré: el cultivo del Hacer matemático no debe olvidar, nunca, su enlace con la Física, con las restantes ciencias, con el conocimiento de la naturaleza: no basta quedarse en la "matemática pura", porque la misma quedaría estéril a corto o largo plazo. Y para poner de relieve este enlace, pasa a estudiar lo que la Física recibe de la Matemática, lo que la Matemática toma de la Física.
a. Para Poincaré la Física parte de la experiencia ya que

> todas las leyes son obtenidas de la experiencia. (VC, 141)

pero no por la pura reflexión, tampoco de modo inmediato porque el experimento es particular y siempre aproximado haciéndose en condiciones complejas. Para alcanzar la ley, que se quiere general y exacta, hay que generalizar; pero la generalización se puede hacer de mil maneras y el problema es cómo elegir la vía más prometedora. Aquí interviene la matemática al suministrar el lenguaje en el que se expresa la ley, en el que se expresa la física. Y basta cambiar el lenguaje para obtener una generalización adecuada.

No basta el lenguaje cuyo papel ha sido siempre reconocido como importante pero puede quedar en algo accidental. Hay algo más básico en lo que la Matemática aporta a la Física: proporcionar analogías profundas, verdaderas, las que no ven los ojos pero la razón adivina para que se pueda establecer la ley, la generalización a partir del hecho bruto, singular. El matemático trabaja con la forma y no con la materia específica. Seres que difieren en la materia pueden poseer la misma estructura y es la matemática quien hace ver esa estructura por lo cual señala al científico la línea de la generalización adecuada sin más que atenerse a la analogía que le proporciona el matemático.

> Analogías matemáticas entre fenómenos que no tienen ninguna relación ni aparente ni real de forma que las leyes de uno de esos fenómenos ayuda a adivinar las del otro. (VC, 146)

Poincaré da varios ejemplos, en concreto la teoría del potencial. Una ecuación diferencial como la de Laplace sugiere un enlace íntimo entre campos muy distintos como el potencial eléctrico, la atracción newtoniana, el movimiento de líquidos, la propagación del calor... El conocimiento de uno de estos campos permite, por analogía, transferirloa los demás. De esta manera el Hacer matemático posibilita al físico

> conocer la armonía oculta de las cosas haciéndoselas ver desde un nuevo ángulo. (VC, 147)

Pero ¿cómo tratar las ecuaciones de la física matemática? Para algunos se trata de obtener las consecuencias y considerarlas como realidades intangibles. Para Poincaré el trabajo del científico no se limita a deducir y las ecuaciones de la física le enseñan

> Lo que se puede y se debe cambiar. (VC, 146)

b. Hay otra cara, lo que el Hacer matemático debe al físico. Para Poincaré, y es una de sus creencias básicas,

> *El único objeto natural del pensamiento matemático es el número natural.* Es el mundo exterior quien nos ha impuesto el continuo, que hemos inventado, sin duda, pero que nos ha forzado a inventar.
>
> Sin él no habría análisis infinitesimal; toda la ciencia matemática se reduciría a la aritmética o a la teoría de las sustituciones [la teoría de grupos]. (VC, 149)

Si la experiencia ha forzado al matemático a crear el continuo, también le ha forzado a concentrar su esfuerzo en el desarrollo del análisis a partir de ese continuo. Es lo que todo matemático debe agradecer al físico. La Física no sólo propone problemas, tópico aceptado de modo tradicional, sino que fuerza a elegir temas a los que no se habría prestado atención desde el interior del hacer matemático. Como ejemplo, la serie de Fourier ha surgido de un problema físico, se ha convertido en un instrumento precioso para el Análisis y ha forzado a estudiar las funciones discontinuas que, a su vez, han llevado a ampliar la noción de función lo que quizá no hubiera ocurrido desde el interior de la matemática.

Proporcionar problemas, dar la ocasión de resolverlos, forzar a adoptar temas. También

> La física (..) nos ayuda a encontrar los medios, y eso de dos maneras:
>
> Nos hace presentir la solución; nos sugiere los razonamientos. (VC, 152)

El físico devuelve al matemático el instrumento, la analogía, para que pueda presentir tanto el problema como, y es lo más importante, la manera de resolverlo. Junto a la imagen geométrica, instrumento habitual del matemático en su trabajo, la física proporciona

> Imágenes físicas de las que puede hacer uso con el mismo éxito. (VC, 153)

Gracias a estas imágenes puede ver de un golpe lo que la deducción pura sólo mostraría sucesivamente. Por esas imágenes, acopla los elementos dispersos de la solución

> y por una clase de intuición adivina antes de poder demostrar. ¡Adivinar antes de demostrar! ¿Tengo necesidad de recordar que es así como se han hecho todos los descubrimientos importantes? (id.)

Confesión pública que avala su estilo visionario y el papel secundario que otorga a la Lógica. La analogía física permite presentir la solución que el matemático no está en condiciones de establecer por razonamiento deductivo. Tras este presentimiento el matemático puede intentar la búsqueda de la solución. Un fenómeno físico muestra que una serie presenta una solución, sugiere que ha de ser convergente y fuerza al matemático a demostrar, después, dicha convergencia.

Y otra novedad en el pensamiento de Poincaré. La física

> también, en cierta medida, nos proporciona razonamientos. (id.)

Y pone el ejemplo de Klein que para solucionar un problema sobre la superficie de Riemann hace uso de las corrientes eléctricas.

> Es verdad que los razonamientos de este género no son rigurosos, en el sentido que el analista asigna a esta palabra. (VC, 154)

Inmediato,un problema: la existencia de dos tipos de rigor: el matemático y el físico. Para el matemático, ciertamente, no hay tal disyuntiva: o hay rigor obtenido mediante una demostración o no lo hay. Pero Poincaré acaba de reconocer que el físico también proporciona razonamientos matemáticos aunque no parezcan seguir el canon de rigor del matemático. Es paradoja que se le muestra aparente: El físico maneja la medida y, con ello, los números que obtiene son realmente aproximaciones mientras que las funciones que maneja difieren tan poco como se quiera de una función discontinua o de una continua. Suposición que jamás quedará contradicha por la experiencia, ni actual ni futura. Con lo cual tiene una libertad que le libra de las dificultades que atan al analista. Ello supone que la ojeada que le basta al físico no es el razonamiento que exige el matemático. Ahora bien, esto no indica, en modo alguno, que uno no pueda ayudar al otro. De hecho, afirmará Poincaré, muchas de esas ojeadas o aproximaciones físicas se han terminado transformando en demostraciones rigurosas y se puede esperar que en el futuro pueda seguir haciéndose.

[Y algo más, está indicando que la intuición no sólo se apoya en la intuición o imagen geométrica, en la imagen física, siempre básicas, sino también en la captación de la analogía, de la estructura que subyace a distintos fenómenos que, si son distintos, se debe a la naturaleza de sus objetos y no a la forma en la cual se comportan. Intuición que posibilita un tipo de conocimiento más profundo, un conocimiento estético de la armonía subyacente. Conocimiento estético del matemático que no sólo se apoya en lo sensible, en lo perceptible por los sentidos sino en lo captable por esa intuición profunda de la analogía, de la forma o estructura subyacente a los fenómenos. Es el fin máximo del matemático, el fin estético, la captación de estas formas puras, de estas estructuras con las cuales construir, posteriormente, teorías y resolver problemas]

2. Razonamiento matemático, su objeto natural; la demostración

En 1894 publica *Sobre la naturaleza del razonamiento matemático* (CH, cap. 1). Ensayo convertido en un clásico incluido en casi todas las antologías de Filosofía de la Matemática. Se centra en el objeto natural del pensamiento matemático, el número natural, donde a partir de la noción "uno más" da las definiciones recursivas de suma y producto. Definiciones recursivas irreducibles a la definición lógica —que de modo clásico se apoya en dar el género y la diferencia específica— porque en ellas se contienen una infinidad de definiciones, cada una de las cuales sólo tiene sentido cuando se conoce la precedente. Demuestra, como ejemplos, las propiedades asociativa y conmutativa para las dos operaciones definidas, con lo cual ejemplifica el método demostrativo de inducción completa.

Para Poincaré estos tipos de definición y demostración muestran que el Hacer matemático es autónomo, irreducible a la Lógica y a la Experiencia.Irreducible porque en esos procesos se siguen unos principios que son sintéticos a priori.

Uno de estos principios es el que se refleja en la demostración por inducción completa, que puede adoptar distintas formulaciones. No es analítico porque no se reduce a la forma "A es A", donde el contenido del predicado es idéntico al contenido del sujeto; tampoco procede de la experiencia porque encierra una infinidad de pasos. Infinidad de pasos pero en unidad que diferencia la "auténtica" demostración matemática de la simple verificación a la que se reduce la demostración lógica. El principio de inducción completa, irreducible a los principios de identidad y de contradicción, es la afirmación de la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición de un mismo acto desde que este acto es posible y constituye

> El razonamiento matemático por excelencia. (CH,65)

Potencia del espíritu que conlleva una intuición originaria matemática que no es intuición de objetos, no perceptiva o sensible de algo dado, sino intuición de un acto, de una acción y de la posibilidad de reiterar esa acción. Acción o reiteración que en la Aritmética se condensa en el "uno más" y se plasma, en lo demostrativo, en el principio de inducción completa. Desde la intuición de esa acción y de su reiteración se obtiene como resultado el número natural; no el número natural en sí, sino como sucesor. Ello implica que el número natural es una construcción que se realiza paso a paso y en enfoque ordinal, porque lo que se termina alcanzando es la sucesión ordenada de los númerosnaturales. Al rechazar que la definición sea lógica se está indicando, a la vez, que lo importante no es dar las propiedades de lo definido como si fuera un existente, sino su existencia construida. Lo que reiterará en la construcción del continuo matemático, de la estructura de grupo...

La potencia del espíritu que se sabe capaz de reiterar una acción supone la existencia de un a priori en el matemático, no trascendente sino resultado de la evolución y de la adaptación de la especie humana sobre la Tierra. Reiterar los pasos al andar es afirmar lo que quiere decir ese a priori en la Aritmética para Poincaré.

Esa irreducibilidad implica que el razonamiento matemático posee un poder constructivo, creador que lo diferencia radicalmente de la Lógica formal, sea de la clásica o de la moderna apoyadas en el principio de identidad.

Pero si el razonamiento matemático es autónomo respecto a la Lógica, Poincaré mantendrá una vieja posición: por lógica se demuestra, por intuición se inventa. La lógica, cuando se aplica correctamente, es segura pero estéril porque sus juicios son analíticos y no proporcionan conocimiento alguno.

La intuición posibilita la invención porque es sintética, creadora. Pero puede conducir a equivocaciones como muestra la identificación, mantenida desde el origen del Análisis matemático, entre continuidad y diferenciabilidad, rota tras la aparición de las funciones continuas sin derivada en ninguno de sus puntos, o de la función construida por Peano en la cual la curva representativa de la función llena un cuadrado.

Ahora bien, si es por lógica como se demuestra, resulta que la propia demostración lógica requiere de la intuición porque no es lo mismo una simple verificación, proceso sintáctico estrictamente formal, maquinal, que una auténtica demostración. En sus palabras

> La verificación difiere precisamente de la verdadera demostración, porque es puramente analítica y porque es estéril. (CH,60)

Verificación sintáctica que se puede hacer imposible cuando lo que está en juego es una infinidad de pasos. Sólo la inducción completa permite pasar de lo finito a lo infinito, franquear en lo demostrativo tantas etapas como se quiera.

La diferencia entre una auténtica demostración y una verificación se encuentra también en otros puntos: en la derivación sintáctica hay que seguir los pasos establecidos por unas reglas dadas de antemano, pero es la intuición la única que permite indicar qué reglas hay que aplicar en cada ocasión así como el camino a seguir. La lógica no sólo es estéril sino ciega y requiere, en su propia aplicación, de la intuición creadora.

Además, ir paso a paso verificando si se cumplen las reglas de derivación no nos da la clave del teorema, de su demostración. Tanto para la construcción de la demostración como para su posterior reelaboración o para su comprensión, para la captación de la idea directora de la misma se exige algo que la Lógicano puede dar: en la demostración el matemático va guiado no por la Lógicasino por la intuición de aquello que quiere demostrar o resolver.

La demostración matemática posee un contenido imprescindible y no puede reducirse a un enfoque sintáctico, formal. Con metáfora de Poincaré: la demostración no es una máquina de salchichas en cuya entrada se mete el cerdo entero y la ristra o sucesión de salchichas sale, toda, bien ordenada... Constituye un auténtico mecanismo creador y frente al criterio común de los lógicos, el punto de partida de toda demostración es, precisamente, lo que aparece como final en la ristra derivativa.

La lógica es segura, pero ciega y lo que importa es la comprensión de lo que se demuestra. Comprensión sólo captable por el sujeto, por el matemático que atiende al contenido de lo que hace. Por atenderlo posibilita la analogía con otros campos, pero también el *ajá* de la intuición o idea feliz. Con lo cual también hay aumento de conocimiento que se logra no porque esté contenido en los axiomas y a partir de ellos se haga ver en la deducción final sino por profundización en los contenidos, por analogías...

La neutralidad de la Lógica no posibilita dotar de esas notas de comprensión y de aumento de contenido al hacer matemático. En el 2º Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 en París y bajo el título *Del papel de la intuición y de la lógica en matemáticas* (VC, cap. I) insistirá con rotundidad

> El lógico descompone cada demostración en un gran número de operaciones elementales; cuando haya examinado esas operaciones una tras otra y haya comprobado que cada una de ellas es correcta, ¿creerá haber comprendido el verdadero sentido de la demostración? ¿Lo habrá comprendido incluso cuando, por un esfuerzo de memoria, sea capaz de repetir esa demostración reproduciendo todas las operaciones elementales en el mismo sentido en el que las habría situado el inventor? Evidentemente no, no poseemos la entera realidad, ese no sé qué que hace la unidad de la demostración se nos escapará completamente. (VC,26)

Poincaré agrega la metáfora de comprender una partida de ajedrez: algo que va más allá de verificar que cada jugador ha cumplido, en cada momento, las reglas del juego; esa verificación no aclara por qué se ha movido una pieza en lugar de otra. Comprender la partida es saber por qué cada jugador ha movido tal pieza en lugar de tal otra, cuando ambos movimientos cumplían las reglas. Comprender

> es percibir la razón íntima que hace de esa serie de pasos sucesivosuna clase de todo organizado. (VC,27)

Y si esta es la facultad de comprender una demostración ya hecha, Poincaré agrega

> con mayor razón esta facultad es necesaria al jugador mismo, es decir, al inventor. (VC,27)

Inventor que, en su trabajo, hace crecer el conocimiento de manera inseparable a su actividad, a su modo de conocer. Apoyado en la intuición que no puede ser sustituida por la Lógica porque ésta nada dice de cuál es el camino que lleva al fin, a la meta. Y

> la facultad que nos enseña a verla es la intuición. (CH,101)

insistirá en 1904, en *Lés Définitions générales en Mathématiques* (CM, bajo el título *Las definiciones matemáticas y la enseñanza*).

3. El continuo

Si el objeto propio del pensamiento matemático es el número natural, la experiencia ha obligado a construir el continuo. Para Poincaré, que aquí hace un auténtico estudio de epistemología genética, esta construcción está condicionada por tres factores básicos: la intuición geométrica perceptiva, el deseo de superar las contradicciones y el entorno en el que ha surgido y evolucionado la especie humana, como señala en 1893, en *El continuo matemático* (CH, cap. II).

La intuición matemática no puede prescindir de lo geométrico y, con ello, de la magnitud continua porque la especie humana vive en un cosmos de formas geométricas, de cuerpos rígidos en movimiento, bien entendido que el cuerpo humano es uno de esos cuerpos rígidos y, además, se sabe de antemano que la materia que concebimos como constitutiva de los cuerpos es infinitamente divisible. Es decir, lo que perceptivamente captamos es el continuo ofrecido por la naturaleza y que es, de alguna manera, una unidad aunque infinitamente divisible; y también captamos la existencia de cuerpos aproximadamente rígidos. El continuo percibido es lo que califica de *continuo físico.*

La especie humana se ha visto obligada a crear el continuo matemático para superar las contradicciones que origina el continuo físico que se apoya únicamente en lo perceptivo. Esbozo uno de los ejemplos que da Poincaré para establecer su concepción:

Si se comparan tres pesos A, B y C dos a dos, puede ocurrir que no se distingan los pesos A y B,por lo cual se puede afirmar $A = B$. De modo análogo, al comparar B y C puede ocurrir que tampoco quepa distinguirlos nítidamente,por lo cual $B = C$. Pero al comparar A y C aparece una diferencia entre ambos, por lo cual $A \neq C$. Aparece una contradicción con la idea de que cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. Para superarla, se intercalan más elementos entre los tres dados y ese proceso puede iterarse indefinidamente. Al iterar el proceso de intercalación se llega a la noción de un continuo lineal, denso.

Se tiene, así, la densidad establecida por la reiteración de la división, de intercalar elementos hasta el infinito. Pero estas notas no bastan, sin embargo, para alcanzar la noción del continuo matemático ya que la recta racional satisface también esas dos condiciones. Se reitera el proceso de agregar elementos, en este caso los puntos de las divisiones que son indivisibles, marcas para diferenciar las partes y así se alcanza el continuo matemático, el definido por los más recientes geómetras

> y que no es más que una multiplicidad de elementos, en número infinito, pero exteriores los unos a los otros y por así decir lógicamente discretos

escribe en *Cournot y los Principios del Cálculo Infinitesimal* en 1905 (UP, 187).

La noción de continuo matemático es, para Poincaré, una de las grandes construcciones matemáticas diferente a la Aritmética y al Álgebra. Pero, y es esencial, el continuo como dato intuido es ontológicamente anterior al continuo discreto ya que,

> El punto no preexiste a la línea, sino la línea al punto. (UP,74).

Poincaré mantiene nítida la diferencia entre un continuo lógicamente discreto, simbólico, cuyos elementos son los números reales y un continuo perceptivo, geométrico o, en sus palabras, *lineal*. Irreducibles uno al otro. El continuo matemático es una construcción conceptual en la cual los números reales son símbolos que indican la partición de los números racionales, la posición de un punto en una figura, la recta. Símbolos que pueden ser alcanzados mediante las cortaduras de Dedekind, por ejemplo, que en su postulado de continuidad refleja la intuición de la línea recta, la intuición geométrica subyacente. Por su lado, el continuo perceptivo representa la magnitud continua y, como tal, mantiene el principio de homogeneidad de que el todo permanezca semejante a la parte.

Generalizando esta construcción, el matemático construye el continuo de n dimensiones donde un punto se define por un sistema de n cantidades distintas, sus coordenadas. Generalización que se puede continuar y da paso a los infinitésimoscomo ha puesto de relieve Du Boys Reymond.

Son continuos independientes, en cualquier caso, de la medida. La métrica se introduce posteriormente aunque existan ramas de la geometría, como el *Analysis situs* donde tal introducción es irrelevante porque en ella se tienen relaciones como "estar entre" y lo que importa es saber si B está entre A y C en un arco de curva y no si AB es igual que BC.

4. Los Grupos, las Geometrías, los Espacios

Si en 1895 había escrito

> la geometría no tiene por única razón de ser la descripción inmediata de los cuerpos que caen bajo nuestros sentidos, es ante todo el estudio analítico de un grupo.

en 1898 reafirmará que la noción de grupo constituye un principio sintético a priori. Como el de inducción completa, la noción de grupo no es resultado de un razonamiento analítico, ni puede reducirse a un juicio analítico. No es resultado de la experiencia, sino que el individuo, en forma potencial, posee un cierto número de modelos de grupo y la experiencia es la que da la ocasión para aplicar esa potencialidad, tomar conciencia de la misma y, a la vez, ayudar a descubrir cuál es el grupo que, en cada ocasión, se aparta menos de la realidad.

En la Tierra hay cuerpos casi-sólidos que se desplazan pero también cambian de estado. En su desplazamiento, en la reiteración de sus cambios de posición, los cuerpos casi-sólidos permanecen invariantes. Compensando esos movimientos, el individuo ha llegado a formar en su organismo la estructura formal de grupo, tanto continuo como discreto. En particular, ha llegado a establecer un grupo especial, el grupo de desplazamientos. Como escribe en *La noción de espacio*

> He mostrado en **Ciencia e Hipótesis** el papel preponderante jugado por los movimientos de nuestro cuerpo en la génesis de la noción de espacio. Para un ser completamente inmóvil, no habría espacio, ni geometría. (VC, cap. III, § 5)

Y no lo habría porque no tendría medio alguno para diferenciar los cambios de posición de los cambios de estado. Distinción que es la que conlleva la noción de desplazamiento y, con ella, la de grupo y geometría. Bien entendido que, lo mismo que en el caso de la inducción completa, en el espíritu humano aquí en la Tierra: un ser que habitara en otro lugar como en un mundo gelatinoso donde las condiciones hubieran sido diferentes habría llegado, por selección natural, a asumir otras formas potenciales, otros principios sintéticos a priori para sobrevivir, como especie, en dichos lugares y según las condiciones de los mismos.

A partir de su formación, el grupo se convierte en una forma a priori de la intuición. Y la Geometría es, precisamente, el estudio de las propiedades formales de algunos grupos continuos mientras que el espacio es la materialización de una determinada geometría.

En primer lugar —histórica y genéticamente— el hombre ha construido el espacio métrico euclídeo tridimensional. Un espacio que es homogéneo y, consecuentemente, infinito, ilimitado, isótropo... Propiedades que, por supuesto, no se dan en el espacio representativo, en el sensible. El espacio sensible nada tiene en común con el espacio geométrico y no puede servir como categoría para nuestras representaciones –nueva diferencia con Kant–.

El hombre ha construido geometrías métricas no-euclídeas y otras no métricas como la proyectiva pero también la topología, el analysis situs. La construcción del modelo del disco en 1880 —y que no sólo demuestra la consistencia relativa de la geometría hiperbólica— le lleva a admitir que todas las geometrías son equivalentes. La pregunta, inmediata, se centra en la elección de una de ellas para la caracterización del espacio. La respuesta de Poincaré es nítida: preguntar por la verdad de la geometría carece de sentido, lo mismo que es absurdo preguntar por si el sistema métrico decimal es verdadero y los demás falsos, o si el sistema de coordenadas cartesiano es verdadero y el polar es falso. La geometría no es, para Poincaré, una ciencia experimental entre otras cuestiones porque el espacio es una variedad amorfa a la que se puede dotar de una u otra geometría.

Si todas las geometrías son equivalentes y carece de sentido preguntar por la verdad de una u otra, resulta que nuestros movimientos en el entorno que nos rodea, la experiencia no sólo actual sino ancestral, de especie, nos convence que la geometría métrica euclídea es la más conveniente para manejarnos en este mundo, aquí en la Tierra y en un entorno estrictamente local y es, por ello, la más cómoda, la más útil. Por ello ha sido la primera en aparecer y, en cuanto a su utilidad y comodidad, seguirá manteniéndose como privilegiada frente a las restantes.

Hay otras razones para preferir la geometría euclídea. Una de ellas, su simplicidad que se manifiesta en que el grupo euclídeo posee un subgrupo invariante, el de las traslaciones, que no poseen otras geometrías. Además, la curvatura correspondiente a su espacio es constante e igual a cero, lo cual simplifica los cálculos.

A razones como las anteriores, Poincaré agrega otra: la educación. Hemos sido educados en un mundo euclídeo y nuestras concepciones son, por ello, euclídeas. Se podría alcanzar, con esfuerzo y trabajo sin duda, otro tipo de representación, incluso la de un espacio cuatridimensional. El darwinismo del matemático francés se hace, de esta manera, evolucionismo social.

5. Existencia matemática, axiomas, no-contradicción

Si la Matemática aparece como una construcción de la razón humana cabe preguntar a qué calificar existencia matemática. Y Poincaré, en este punto, será claro. En **Ciencia e Hipótesis** afirmará que existir es ser posible y, en el lenguaje de los geómetras, de los matemáticos, ser posible significa simplemente estar exento de contradicción. Como el objeto matemático es una construcción de la razón humana, su existencia se centra en su posibilidad, en su coherencia.

En el ensayo citado de *Las definiciones generales* en 1904, afirma

> Toda definición implica un axioma, puesto que afirma la existencia de lo definido. La definición no estará entonces justificada, desde el punto de vista puramente lógico, hasta que no se haya demostrado que no entraña contradicción alguna, ni en los términos ni en las verdades anteriores admitidas. (CM, 102)

Afirmaciones que han llevado a acusar a Poincaré de incoherente porque parece adoptar la posición formalista. Sin embargo estas afirmaciones no implican, en modo alguno, una posición formalista en la cual la no—contradicción de la definición entraña la existencia del objeto definido. Me basta subrayar las palabras *desde el punto de vista puramente lógico* y he tratado de precisar lo que esto implica para el pensamiento de Poincaré. Continúo la lectura de los párrafos que siguen a la cita anterior:

> Pero no basta con esto; la definición nos es presentada como convención. (id.)

Lo que hay que buscar es cómo se ha construido esa definición, a qué necesidad responde, qué papel va a desarrollar y, sobre todo, su génesis que impida ser tomada como convención arbitraria. Hay que preguntarse

> ¿Hay en la naturaleza algún objeto familiar que sea, por así decir, la imagen indecisa y grosera? (CM, 103)

Y todavía no es suficiente, hay que explicar el nombre elegido, el tipo de analogías que han guiado esa elección y si se da nombre igual a cosas que sólo difieren por la materia. No basta, una vez más, para Poincaré, el sólo enfoque lógico formal.

Para un constructivista es lo dado lo que no es contradictorio, es coherente porque está dado. La consistencia es condición necesaria de la existencia pero no suficiente. Puede, en un momento dado, demostrarse la no-contradicción de una definición, pero ello no implica que lo definido sea un existente. Para que se cumpla esta condición hay que dar una realización, un modelo, de lo definido. Es lo que le conduce a criticar las axiomáticas formales no avaladas por el dato o por la construcción de un modelo, de una realización, por lo cual son construcciones formales vacías. No hay, en Poincaré, posición formalista a pesar de su insistencia en que el matemático trata con la forma, no con la materia y así maneja la noción formal de grupo, no sólo unos grupos particulares.

La Geometría se ha presentado siempre, desde Euclides, como una teoría proposicional axiomática: a partir de unos axiomas se obtienen, deductivamente, los teoremas que establecen las propiedades básicas del espacio considerado. La pregunta, entonces, es por el papel que tienen los axiomas geométricos. Para Poincaré, y de modo tajante, no son juicios sintéticos a priori como la inducción completa o la noción de grupo. Pero tampoco juicios analíticos ni generalizaciones de la experiencia. Los axiomas geométricos son definiciones disfrazadas o convenciones.

La idea de desplazamiento y con ella la noción de grupo es la que juega un papel preponderante en la génesis de la geometría euclídea y se encuentra subyacente en la formulación de los axiomas implícitos euclídeos que utiliza sin enunciar. En 1898 escribe en *Des Fodements de la Géometrie*:

> En resumen, el principal fundamento de las demostraciones de Euclides es realmente la existencia del grupo y sus propiedades.

Hay axiomas que parecen difíciles de referir a la noción de grupo. Así, el que emplean algunos geómetras cuando definen la línea recta como la distancia más corta entre dos puntos.

> *Pero son precisamente los axiomas de esta naturaleza los que enuncia Euclides.* (id. Subr. del autor)

Lo cual, para Poincaré, equivale a que los axiomas enunciados son resultado de una experiencia más reciente mientras que los implícitos han sido asimilados por todos con mucha anterioridad. En sus palabras

> La noción de grupo existía antes que las restantes. (id.)

Y se adopta como axioma una proposición como la anterior porque no es más que la definición disfrazada de línea recta. Lo mismo ocurre con los demás axiomas que son convenciones o definiciones disfrazadas de la igualdad de figuras, de forma, distancia...

6. La Matemática, un hacer que cambia; psicología del matemático

La Matemática no está constituida de una vez para siempre, por lo cual no puede obtenerse de unos primeros principios ya dados, sino que esos principios surgen a lo largo del tiempo, aunque puedan encontrarse, en potencia, en el espíritu humano. Un hacer abierto cuyo único fundamento se encuentra en aquél que la construye, en la razón humana, siempre condicionado por la experiencia que es el motor último para obligar, por decirlo así, a esta creación.

Lo expresará claramente en 1898 al notar la diferencia entre la geometría de Staudt y la de Euclides. La primera, una geometría visual mientras que la segunda es sobre todo muscular. En la génesis de ambas las experiencias inconscientes de los movimientos del ojo y del cuerpo han tenido su papel, pero no han sido suficientes. De lo contrario, lo mismo que hubo un Euclides hubiera surgido un Apolonio que habría descubierto las propiedades de las polares sin esperar a Staudt,

> Pero esto no hubiera ocurrido más que mucho tiempo después que los progresos de la ciencia hubieran hecho comprender lo que es una longitud o un ángulo.(id,27)

y la Geometría proyectiva ha tenido que aguardar al siglo XIX para su construcción.

Construcción donde la razón matemática no se manifiesta de modo uniforme, único. Poincaré encuentra dos tipos de matemáticos: *analistas* o lógicos, que dan prioridad al rigor deductivo y *geómetras* o intuitivos que se apoyan, en su trabajo, en la intuición. Es diferencia que no se debe a las disciplinas a las que cada matemático se dedica sino, básicamente, a las cualidades que aportan en su trabajo: un enfoque deductivo o uno intuitivo como apunta en 1900, en *La intuición y la lógica en matemáticas* (VC, cap. I), donde afirma

> Se nace matemático, no se hace, y también parece que se nace geómetra, o que se nace analista. (VC, 12)

Como ejemplo de matemático intuitivo, Riemann y quizá él mismo porque insistirá, de modo permanente en

> Nuestra necesidad de pensar en imágenes. (CM, 102)

Como ejemplo de analista puro, Weiertrass. Aun en este caso Poincaré insistirá en que también el analista ha de servirse de la intuición que le guíe en su trabajo, una intuición que, en este caso, se apoya en la analogía.

En 1908 dará un estudio ejemplar en *La invención matemática* (CM, I,III) donde cuenta su experiencia de cómo llegó al enlace de las funciones meromorfas con la geometría lobachevskiana, y constituye un aporte original sobre el modo de descubrimiento o invención matemática con el papel del sueño y el trabajo inconsciente en la misma. Para Poincaré tanto el trabajo matemático como el de pensamiento sobre ese mismo trabajo exige, siempre, de un enlace entre lo psicológico y la crítica reflexiva. Enlace que posteriormente le llevará a establecer que

> No hay lógica ni epistemología independiente de la psicología. (UP,31)
>
> Es decir, independiente de un sujeto que es quien hace lógica y epistemología.
>
> La distinción entre analistas o lógicos y geómetras o intuitivos cambia cuando en lugar de hablar de las cualidades personales, los matemáticos enfocan el problema ontológico: en este caso los escinde en *pragmáticos* y *realistas.* Los pragmatistaspragmáticos

—que opone a los cantorianos o realistas en sentido platónico— son los que adoptan

> El punto de vista del sentido común... consideran que un objeto no existe más que cuando es pensado, y que no se sabría concebir un objeto pensado independientemente de un sujeto pensante. (UP,94)

Para Poincaré, como constructivista, no existe un mundo eidético independiente al pensamiento humano que haya que descubrir sino un mundo conceptual construido por el hombre.

3. Y las nuevas ideas

Hasta aquí he tratado de exponer alguna de las ideas centrales de Poincaré. Pero no está solo y el Hacer matemático ha sufrido unos cambios profundos en los últimos tiempos. A estas ideas se van a oponer otros matemáticos, otras escuelas. Oposición también en su concepción de la ciencia, de lo que estimar su convencionalismo. Poincaré intervendrá en defensa de sus convicciones y analizará, con radical libertad, las de los demás.

Los diferentes frentes del pensamiento matemático

En el pensamiento matemático los frentes que se le presentan a Poincaré en 1902, y que expone al hacer la crítica a **Fundamentos de la Geometría** de Hilbert de 1899, son cuatro:

a. Ampliación del concepto de número. No ya de los imaginarios que ha supuesto una ampliación absoluta del Análisis, sino de objetos considerados como números impensables en otros momentos —hasta los polinomios, las matrices se pueden enfocar como números simplemente porque cumplen las leyes formales...—.

b. Crítica sobre las operaciones de la Aritmética: la propiedad conmutativa no es, ya, fundamental con lo que se ha logrado una revolución del mismo tipo a la provocada por Lobachevski en la Geometría.

c. La manera de concebir el infinito se ha modificado: Cantor ha hecho ver que se pueden distinguir grados en el infinito. Por otro lado la noción de continuo se ha analizado y reducido a sus elementos, se ha discretizado.

d. Los matemáticos italianos, con Peano y Padoa, tratan de crear un simbolismo lógico universal y reducir el razonamiento matemático a reglas puramente mecánicas.

De estas concepciones hay tres básicas que supondrán el enfrentamiento con las ideas del matemático francés: el método axiomático y el formalismo, el cantorismo o teoría de conjuntos y el logicismo o corriente pasigráfica.

1. El método axiomático como definición; el fundamentalismo formalista

El método axiomático formal lo representa Hilbert. En 1899 publica **Fundamentos de la Geometría**. Poincaré hará una crítica, muy cortés pero muy dura, a este enfoque en 1902.

El punto de partida de Hilbert es adoptar tres sistemas de elementos que, en principio, son de naturaleza cualquiera aunque los denomine puntos, rectas, planos. Punto de partida, por ello, que se quiere radicalmente formal: no importa la naturaleza de los objetos que se manejen, sino sus relaciones establecidas en una serie de axiomas. Si los elementos no tienen por qué ser geométricos, ¿por qué elegir unos axiomas con nombre geométrico y que reflejan relaciones geométricas? En el fondo, esos axiomas y elementos se eligen porque la geometría está ahí y se trata, en todo caso, de una traducción encubierta de formalismo. Hilbert adopta como axiomas, como definiciones disfrazadas, las propiedades geométricas que quiere, a la vez, ocultar.

Naturalmente, formulados los axiomas hay que demostrar que constituyen un sistema consistente. Lo cual ya se sabe de antemano dirá Poincaré. Y se sabe de antemano porque la geometría está ahí. Hilbert establece, como no podía ser de otra manera, una prueba de consistencia relativa mediante la construcción de un modelo: el dado por la geometría analítica y de esta manera es el Análisis el que, en última instancia, se convierte en el garante de dicha no-contradicción.

Es un instrumento que posibilita, a la vez, establecer la independencia de cada uno de los axiomas mediante la elaboración de sistemas numéricos con lo cualHilbert llega a construir geometrías no-pascalianas, no-arguesianas, no-arquimedianas... Con un problema, la clasificación de dichas geometrías entre las cuales no aparece una de las construidas por Poincaré, años antes, la geometría de dos dimensiones que corresponde a un hiperboloide de una hoja. Una clasificación que, por todo ello, no aparece muy clara.

En cualquier caso observa Poincaré que Hilbert parece querer ocultar un hecho: que cada una de las geometrías construidas no es otra cosa, en el fondo, que el estudio de unos grupos de transformaciones y precisamente las propiedades comunes a esos grupos limitan el capricho de los inventores de geometrías. El método axiomático proposicional enmascara, radicalmente, este hecho.

Además las preguntas básicas de quien se ocupa de los fundamentos de la Geometría son para Poincaré

> ¿Cuáles son los principios fundamentales de la geometría, cuál es su origen, naturaleza y contenido? (UP,161)

quedan como cuestiones totalmente excluidas lo mismo que se oculta que los axiomas son las definiciones disfrazadas del auténtico ser geométrico, de la noción de grupo. Por eso, en la conclusión, escribe

> Hilbert parece más bien disimular esas aproximaciones, no sé por qué. Sólo parece interesarle el punto de vista lógico. Dada una sucesión de proposiciones, constata que todas se deducen lógicamente de la primera. ¿Cuál es el fundamento de esta primera proposición, cuál es el origen psicológico? No se ocupa. (..) Los axiomas están puestos, no se sabe de dónde salen.
>
> Su obra es por ello incompleta, pero no es una crítica la que le dirijo. Incompleta, es necesario resignarse a serlo. Basta que haya hecho hacer a la filosofía de las matemáticas un progreso considerable comparable a los que se deben a Lobachevski, Riemann, Helmholtz y Lie. (UP,184)

Es una incompletitud inherente al enfoque lógico-formal que pretende olvidar el contenido del Hacer matemático y reducir la Matemática a un juego de verificación lógica. Juego sólo válido si, en el fondo, es la traducción de un hacer ya realizado. Y hay que precisar que el manejo de la definición por postulados o implícita es válido siempre querefleje adecuadamente lo definido como en el caso de la caracterización de la noción de grupo: no es contradictoria porque el grupo preexiste. Es el paso siguiente, el de la formalización por la formalización, con el que mostrará su desacuerdo.

En 1908 Zermelo publica su axiomatización de la Teoría de conjuntos. Poincaré vuelve a mantener su posición, acompañada, ahora, de su crítica general al cantorismo. Las preguntas al enfoque de Zermelo, las de siempre: origen de los axiomas, su posible arbitrariedad, su independencia; si reflejan toda la teoría intuitiva o es incompleta. Y agrega una nota, la del redil y el lobo. La teoría de conjuntos de Cantor ha dado paso a paradojas o antinomias. Zermelo ha acotado el tamaño de los conjuntos y mediante el cerco de sus axiomas ha creado un sistema en el que las paradojas conocidas han desaparecido. Zermelo ha hecho como el pastor con sus ovejas, las ha llevado al redil para protegerlas de los lobos, ¿no ha metido, también, el lobo? ¿Se está seguro de que no aparecerán más paradojas en el futuro? La única posibilidad para asegurar que esto no ocurra es demostrar que los axiomas son no-contradictorios. Y esto es algo que Zermelo no ha hecho ni, para Poincaré, puede hacer.

Zermelo reconoce que, de modo efectivo, no ha conseguido esa demostración. El problema se centra en que la demostración de consistencia directa es imposible. Y la relativa obliga construir un modelo equivalente, un modelo conjuntista, lo cual no parece, en estos momentos, factible —Gödel conseguirá, posteriormente, tal modelo "interno"—. Y en este caso, ¿qué define, si es que define algo, la axiomática de Zermelo? Aquí interviene la afirmación que se ha interpretado tan erróneamente, como ya he dicho, de Poincaré: existir es ser posible y ser posible es estar exento de contradicción. Es lo que exige a una posición extremada como la de Zermelo para que la misma no se quede, radicalmente, en un mero acto de fe.

Por otro lado, Poincaré mantiene su convicción de que hay axiomas que son impredicativos —en concreto lo es el de separación— y originarán, a corto o largo plazo, paradojas. La respuesta de Zermelo es afirmar que el impredicativismo no es la causa de las paradojas y que, en todo caso, es inocuo ya que, en contraataque, indicará a Poincaré que hay proposiciones aceptadas por todos los matemáticos que son impredicativas: el teorema fundamental del álgebra, en concreto. A ello el matemático francés intentará dar una demostración predicativa de este teorema fundamental.

Tanto la axiomática de Hilbert como la de Zermelo, aunque pretenden manejar el método de definición implícita, axiomática o por postulados, parten de una teoría previamente existente y se limitan, realmente, a organizarla. Son, en el fondo, axiomatizaciones semánticas aunque Hilbert pretenda un papel de carácter más formal. Este papel le lleva a elaborar una versión de *Fundamentos de Lógica y Aritmética* en 1904 —3 CIM—. Acepta que la Lógica y la Aritmética tienen que ser fundamentadas de modo independiente entre sí, frente a una posición como la logicista. Va más allá y acepta el signo y su reiteración como apoyatura última para fundamentar la aritmética. Desde estos supuestos trata de justificar el principio básico de la Aritmética, la inducción completa cuando plantea y pretende resolver la consistencia de la Aritmética.

La crítica de Poincaré es muy clara en este último punto y lo hace en sus ensayos *Matemática y lógica* de 1905 y 1906 y *A propósito de la logística* de 1906, que incluirá modificados en **Ciencia y Método**. Encuentra que en el ensayo de Hilbert se mezclan dos tipos de inducción completa que Hilbert no ha visto, porque en el ensayo hay dos planos: una construcción sígnica finita puramente matemática en la cual se encuentra un principio de inducción completa de hecho que se aplica a las sucesiones intuitivas de signos o de sucesiones de signos perceptibles —aunque Hilbert se niegue a reconocer este hecho—; y un plano representado por un supuesto sistema formal en el cual la inducción completa aparece como axioma. La demostración de la consistencia de este sistema formal podría justificar el segundo principio, el tomado ahora como axioma pero según Poincaré nunca al primero.

Pero es que en ese intento de demostrar la consistencia, al no poder dar un objeto que satisfaga el sistema de axiomas como definición implícita, ha de intentarlo de modo directo. El esquema demostrativo sugerido parece atenerse a lo siguiente: si al cabo de n inferencias no se ha producido contradicción, y entonces se demuestra que en la inferencia $n+1$ tampoco, el sistema será consistente. Razonamiento que, para Poincaré, constituye un círculo vicioso porque emplea la inducción completa para demostrar que el sistema con esa inducción completa es consistente. La pretendida fundamentación hilbertiana queda, por ello, en el aire. Además, el primer principio de inducción, aun aplicado a la construcción sígnica finitista se le muestra a Poincaré tan fuerte como el enunciado simplemente como axioma.

En su crítica Poincaré esboza la existencia de dos niveles en el proyecto de Hilbert: uno, que se puede calificar de matemática finitista apoyado en el signo ideográfico; y otro —que posteriormente Hilbert, cuando asuma este hecho, calificará de metamatemática— apoyado en el sistema formal axiomático. Un proyecto en dos niveles en el cual la inducción completa, a pesar de lo pretendido por Hilbert sigue siendo esencial y necesario como se ve en el hecho de que el mismo Hilbert, como matemático, lo utiliza aunque no vea este hecho.

Es una crítica que se aplica también a los intentos de la pasigrafía de

Peano, de los logicistas como Russell y Couturat cuando pretenden derivar la inducción completa de principios lógicos, del sistema formal como el de Peano o su formulación en la pasigrafía logicista. Intentar reducir la matemática a la Lógica está condenado, de antemano, al fracaso. La Lógica, sea la clásica, sea la logística, además de ciega es estéril o, como mucho, lo que procura es la aparición de antinomias, de paradojas. Como había afirmado ya en 1904, en *Las definiciones matemáticas*

> La lógica algunas veces engendra monstruos. (CM, 98)

2. Las paradojas: Impredicativismo e Infinito

Al estudio de las paradojas hay que dedicar un tiempo. Como el médico ante el síntoma de una enfermedad: hay que estudiar la causa de la misma para poder procurar el remedio adecuado. Poincaré estudia la paradoja de Richard y después la de Cantor, la de Burali-Forti. [En la primera establece unas precisiones en la formulación original de Richard —no es conjunto sino sucesión el constituido por la sucesión de fórmulas matemáticas, como una fórmula puede ser definida de varias maneras basta elegir la primera en orden lexicográfico—.]

En su estudio diagnostica que una de las causas de las paradojas se centra en el manejo del Círculo Vicioso o impredicativismo —término acuñado, como reconoce Poincaré, por Russell al aceptar el Círculo Vicioso como la causa de las antinomias cuando pasa a elaborar su teoría de tipos—. El método de la diagonal es impredicativo ya que al definir un elemento que no figura en la enumeración, ese elemento definido se refiere a la totalidad de los elementos de dicha enumeración, en la cual ya debería estar incluido dicho elemento. Es lo que también ocurre con el teorema de Cantor donde se realiza una aplicación de un conjunto en su conjunto potencia donde ese conjunto ya está dado.

Poincaré establece dos caracterizaciones del Círculo Vicioso. Por una parte

> E es el conjunto de todos los números que se pueden definir en un número finito de palabras, sin introducir el propio conjunto E. Sin esta restricción la definición de E contendrá un círculo vicioso; *no se puede definir el conjunto E a través del conjunto E mismo.*(CM,146)

Y, por otra

> La definición de un conjunto ha de ser tal que agregándole más elementos al universo bajo consideración el conjunto no cambie. (CM,146)

En la primera definición, el conjunto E se considera, ya, dado en su totalidad; en la segunda, el conjunto puede ir ampliándose ilimitadamente. Punto en el que interviene otro elemento decisivo: Poincaré va a señalar que existe una confusión total con el término infinito. Cuando se habla de "todos" aparece esa confusión porque no se distingue entre infinito actual y potencial; y es un cuantificador universal, que tiene sentido cuando se aplica a conjuntos finitos y potencialmente infinitos, no cuando se aplica a conjuntos infinitos en acto. Logicistas y cantorianos han olvidado que el infinito en acto no existe y por ello han caído en antinomias. El único infinito es un infinito en devenir, el potencial y, en él, no se tiene derecho a realizar una definición en términos de sus elementos como si estuvieran dados en acto: la definición sería, entonces, impredicativa. Como un conjunto en devenir sólo puede ser el potencial, no tiene sentido definir un elemento en términos de todo el conjunto.

La paradoja de Richard también hace ver, lo mismo que la admisión de conjuntos transfinitos, la existencia de elementos que jamás podrán ser nombrados porque el ser humano, el matemático, que es quien hace la matemática, es un ser finito y bien finito y no podrá manejar un número infinito de palabras. De aquí que Poincaré llegue a reclamar, más como programa que como realización sistemática, la elaboración de una matemática predicativa radicalmente finitista. En *La lógica del infinito* de 1909 (UP, cap. I) después de afirmar que la Lógica no es otra cosa que el estudio de las clasificaciones, propone atenerse, en la práctica matemática, a reglas como las siguientes:

1. No considerar nunca más que objetos susceptibles de ser definidos por un número finito de palabras;

2. No perder de vista nunca que toda proposición sobre el infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado de proposiciones sobre lo finito;

3. Evitar las clasificaciones y las definiciones impredicativas.

Y avanza, además, una idea que será clave posteriormente:

> Toda propiedad de los números infinitos no es más que la traducción de una propiedad de los números finitos; es esta ultima la que podrá ser evidente, mientras que será necesario demostrar la primera comparándola con la última, mostrando que la traducción es correcta. (UP,29)

En otras palabras, hay una matemática que se pudiera considerar ideal, la que utiliza el término infinito, que tiene que ser comparada con la finitista y demostrar que la traducción es correcta. En sus palabras

> Todo teorema sobre los números infinitos o sobre todo de lo que llaman conjuntos infinitos, o cardinales transfinitos, u ordinales transfinitos, etc., etc., no puede ser más que una manera abreviada de enunciar proposiciones sobre los números finitos. Si no el teorema no es verificable y si no es verificable, no tendrá sentido alguno. (UP, cap. I)

Programa que rechaza las totalidades infinitas en acto, conjuntos de infinitos elementos cerrado desde el principio, porque ninguna proposición concerniente a las colecciones infinitas puede ser evidente por la intuición.

3. Ontologías diferentes: constructivismo y cantorismo; consecuencias para la inducción completa

En su análisis crítico de las antinomias Poincaré se enfrenta, de modo radical, con lo que califica de cantorismo, con la ontología subyacente a los teóricos conjuntistas, bien entendido que no con la Teoría de conjuntos. Para Poincaré hay que partir de unos elementos básicos construidos por la razón pero motivados por la experiencia. Esos elementos básicos, primarios e irreducibles —aquí en la Tierra y en el tipo de entorno en el que se ha desarrollado la especie humana— son el número natural, la iteración y, con ella, la inducción completa como juicio sintético a priori.

El cantorismo adopta una ontologización diferente. Como elementos base, irreducibles y primarios, conjunto y aplicación y, con ellos, equinumericidad e isomorfismo. Es Zermelo quien explicita claramente esta ontologización en sus ensayos de defensa ante las críticas a su axiomatización por parte de Poincaré y ante las críticas recibidas desde 1904 por su formulación y manejo del axioma de elección. Cito a Zermelo:

> Para mí, todo teorema que se enuncia para números finitos no es otra cosa que un teorema sobre los *conjuntos finitos.* (1907, p. 150)

Consecuentemente,el principio de inducción completa deja de ser juicio sintético a priori y aparece como Teorema. Una de sus formas, teorema III, es la siguiente

> Sea una proposición demostrada por un lado para todo conjunto que contiene un solo elemento y, por otro lado, para un conjunto finito cualquiera siempre que sea verdadera para este conjunto menos uno de sus elementos, entonces la proposición es verdadera para todos los conjuntos finitos. He aquí lo que se llama razonamiento de n a $n+1$. (1907, p. 151)

Concepción en la que insistirá, posteriormente,

> Si uno quiere basar la aritmética sobre la teoría de los números naturales como numerales finitos, entonces debe tratar con la definición de conjuntos finitos. Porque el numeral es conforme a su naturaleza una propiedad de un conjunto y toda proposición acerca de numerales finitos puede expresarse siempre como una proposición acerca de conjuntos finitos. (UP,153)

Con lo cual, la sucesión de los números naturales puede venir dada por la de los conjuntos finitos $\{\}$, $\{\{\}\}$, $\{\{\{\}\}\}$ y así sucesivamente.

Desde el cantorismo, los números son redundantes, marcas o convenciones sígnicas que permiten rescribir las proposiciones sobre conjuntos, equinumericidad e isomorfismo. Lo único existente son los conjuntos. Más aún, los conjuntos infinitos que son el fundamento de las "verdaderas matemáticas" (1907, p. 156) y de los cuales se desgajan los conjuntos finitos mediante la definición de Dedekind, por ejemplo.

Es claro que, desde esta concepción, ¿qué ocurre con las aplicaciones prácticas de la matemática, aplicaciones en las cuales se tenga que integrar una ecuación diferencial, por ejemplo, o resolver una ecuación? ¿Se dará como respuesta que el valor de una función numérica es un conjunto? Serían preguntas propias de Poincaré. Para él, la base numérica es bastante más clara que la conjuntista que, además, da paso a antinomias.

Desde el cantorismo el número natural, el cardinal, aparece como una propiedad que poseen todos los conjuntos que son equinuméricos con un conjunto dado. Así, el cardinal uno es la propiedad —el conjunto, si toda propiedad bien definida caracteriza un conjunto como pretende Zermelo— que tienen en común *todos* los conjuntos equinuméricos o biyectivos con el conjunto que posee un único elemento. Poincaré ha criticado esta definición, que hace suya el logicismo, indicando que se tiene, en ella, un círculo vicioso.

La respuesta a esta crítica ha sido y es, desde siempre, muy dura con Poincaré acusándole de no ver la diferencia entre uso y mención de unos términos y que carece de cualquier tipo de apreciación lógica. No hay confusión en Poincaré sino en quienes le critican desde una posición opuesta y con lenguaje que manifiesta que la ontología de base es diferente. Es el punto de partida el que está en juego: para el cantorismo y el logicismo, el conjunto y la aplicación, la extensión de conceptos y la relación entre esas extensiones; para Poincaré, el número natural, la iteración y la inducción completa y, por ello, la propia noción de conjunto hay que establecerla dando cada uno de sus elementos, dando una ley por la cual se construyan cada uno de los mismos. La unidad, aparece como concepto primario anterior a la noción de conjunto y con esa unidad y su reiteración, aparece el número como objeto natural, primario; después, el conjunto.

En esta línea, la pretensión de cantorianos y logicistas de intentar una fundamentación ya definitiva e inamovible del Hacer matemático como si ya estuviera dado y de una vez por todas, se le muestra en la línea de los *profetas de desdichas* que, afortunadamente, han fracasado siempre indicará Poincaré. Un Hacer matemático que siempre conseguirá ir avanzando, transformándose. Su fundamento es la razón humana que es quien lo construye.

4. La Matemática no tiene por misión mirarse el ombligo

Y vuelvo al comienzo... Poincaré asiste en 1908 en Roma al IV Congreso Internacional de Matemáticos. Ante todos los matemáticos —cantorianos, formalistas axiomatizadores, logicistas y pasigráficos que sólo se centran en la "matemática pura"— Poincaré vuelve a insistir: la matemática no tiene como objetivo mirarse el ombligo. Como tema, *El porvenir de las matemáticas*, que incluye en **Ciencia y Método**. Frente al pesimismo de quienes repetían que todos los problemas susceptibles de ser resueltos ya lo habían sido, frente a quienes creen haber realizado el inventario de todos los problemas que pueden ser resueltos, Poincaré va a establecer

> los problemas insolubles se han convertido en los más interesantes de todos, se han planteado nuevos problemas en que ni siquiera se había soñado. (CM, 23)

Es respuesta, indirecta, al inventario de 23 problemas de Hilbert, a su afirmación de que todo problema es resoluble, a su separación de Matemática y sus aplicaciones. En cualquier caso, aparece nuevamente la fe en que el Hacer matemático es una producción de la razón humana y, por ello, no está dado de una vez para siempre, ni todos los problemas están resueltos, ni hay inventarios cerrados y, además, los problemas más interesantes son aquellos para los cuales, en principio, no hay solución. La razón no está clausurada y el Hacer matemático se apoya en la intuición, en la analogía. Analogía que no se da por el lado del rigor formal donde las verificaciones pierden la apariencia de armonía que es clave para su comprensión.

Insiste en los fines que asignara al Hacer matemático en 1900. Reconoce

> Nuestra ciencia confina a la vez con la filosofía y con la física, y es para estos dos vecinos para quienes trabajamos. (CM, 31)

No sólo se trata de ayudar a clarificar temas como los de espacio, tiempo, número, sino que el lado filosófico supone una autorreflexión crítica porque

> cavilar sobre ella misma es reflexionar sobre el espíritu humano que la ha creado. (id.)

Ahora bien,

> es al lado opuesto, al de la naturaleza, al que hace falta dirigir el grueso de nuestro ejército. (id.)

Es a la búsqueda de solución a los problemas que se plantean desde la física, desde la ingeniería hacia la que debe centrar su mayor esfuerzo el matemático. Una búsqueda de respuestas que ni siquiera están disponibles. Como a veces la solución no se logra de manera directa habrá que intentar la búsqueda de soluciones cualitativas y sólo después intentar un enfoque cuantitativo aunque no sea más que hasta cierto nivel de aproximación. Y ello porque

> No hay problemas resueltos y otros que no lo están, sólo hay problemas más o menos resueltos. (CM,33)

Como ejemplo, la serie de potencias que converge tan lentamente que su cálculo es impracticable,por lo cual sólo se logra demostrar la posibilidad del problema. Subyacente, su creación de la teoría de sistemas dinámicos con el estudio de las funciones "cualitativas" con las que enfrentarse a los problemas que plantea el comportamiento de tales sistemas.

La geometría, a pesar de los ataques que ha sufrido, sigue teniendo un interés intrínseco y debe ser empleada como lenguaje precioso para expresar las cuestiones analíticas y algebraicas. La geometría permite sugerir problemas que, si se quiere, son algebraicos o analíticos por esencia, pero que no se hubieran planteado en el interior del análisis sin ese aporte geométrico. Y ahí se encontraría la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales y su papel en la Mecánica celeste; la clave posterior para la Geometrización de la Teoría de la relatividad, del campo unificado... La tensión cuantitativo-cualitativo también se manifiesta en lo geométrico, donde la Topología es, básicamente, cualitativa y la Topología, para Poincaré, constituye una de las bases del Hacer matemático al igual que la Teoría de grupos, para él —y para la Matemática del s. XX— auténticos elementos organizadores del pensamiento creador matemático.

Y eran temas no incluidos en los inventarios al uso...

Permítanme finalizar con unas palabras de Poincaré. Para él, la ciencia tiene como objetivo alcanzar el conocimiento de las relaciones formales, estructurales entre los fenómenos y no decir cuál es la sustancia de esos fenómenos. Y sólo hay un medio para ese conocimiento, la razón. **El valor de la ciencia** termina con estas palabras:

Sólo por la ciencia y por el arte valen las civilizaciones (...) Todo lo que no es pensado es la pura nada, ya que no podemos pensar más que el pensamiento y todas las palabras de que disponemos para hablar de las cosas no pueden expresar más que pensamientos; decir que hay otra cosa en el pensamiento es, pues, una afirmación que no puede tener sentido.

Y sin embargo —extraña contradicción para quienes creen en el tiempo— la historia geológica nos muestra que la vida es sólo un corto episodio entre dos eternidades de muerte y que, en ese episodio mismo, el pensamiento consciente no ha durado y no durará más que un momento. El pensamiento no es más que un relámpago en medio de una larga noche.

Pero es este relámpago el que es todo.

Notas bibliográficas

Las citas de Poincaré están tomadas de:

CH: **Ciencia e Hipótesis**. Ed. Espasa Calpe, Madrid 2002. Estudio preliminar, Javier de Lorenzo.

VC: **La valeur de la science**. Flammarion, París 1948. Hay traducción españolaen Espasa Calpe.

CM: **Ciencia y Método**. Espasa Calpe, Madrid 1963.

UP: **Dernières pensées**. Flammarion París 1963. Corresponde a la ed. de 1926. Hay traducción españolaen Espasa Calpe sin los 4 ensayos incluidos en la ed. francesa.

Las de los ensayos

1898: *Des Fondements de la Géométrie*

1905: *Cournot et les Principes du Calcul Infinitesimal*

1909: *Le libre examen en matiére scientifique*

han sido tomadas de **L'Opportunisme scientifique**, editado por Laurent Rollet, Birkhäuser 2002.

Las citas de

Zermelo 1907: *Sur les ensembles finis et le Principe de l'induction Complète*, publicado en **Acta Matematica** en 1909,

han sido tomadas de

G. Heinzmann (ed.): **Poincaré, Russell, Zermelo et Peano**. Blanchard, París 1986.

Gray 2003: **El reto de Hilbert**. Ed. Crítica, M. 2003.

Algunos libros de referencia:

De Lorenzo, Javier: **La filosofía de la matemática de Poincaré**. Tecnos, Madrid 1974.

Greffe, Heinzman, Lorenz (eds.). **Henri Poincaré. Science et Philosophie**. Congreso internacional sobre la obra de H.P. Verlag–Blanchard, 1996.

Rollet, Laurent: **Ecrits sur Henri Poincaré**. ACERHP, Univ. Nancy, s.a. (1994).

Schmid, Anne-Franqise: **Henri Poincaré, Les sciences et la philosophie**. L'Harmattan, París 2001.