EMMY NOETHER I L'ÀLGEBRA COMMUTATIVA

SANTIAGO ZARZUELA ARMENGOU

Resum. Emmy Noether representa un punt d'inflexió fonamental en el desenvolupament de l'Àlgebra Commutativa. En ella conflueixen, per una banda, algunes de les línies evolutives prèvies més importants d'aquesta branca de les Matemàtiques. Per altra, a partir del seu treball i, sobretot, de la influència de la seva manera de pensar i treballar les Matemàtiques, l'Àlgebra Commutativa va prendre la volada necessària per convertir-se en una àrea de recerca amb gran vitalitat.

En aquest treball revisarem aquesta evolució centrant-nos en el paper exercit per Emmy Noether en tot aquest procés, explicant alguns dels resultats per ella obtinguts.

1. Introducció

Emmy Noether
22 de març de 1882 (Erlangen)
14 d'abril de 1935 (Bryn Mawr)

El treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa constitueix un punt d'inflexió fonamental en l'evolució de l'Àlgebra Commutativa, fins al punt que sovint és esmentada com a una de les creadores de l'Àlgebra Commutativa moderna. Els motius per aquest reconeixement són diversos: la seva recerca en aquest camp és en part el resultat de la confluència d'algunes de les línies d'investigació prèvies més importants al voltant dels problemes que finalment haurien de configurar el camp de recerca de l'Àlgebra Commutativa moderna. També va obtenir alguns resultats que formen part dels fonaments de la matèria, d'aquells que s'expliquen als primers capítols de qualsevol introducció a l'Àlgebra Commutativa i que apareixen a la majoria dels manuals generals d'Àlgebra avançada. No obstant, la seva dedicació a aquesta matèria va ser relativament curta en el temps, amb un nombre de treballs limitat. En efecte, Hubert Flenner [7] cita, d'entre totes les publicacions d'Emmy Noether, exactament nou com els treballs que es poden considerar contribucions a l'Àlgebra Commutativa, concretament [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], amb un primer treball publicat l'any 1920 i un darrer l'any 1927; i d'aquestes nou publicacions, les fonamentals són en realitat els dos treballs [14, 18], publicats respectivament els anys 1921 i 1924. A més, en certa manera també es podria afirmar que els resultats que va obtenir ja eren d'alguna forma coneguts per casos particulars, i també que molts dels conceptes que va utilitzar havien ja estat introduïts en versions restringides per autors anteriors. Val a dir que possiblement ella mateixa ho reconeix així, quan afirma sovint que *Das steht alles schon by Dedekind*: Richard Dedekind (1831-1916) va ser el matemàtic per qui va tenir una admiració més gran i de qui va publicar conjuntament amb Robert Fricke i Öystein Ore l'obra completa comentada [4] entre els anys 1930 i 1932.

Richard Dedekind

Així doncs, què fa que la figura d'Emmy Noether i l'Àlgebra Commutativa siguin considerades gairebé com a inseparables? Al meu parer, és la manera de pensar i treballar les Matemàtiques d'Emmy Noether el què ha impregnat profundament aquesta àrea de recerca, possiblement com a cap altra dels camps en què ella es va interessar. Tot aquell que en algun moment s'hagi apropat a l'Àlgebra Commutativa, pot reconèixer en el seu conegut comentari

> *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objecten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind*[1]

un dels trets distintius de la metodologia de treball d'aquesta branca de les Matemàtiques. A banda, els estudiants i col·laboradors d'Emmy Noether van contribuir de forma decisiva a que el seu pensament fos ràpidament reconegut i assimilat arreu. Així, el text *Moderne Algebra* de Bartel L. Van der Waerden (1903-1996), que va revolucionar l'aprenentatge de l'Àlgebra des del moment de la seva primera publicació en alemany l'any 1930, conté en el seu segon volum i gairebé de forma literal el treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa. Val a dir que del llibre s'han anat publicant noves edicions i traduccions de forma successiva, la darrera l'any 1991 [25], i que la seva lectura avui en

[1]Totes les relacions entre nombres, funcions i operacions esdevenen clares, generalitzables i veritablement fructíferes només quan són aïllades dels seus objectes particulars i reduïdes a conceptes generals.

dia és encara ben fresca i aconsellable. A més, d'altres col·laboradors, com ara i especialment Wolfgang Krull (1899-1971), varen portar endavant un programa de recerca profund i ambiciós essencialment basat en l'enfocament donat per Emmy Noether a l'Àlgebra Commutativa, de gran repercussió en altres àrees com la Geometria Algebraica o la Teoria Algebraica de Nombres.

Wolfgang Krull i Bartel L. Van der Waerden

En aquest treball revisarem el paper fonamental que Emmy Noether va tenir en el desenvolupament de l'Àlgebra Commutativa, descrivint en primer lloc alguns dels antecedents directament relacionats amb el seu treball, concretament de la Teoria Algebraica de Nombres, la Geometria Algebraica i la Teoria d'Invariants. Posteriorment, explicarem amb un cert detall alguns dels resultats fonamentals que ella va provar en aquest camp, en particular el conegut Teorema de descomposició primària d'ideals. Finalment, veurem com alguns conceptes relacionats amb les idees que ella va introduir han estat objecte de recerca fins el moment actual. Concretament, veurem com les anomenades potències simbòliques d'un ideal tenen un paper fonamental en problemes com ara el 14 de Hilbert o el darrer Teorema de Fermat.

La revisió que fem en aquest treball de les contribucions d'Emmy Noether a l'Àlgebra Commutativa no pretén ser exhaustiva i es basa en un punt de vista personal. Tampoc busca descriure la influència que els seus treballs en aquest camp han tingut en altres àrees de les Matemàtiques, com ara especialment la Geometria Algebraica, a la que està dedicat el treball de Raquel Mallavibarrena en aquest mateix volum. Val a dir que la bibliografia al voltant de la vida i obra d'Emmy Noether és extensa i són nombrosos els treballs que analitzen la seva influència en el desenvolupament de les Matemàtiques, i en concret de l'Àlgebra Commutativa. Així, d'entre altres, he tret un bon profit de llegir el treball ja esmentat de Hubert Flenner [7] o el de Pilar Carrasco [3]. També del capítol dedicat a l'Àlgebra Commutativa i la Teoria Algebraica de Nombres de Nicolas Bourbaki [1] i dels diferents articles continguts als llibres editats respectivament per Mina Teicher [24] i Bhama Srinivisan i Judith Sally [22]. La primera biografia completa d'Emmy Noether va ser publicada en alemany l'any 1970 per Auguste Dick i traduïda a l'anglès l'any 1981 [5]: té la virtut de que l'autora encara va poder entrevistar-se i obtenir testimoni directe de diversos col·laboradors i col·legues de la pròpia Emmy Noether. La recent biografia de David Blanco [2] és una aproximació completa i rigorosa, al mateix temps que literària, a la vida d'Emmy Noether i les seves circumstàncies. Per últim, i com passa sovint amb els grans matemàtics, la lectura directa dels treballs d'Emmy Noether és potser la millor forma d'aproximar-se a la seva obra. L'edició completa dels seus treballs va ser feta per Nathan Jacobson l'any 1983 [11].

El present treball és la versió escrita de la xerrada que l'autor va impartir el 18 de febrer de 2009 a la Jornada Noether que va tenir lloc a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya. L'autor agraeix a la Comissió Noether per haver-lo convidat a donar a aquesta xerrada. També a la Dra. Teresa Cortadellas per les diverses lectures realitzades, tant de la xerrada con del treball, i pels seus comentaris, sempre valuosos i interessants.

2. Àlgebra Commutativa abans d'Emmy Noether

En aquesta secció descriurem a grans trets alguns dels resultats precedents directament relacionats amb el treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa, especialment els relacionats amb la Teoria Algebraica de Nombres, la Geometria Algebraica i la Teoria d'Invariants. La nostra pretensió és tan sols emmarcar adequadament el seu treball en aquesta àrea.

2.1. **Nombres algebraics.** El teorema fonamental de l'Aritmètica, demostrat per Euclides, afirma que donat qualsevol nombre natural $n \neq 0, 1$ es pot descompondre de forma única com a producte de nombres primers (o irreductibles), és a dir, de nombres que no es poden descompondre de forma no trivial com a producte d'altres nombres naturals:

$$n = p_1 \cdots p_r$$

Aquesta propietat s'estén a tots el nombres enters diferents d'1 i -1, encara que ara haurem d'entendre que la descomposició és única excepte producte per qualsevol de les dues unitats. Això és el que enunciem com que l'anell dels nombres enters és factorial.

Karl F. Gauss (1777-1855), en el seu estudi al 1832 dels residus biquadràtics, va observar que aquesta propietat també es verifica per altres conjunts de nombres. Concretament, va considerar el conjunt de nombres complexos de la forma

$$a + b\sqrt{-1}\,, a, b \in \mathbb{Z}\,,$$

els enters de Gauss, i va comprovar que tant la suma com el producte de nombres d'aquest tipus tornava a ser de la mateixa forma, i que verifiquen propietats similars a les del conjunt de nombres enters. A més, va provar que admeten una descomposició única (excepte producte per unitats: $1, -1, i, -i$ en aquest cas) com a producte d'altres enters de Gauss irreductibles. Per exemple, $2 + i, 2 - i$ són irreductibles i $5 = (2+i)(2-i)$; també, $1-i$ és irreductible i $2 = i(1-i)^2$ (observem que 5 i 2 deixen de ser irreductibles en aquest conjunt). En definitiva, l'anell dels enters de Gauss és factorial. La teoria de divisibilitat en aquest conjunt de nombres és aleshores l'eina fonamental que Gauss utilitza en el seu estudi dels residus biquadràtics.


Leonhardt Euler i Karl F. Gauss

L'interès per saber quan conjunts de nombres complexos similars als enters de Gauss tenen les mateixes propietats que els nombres enters està estretament relacionada amb el darrer Teorema de Fermat. El cas és que Leonhard Euler (1707-1783) va donar una primera demostració errònia de la no existència de solucions enteres no trivials per a l'equació cúbica

$$x^3 + y^3 = z^3$$

basant-se (sense dir-ho explícitament) en el fet (*erroni*) de que el conjunt de nombres de la forma $a + b\sqrt{3}$, amb a i b enters, es comporta de *forma similar* al conjunt dels nombres enters. Però encara hi tenen un paper més important els conjunts d'enters ciclotòmics. Per a $n \geq 2$, sigui ξ una arrel primitiva n-èsima de la unitat, és a dir, una arrel tal que totes les altres arrels n-èsimes de la unitat són potències de ξ (per exemple, $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$). Podem aleshores considerar el conjunt de nombres de la forma

$$a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1}\,, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

Aquest conjunt de nombres, anomenats enters ciclotòmics (d'odre n), té algunes propietas similars a les del conjunt dels enters: per exemple, si sumem o multipliquem dos enters ciclotòmics d'ordre n obtenim un enter ciclotòmic d'ordre n. Es podria pensar aleshores que també verifiquen la propietat de factorialitat. Si això fos cert per a tot primer n més gran que 2, aleshores s'en podria deduir el darrer Teorema de Fermat. De fet, això és el que Gabriel Lamé (1795-1870) va donar per bo en la demostració que va presentar a la Acadèmia de Paris el 1847. Joseph Liouville (1809-1882), que hi era present, va posar en dubte el fet de que els conjunts de nombres ciclotòmics verifiquessin la factorialitat, encara que no va poder donar un contraexemple. No obstant, tant Lamé com altres matemàtics francesos (Augustin L. Cauchy (1789-1857) entre ells) es van esforçar en provar- ho fins que, poc temps després, el mateix Liouville va anunciar que Ernst Kummer (1810-1893) havia trobat que per $n = 37$ no es verificava la factorialitat (de fet, Kummer ja ho havia provat alguns anys enrere).


Gabriel Lamé i Joseph Liouville

Kummer va portar endavant un llarg programa d'estudi dels enters ciclotòmics. Un dels objectius era desenvolupar una teoria de la divisibilitat en aquests conjunts que fos similar a la dels enters naturals. Per altra banda, la manca de la factorialitat estava lligada a una propietat fonamental dels nombres enters: la principalitat. Donats dos nombres enters a, b, el conjunt d'enters que podem obtenir com a combinació lineal d'a i b, és a dir, els enters de la forma $\lambda a + \mu b$, amb λ i μ enters arbitraris, coincideix amb el conjunt dels múltiples del màxim comú divisor d'a i b. Però en aquells conjunts d'enters ciclotòmics on no es verificava la factorialitat això resultava no ser veritat, és a dir, donats dos enters ciclotòmics d'ordre n, en general les seves combinacions lineals a coeficients altres enters ciclotòmics d'ordre n no són els múltiples d'un cert enter ciclotòmic d'ordre n. La idea de Kummer va ser aleshores definir uns nous nombres, als que anomenaria ideals. Es tractaria de desenvolupar una teoria de nombres ideals similar a la dels nombres enters, amb un teorema de factorització única en producte de primers.

Ernst Kummer

Les definicions que va introduir Kummer no eren del tot satisfactòries i no es varen apreciar en tot el seu sentit fins l'esdeveniment de la teoria de valoracions. Aleshores, i sense entrar en detalls de les contribucions del mateix Kummer a la teoria de nombres ideals i d'altres matemàtics del moment (Leopold Kronecker (1823-1891), per exemple), va ser Dedekind qui d'alguna forma va completar el programa iniciat per Kummer. En primer lloc, Dedekind considera els conjunts d'enters algebraics. Recordem que d'un nombre complex α es diu que és un enter algebraic si és arrel d'un polinomi mònic a coeficients enters. Aleshores, donat un cos de nombres, és a dir una extensió finita F de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$, el conjunt d'enters algebraics de F és tancat per les operacions suma i producte. Per exemple, el conjunt dels enters ciclotòmics d'ordre n és el conjunt dels enters algebraics del cos ciclotòmic $C_n = Q(\xi)$. Al contrari, el conjunt dels elements de la forma $a + b\sqrt{-3}\,, a, b \in \mathbb{Z}$, no és el conjunt dels enters algebraics del cos de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, ja que el nombre $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ és arrel del polinomi mónic $x^2 + x + 1$.

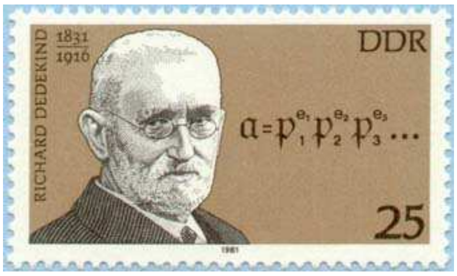
En un tal conjunt d'enters algebraics A, Dedekind defineix els ideals d'A com aquells conjunts que es poden obtenir com a combinacions lineals d'una familia finita $a_1, \ldots, a_n$ d'elements del conjunt A:

$$I = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\,, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in A\}$$

Aquest és l'ideal generat per la familia $a_1, \ldots, a_n$ (A és també un ideal, generat per 1, i $\{0\}$ és l'ideal generat per 0). Tot definint aleshores un producte d'ideals i la noció d'ideal primer, demostra que tot ideal diferent d'A i $\{0\}$ és pot escriure de forma única com a producte d'ideals primers (no necessàriament diferents):

$$I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$$

En el cas que el conjunt d'enters algebraics és factorial, aquesta descomposició recupera la donada per la mateixa factorialitat.



El Teorema de factorització de Dedekind

Tot això ho va desenvolupar Dedekind en la que es considera la seva obra més important, el Suplement XI al llibre de Dirichlet sobre la Teoria de Nombres. Emmy Noether coneixia molt be aquest resultats, doncs com ja hem comentat a la introducció va ser una de les editores de la obra completa Dedekind.

2.2. **Teoria d'invariants algebraics.** La teoria d'invariants algebraics va ser un camp de recerca molt actiu a la segona meitat del segle XIX. Un dels problemes fonamentals d'aquesta teoria era la determinació dels invariants de les formes (polinomis homogenis) n-àries (en n variables) de grau k a coeficients complexos. Així, les formes binàries d'ordre 2 són les formes quadràtiques en dues variables:

$$F = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2\,, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$$

Donat un grup G que actua linealment sobre les variables, es tracta de trobar expressions polinòmiques en els coeficients de la forma que són invariants per l'acció del grup sobre la forma. Per exemple, si $G = SL(2,\mathbb{C})$ (matrius invertibles amb determinat 1 a coeficients complexos), el discriminant de F

$$\Delta(F) = a_1^2 - 4a_0a_2$$

es invariant per l'acció de G sobre F. Per la seva importància en la geometria projectiva, l'acció dels grups $SL(n,\mathbb{C})$ sobre les formes n-àries era la que es considerava més bàsica.

Una de les fites més importants de la teoria d'invariants a finals del segle XIX va ser la obtinguda per Paul Gordan (1837-1912) en descriure mitjançant un algorisme explícit tots els invariants algebraics de las formes binàries de qualsevol grau. En particular, va provar que un nombre finit d'invariants era suficient per generar polinòmicament tots els altres, en definitiva, va trobar una base finita dels invariants. Gordan era sovint esmentat com *el rei dels invariants*.

Paul Gordan

Emmy Noether va ser alumna de Gordan, el qual li va dirigir la tesi doctoral defensada a Erlangen el 1907. En ella, Noether estudia el problema dels invariants de les formes ternaries de grau 4 i n'obté una base a la manera computacional d'en Gordan, descrivint explícitament els 331 invariants de la base.

No obstant, alguns anys enrera, la teoria d'invariants algebraics havia estat completament capgirada per David Hilbert (1862-1943). En un treball publicat el 1890, considerat per molts com un dels més importants de la història de l'Àlgebra, Hilbert va provar el caràcter finit dels sistemes d'invariants algebraics per a qualsevol forma de qualsevol grau. Els mètodes utilitzats per Hilbert eren tant diferents dels algorísmics i computacionals de Gordan que es diu que aquest va comentar sobre el treball que *allò era Teologia, no Matemàtiques.* La demostració donada per Hilbert era existencial i els mètodes purament conceptuals. No obstant, el propi Hilbert, davant les crítiques d'alguns col·leges, va mostrar en un segon treball el 1893 com aplicar els seus mètodes per trobar explícitament tots els invariants.

Només cal llistar alguns dels resultats enunciats per Hilbert en aquest dos treballs per donar una idea de la seva importància: Teorema de la base, Teorema de les sizigies, Funció de Hilbert i la seva racionalitat, Teorema del zeros. Recordem l'enunciat de Hilbert del Teorema de la base, per la seva importància en el treball posterior d'Emmy Noether: sigui $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$ un successió infinita de formes en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Aleshores existeix sempre un enter m tal que cada forma de la successió es pot expressar com

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}_1\mathcal{F}_1 + \mathcal{A}_2\mathcal{F}_2 + \cdots + \mathcal{A}_m\mathcal{F}_m\,,$$

on $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m$ són formes adequades en les mateixes n variables.

David Hilbert

Per demostrar el caràcter finit dels sistemes d'invariants algebraics, Hilbert resol per $SL(n, \mathbb{C})$ un problema de caire una mica diferent i que es pot formular en general de la manera següent: quan els polinomis en n variables a coeficients complexos (o també amb coeficients a altres cossos) invariants sota l'acció lineal d'un grup donat que opera sobre les variables es poden generar finitament? Recordem un exemple clàssic: el polinomis simètrics.

El grup simètric S_n actua de forma natural sobre els polinomis en n variables a coeficients complexos permutant les variables. Un polinomi $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots x_n]$ es diu que és invariant per l'acció del grup simètric si el resultat de fer actuar qualsevol permutació sobre les variables és el mateix polinomi; és a dir, si per a tot $\sigma \in S_n$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

Per exemple, els polinomis de la forma

$$\begin{aligned}
e_0(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= 1,\\
e_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \textstyle\sum_{1\le j\le n} x_j,\\
e_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \textstyle\sum_{1\le j<k\le n} x_j x_k,\\
e_3(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \textstyle\sum_{1\le j<k<l\le n} x_j x_k x_l,\\
&\cdots\\
e_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

Són els anomenats polinomis simètrics elementals. Així, el que sovint es coneix com a Teorema de Newton assegura que tots els polinomis simètrics es poden expressar de forma única com a polinomis a coeficients complexos en els polinomis simètrics elementals. En definitiva, $e_1,\ldots,e_n$ són $\mathbb{C}$ algebraicament independents i

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{S_n} = \mathbb{C}[e_1,\ldots,e_n]$$

A més, el conjunt del polinomis de $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ es pot generar finitament a partir $\mathbb{C}[e_1,\ldots,e_n]$.

Emmy Noether s'introdueix en els mètodes de Hilbert de la mà d'Ernst Fischer (1875-1954), successor de Gordan a Erlangen. Fischer va influir notablement en l'evolució de la manera de treballar les Matemàtiques d'Emmy Noether i la seva relació científica va durar molts anys. A banda, malgrat que la mateixa Emmy Noether no tenia gaire bona opinió de la seva pròpia tesi doctoral sobre teoria d'invariants, posteriorment va obtenir alguns resultats importants a la manera de Hilbert, particularment en el cas de grups finits. Va demostrar concretament que el conjunt de polinomis en n variables a coeficients a k, un cos qualsevol, que són invariants per l'acció lineal d'un grup finit, admet generació finita i va trobar una fita superior del nombre de generadors i els seus graus en termes del cardinal de G (fita de Noether). A més, va provar que $k[x_1, \ldots, x_n]$ admet generació finita sobre els polinomis invariants per G. És en el decurs d'aquest treball on Emmy Noether enuncia i demostra el seus famós Lema de Normalització. En el cas dels nombres complexos, aquests resultats ja havien estat provats per Hilbert.

Ernst Fischer

2.3. **Geometria algebraica.** Max Noether (1844-1921), el pare d'Emmy, és considerat com un dels fundadors de la Geometria algebraica. De forma molt general, la Geometria algebraica estudia les propietats de les solucions dels sistemes d'equacions polinòmiques en qualsevol nombre de variables i qualsevol grau. Per exemple, el conjunt de punts de l'espai afí $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ que són solució d'un sistema d'equacions de la forma

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ F_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

amb $F_1, \ldots, F_r$ polinomis de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Si els polinomis són tots homogenis, també podem pensar les solucions com un conjunt de punts de l'espai projectiu $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$. S'anomenen genèricament varietats algebraiques (afins o projectives).

Max Noether

Un dels resultats més coneguts de Max Noether és l'anomenat "Teorema a + b". Sigui $H = \{h = 0\}$ una corba algebraica del pla projectiu (h serà un polinomi homogeni en tres variables) que conté l'intersecció de dues corbes algebraiques $F = \{f = 0\}$ i $G = \{g = 0\}$ (f i g són també polinomis homogenis en tres variables) sense components comuns (per tant, la intersecció és un nombre finit de punts). El teorema dona aleshores condicions suficients i necessàries per tal de que $h = af + bg$, amb a, b polinomis homogenis en tres variables. Són les anomenades condicions de Noether. (Observem que pel Teorema dels zeros de Hilbert, una potència de h si és d'aquesta forma.)

La generalització d'aquest resultat a dimensions superiors no és immediata. Per trobar una resposta final cal esperar al 1905, quan Emanuel Lasker (1868-1941) publica el seu resultat sobre descomposició primària d'ideals a l'anell de polinomis. Lasker, alumne de Hilbert i un dels jugadors d'escacs més importants de la història (en va ser campió del món del 1894 al 1921) va provar un resultat que de fet acabaria donant nom al corresponent d'Emmy Noether sobre descomposició primària.

Emanuel Lasker

Al conjunt de polinomis a coeficients en un cos no es pot esperar un resultat de descomposició com el provat per Dedekind pels conjunts d'enters algebraics. Per exemple, és senzill raonar que a $\mathbb{C}[x,y]$, l'ideal (x^2, xy) generat per x^2 i xy, és a dir, el conjunt de les combinacions lineals de la forma $fx^2 + gxy$, amb f i g polinomis de $\mathbb{C}[x,y]$, no és producte de dos ideals. En canvi, es té que

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x,y)^2$$

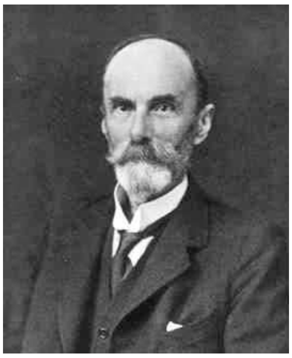
Lasker va provar aleshores que tot ideal I del conjunt de polinomis a coeficients en un cos (és a dir, el conjunt de combinacions lineals finites d'una familia de polinomis) es pot obtenir com l'intersecció finita d'una certa familia d'ideals $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_r$:

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

Aquests ideals són d'un tipus especial i s'anomenen components primàries de l'ideal: per exemple, (x) i $(x,y)^2$ són components primàries de (x^2, xy). En aquest cas, (x) és un ideal primer i $(x,y)^2$ és potència de l'ideal primer (x,y). No obstant, també es té que

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y)$$

i en aquest cas (x^2, y) és una component primària que no és potencia d'un ideal primer.



Francis S. Macaulay

Així doncs, Lasker va trobar una descomposició a la que va anomenar primària, però que no és única. El mètode de demostració utilitzat per Lasker era força complicat, essencialment basat en mètodes de Geometria Algebraica (descomposició de varietats algebraiques com a reunió de subvarietats algebraiques irreductibles) i de la Teoria de Resultants i d'Eliminació. Va provar també altres resultats, com per exemple d'unicitat de certes components primàries, que varen ser millor entesos i completats posteriorment per l'anglès Francis S. Macaulay (1862-1937). El treball de Macaulay, de gran influència a l'Àlgebra Commutativa contemporània i gairebé ignorat a l'Anglaterra del seu temps, va ser molt apreciat i reconegut per Emmy Noether i la seva escola.

3. El treball d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa

No volem fer una descripció sistemàtica de tots els treballs i resultats d'Emmy Noether en Àlgebra Commutativa. Donat que l'article [14] publicat l'any 1921 és considerat com el més important i el que ha tingut una major influència, la millor manera d'entendre la seva aportació fonamental és simplement explicant breument el contingut d'aquest treball. Si ho fem amb el llenguatge i a la manera actual, no hi ha de fet gaire diferència amb el que ella mateixa va escriure, potser estalviem una mica de notació i temps.

Bàsicament, el que fa és donar les bases per a un tractament axiomàtic i conceptual de la teoria dels anells commutatius i els seus ideals. Introdueix no tan sols les definicions i noms que fem servir avui en dia, sinó també els mètodes i procediments. L'objectiu era bàsicament obtenir un resultat que fos la generalització natural, per una banda, del treball de Dedekind sobre descomposició en producte de primers dels ideals d'un conjunt d'enters algebraics, i per altra del resultat de Lasker sobre descomposició primària d'ideals a l'anell de polinomis. Per fer-ho, es basa en l'anomenada condició de cadena ascendent dels ideals, que és equivalent a la condició de generació finita demostrada per Hilbert pels ideals d'un anell de polinomis. És per això que els anells que verifiquen aquesta condició (o en general, els objectes que verifiquen una condició d'aquesta mena) s'anomenen Noetherians. La condició es tant senzilla i a l'hora productiva, que serveix com indicador de la profunditat del pensament d'Emmy Noether.

Tots els treballs previs de Dedekind, Hilbert, Lasker i Macaulay són citats a l'article. També alguns treballs d'Adolf Fraenkel (1891-1965) publicats del 1914 al 1920 on es dóna una primera definició d'anell, així com el seu propi treball previ conjunt amb Werner Schmeidler [12], on es dóna la definició d'ideal i mòdul en un context d'àlgebres d'operadors diferencials. D'alguna forma, aquest treball conjunt amb Schmeidler es pot considerar a manera de preludi del que molt més tard serà la Teoria algebraica de D-mòduls.

Emmy Noether a la seva maduresa com a matemàtica

3.1. Un conjunt A (*sistema d'elements* $a, b, c, \dots, f, g, h, \dots$) es diu que és un anell commutatiu si té dues operacions internes, suma $(+)$ i producte $(\cdot)$, tals que tant la suma com el producte compleixen les propietats associativa i commutativa, es compleix la propietat distributiva, i existeix la resta, és a dir, donats elements a i b existeix un element x tal que $a+x=b$ (aleshores escrivim $x=b-a$). De l'existència de la resta s'en dedueix l'existència d'un element nul per la suma, que denotem per 0. Si a més existeix un element nul per al producte, diemque A és un anell unitari,

i l'element nul per al producte el denotem per 1. Per a nosaltres, els anells seran sempre unitaris. A més, direm que l'anell A és un domini d'integritat si quan el producte de dos element és 0, aleshores un dels dos elements és zero.

Per exemple, el conjunt del polinomis en n variables a coeficients en un cos o bé el conjunt d'enters algebraics d'un cos de nombres són dominis d'integritat.

3.2. Donat un anell A i un subconjunt I d'elements d'A direm que és un ideal si (1) per a qualsevol element a d'A i per a qualsevol element f de I, el producte $a{\cdot}f$ és de I, i (2) per a qualsevol elements f i g de I, la resta $f-g$ és de I. Donada una familia d'ideals $I_1, I_2, \ldots, I_r, \ldots$ es defineix la seva suma com el conjunt I d'elements de la forma $d = a_{i_1} + a_{i_2} \cdots + a_{i_n}$, on a_{i_j} és un element d'I_{i_j}. És un ideal que denotem per $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Donats elements $f_1, \ldots, f_r$ de l'anell A, denotem per $(f_1, \ldots, f_r)$ el conjunt d'elements de la forma $a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$, on $a_1, \ldots, a_r$ són elements qualsevol d'A. És un ideal, que s'anomena l'ideal generat per $f_1, \ldots, f_r$. Si un ideal I és d'aquesta forma direm que és finitament generat i que $f_1, \ldots, f_r$ és una base del ideal.

La següent condició caracteritza la generació finita de tot ideal d'un anell A.

Teorema 1 (**de la condició de cadena ascendent**). *Suposem que per a tota familia d'ideals de la forma $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r \subset \cdots$ existeix un n tal que $I_n = I_{n+1} = \cdots$ (condició de cadena ascendent). Aleshores, tot ideal és finit generat. Inversament, si tot ideal és finit generat, A verifica la condició de cadena ascendent.*

Així, els anells que verifiquen aquesta condició s'anomenen Noetherians. Per exemple, tot anell de polinomis en n variables a coeficients en un cos o bé l'anell d'enters d'un cos de nombres són Noetherians.

Una forma equivalent d'enunciar aquesta condició és mitjançant l'anomenada condició maximal: tota familia no buida d'ideals d'A té un element maximal.[2]

3.3. Donada una familia d'ideals $I_1, \ldots, I_r$, podem denotar per $I = [I_1, \ldots, I_r]$ el més petit ideal contingut a tot ells. Resulta que $[I_1, \ldots, I_r]$ és de fet igual a l'intersecció $I_1 \cap \cdots \cap I_r$ dels ideals. Direm que un ideal I és reductible si es pot obtenir com intersecció de dos ideals estrictament més grans. En cas contrari, diem que l'ideal és irreductible. El següent resultat afirma que tot ideal en un anell Noetherià es pot obtenir com a intersecció finita d'ideals irreductibles.

Teorema 2 (descomposició com a intersecció finita d'irreductibles)**.** *En un anell Noetherià A, tot ideal es pot obtenir com a intersecció d'un nombre finit d'ideals irreductibles.*

Potser val la pena de fer la demostració d'aquest resultat, per mostrar l'ús de la condició de cadena ascendent:

Suposem que no és així i sigui $\Omega \neq \emptyset$ la familia d'ideals que no verifiquen la condició. Aleshores, existeix un ideal I que és maximal en aquesta familia. Serà doncs intersecció de dos ideals estrictament més grans. Com I és maximal a Ω, aquest dos ideals no pertanyen a Ω i es poden obtenir cadascun d'ells com a intersecció d'un nombre finit d'ideals irreductibles. Ajuntant les dos interseccions resulta que I també es pot obtenir com a intersecció d'un nombre finit d'irreductibles, la qual cosa és contradictòria amb l'hipòtesi.

3.4. Un ideal $\mathfrak{q}$ d'un anell A es diu que és primari si donats dos elements a i b d'A tals que $a{\cdot}b$ pertany a $\mathfrak{q}$ i a no pertany a $\mathfrak{q}$, aleshores existeix un enter positiu n tal que b^n pertany a $\mathfrak{q}$. Si a més n ha de ser sempre 1, en diem que $\mathfrak{q}$ és un ideal primer. Donat un ideal primari $\mathfrak{q}$, el conjunt d'elements d'A tals que un potencia seva pertany a $\mathfrak{q}$ és un ideal primer $\mathfrak{p}$. Es diu que $\mathfrak{p}$ és l'ideal primer associat a $\mathfrak{q}$ i que $\mathfrak{q}$ és un ideal primari que pertany a $\mathfrak{p}$.

[2]Aquesta condició no la va fer servir directament Emmy Noether, encara que és latent en el seu treball. L'avantatge d'aquesta formulació equivalent de la condició de cadena ascendent és que simplifica alguns dels seus arguments.

Teorema 3 (els irreductibles són primaris). *En un anell Noetherià tot ideal irreductible és primari.*

La demostració d'aquest resultat és una nova mostra de l'us de la condició de cadena ascendent:

Sigui A un anell Noetherià i I un ideal irreductible d'A. Suposem que I no és primari: aleshores existeixen elements a i b tals que $a{\cdot}b$ pertany a I, a no pertany a I i cap potencia positiva de b no pertany a I. Per a qualsevol element c d'A, el conjunt d'elements x d'A tals que $x{\cdot}c$ pertany a I és un ideal que denotem per $I : c$. Així, tenim una cadena creixent d'ideals de la forma $I : b \subset I : b^2 \subset \cdots \subset I : b^r \subset \cdots$, i per la condició de cadena ascendent ha d'existir un k tal $I : b^k = I : b^{k+1}$. Aleshores, $I = (I, (a)) \cap (I, (b^k))$. En efecte, un element de la intersecció ha de ser, per una banda, de la forma $c = f + g{\cdot}b^k$, amb f un element de I. Però verifica també que $c{\cdot}b$ pertany a I, ja que per hipòtesi $a{\cdot}b$ pertany a I. Per tant, $f{\cdot}b + g{\cdot}b^{k+1}$ pertany a I i també $g{\cdot}b^{k+1}$ pertany a I. Així, $g{\cdot}b^k$ pertany a I i c pertany I. Com tots dos ideals contenen estrictament a I, obtenim que I no és irreductible, la qual cosa és una contradicció.

Teorema 4 (primer teorema de descomposició primària). *En un anell Noetherià tot ideal és intersecció d'un nombre finit d'ideals primaris.*

Ara podem ajuntar en un sol ideal la intersecció de tots els ideals primaris que tenen el mateix ideal primer associat. Resulta ser un nou ideal primari, amb aquest mateix primer com associat. Així, obtenim una descomposició de qualsevol ideal com a intersecció d'un nombre finit d'ideals primaris, tots ells amb primers associats diferents. Ara, aquesta descomposició té una propietat especial: cap dels ideal primaris que apareixen a la intersecció conté la intersecció dels altres. S'en diu aleshores que la descomposició és iredundant. Així, tot ideal té un descomposició iredundant com a intersecció d'ideals primaris.

Teorema 5 (**Teorema de descomposició primària en anells Noetherians**). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, tot ideal és intersecció irredundant d'un nombre finit d'ideals primaris: són les components primàries de l'ideal. Aquestes components primàries tenen totes ideals primers associats diferents.*

3.5. Considerem l'exemple tractat a la secció anterior: l'ideal $I = (x^2, xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$ admet com a descomposició primària irredundant

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, xy, y^2)$$

En aquest cas, les components primàries són (x), $(x^2, xy, y^2) = (x, y)^2$ i els ideals primers associats són (x), (x, y). Però també

$$(x^2, xy) = (x) \cap (x^2, y)$$

és una descomposició primària irredundant, amb components primàries (x), (x^2, y) amb ideals primers associats (x), (x, y).

Així doncs, la descomposició primària irredundant no és única. No obstant, si que es verifica el següent:

Teorema 6 (primer teorema d'unicitat). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, dues descomposicions primàries irredundants d'un mateix ideal tenen el mateix nombre de components primàries i els mateixos ideals primers associats a les components primàries.*

Aquest conjunt únic d'ideals primers s'anomena conjunt de primers associats. Òbviament, fan el paper dels divisors primers en un anell factorial i té una gran importància a la teoria d'ideals.

L'exemple anterior també mostra un fet que no es dóna en el cas dels anells factorials. Observem que els dos primers associats són comparables: $(x) \subset (x, y)$. Aquest fet és precisament el que d'alguna forma ocasiona la no unicitat de la descomposició primària irredundant. Direm que un primer associat a un ideal és immers si conté estrictament un altre primer associat. En cas contrari, direm que el primer associat és aïllat. Les components primaries que els tenen com associats reben el mateix nom. Així, (x, y) és un primer immers de (x^2, xy) i l'ideal (x^2, xy, y^2) una component primària immersa, mentre que (x) és un primer associat aïllat i (x^2) una component primària aïllada.

Teorema 7 (segon teorema d'unicitat). *Sigui A un anell Noetherià. Aleshores, les interseccions de components primàries que pertanyen a primers associats aïllats són úniques. En particular, les components primàries que pertanyen als ideals primers associats aïllats son úniques.*

Val a dir, que aquests dos teoremes d'unicitat són vàlids sense la condició Noetheriana, un cop es tingui un ideal que admet una descomposició primària irredundant. Els anells tals que tot ideal admet una descomposició primària s'en diuen de Lasker i han estat objecte d'una recerca continuada de cert interès.

3.6. Essencialment, tot l'anterior és el que Emmy Noether prova a [14]. Prova també que la teoria es pot aplicar als anells de polinomis i anells d'enters algebraics, i que es recupera així la teoria ja coneguda respectivament per Lasker i Dedekind. També dona indicacions de com estendre la teoria al marc més general dels mòduls.

És difícil imaginar com aquest treball va canviar la manera de pensar l'Àlgebra en aquells moments, tant acostumats com estem actualment a fer-ho així. Possiblement, l'única forma és llegir directament els treballs de Lasker o de Dedekind i comparar. Una revolució més recent del mateix estil que ens pot donar una idea és la produïda pel treball d'Alexander Grothendieck i la teoria d'esquemes. No obstant, també és cert que molts dels mètodes computacionals i algorismes de finals dels segle XIX i principis del XX han estat revisats i parcialment recuperats gràcies al desenvolupament recent de la Computació algebraica.

3.7. Dels altres treballs d'Emmy Noether en l'àmbit de l'Àlgebra Commutativa, [18] és possiblement el més citat. En ell, Noether completa d'alguna forma el programa sobre descomposició primària d'ideals al caracteritzar els anells on aquesta descomposició primària esdevé en realitat un producte d'ideals primers. Són els que seran posteriorment coneguts (per raons òbvies) com dominis de Dedekind. En el treball, es desenvolupa de forma sistemàtica la noció de dependència entera, completant el treball de Dedekind. També fa servir, entre d'altres, la condició de cadena descendent sobre els ideals (condició dual de la de cadena ascendent).

Si A és un domini d'integritat i K és el seu cos de fraccions, un element a de K es diu que és enter (sobre A) si és arrel d'un polinomi mònic a coeficients a A. El conjunt d'elements enters de K és un subanell de K, que s'anomena la clausura entera d'A (això no és un fet trivial). S'en diu que A és íntegrament tancat si la seva clausura entera és ell mateix, és a dir, si els únics elements enters de K són els d'A. Per exemple, $\mathbb{Z}$ (i en general qualsevol domini d'integritat que sigui factorial) és íntegrament tancat. La clausura entera funciona com una clausura, és dir, la clausura entera de la clausura entera és ella mateixa. El teorema provat per Emmy Noether és el següent:

Teorema 8. *Sigui A un anell (no necessariament unitari). Aleshores, tot ideal és producte de forma única d'ideals primers si, i només si, es verifiquen les següents condicions:*

(I) A verifica la condició de cadena ascendent.
(II) Mòdul qualsevol ideal no nul l'anell verifica la condició de cadena descendent.
(III) A és unitari.
(IV) A és un domini d'integritat.
(V) A és íntegrament tancat.

El anells de Dedekind tenen moltes altres caracteritzacions i una rica teoria, en un cert sentit com la primera classe d'anells després dels dominis d'ideals principals. Localment són dominis de valoració discreta, com els dominis d'ideals principals, però globalment no són necessàriament factorials. De fet, un anell de Dedekind és domini d'ideals principals si, i només si, és factorial. Ometent alguna de les condicions que els caracteritzen s'obtenen d'altres classes d'anells. Potser els més coneguts siguin els de Prüfer, que no verifiquen la condició Noetheriana. Val a dir que, en general, la clausura entera d'una domini Noetherià no és Noetheriana, i que aquesta és una condició difícil de verificar que ha proporcionat algunes de les pagines més interessants de l'història de l'Àlgebra Commutativa, en particular famosos i difícils contraexemples.

4. Potències simbòliques

El càlcul de la descomposició primària d'un ideal és difícil. Afortunadament, no és freqüent en Àlgebra Commutativa haver de determinar completament les components primàries, sinó més bé el conjunt d'ideals primers associats, que en general és un càlcul una mica més senzill. En termes de Geometria Algebraica, aquesta és en certa manera la diferència entre determinar l'intersecció de varietats conjuntísticament o be amb multiplicitats, tal com s'explica a la contribució en aquest mateix volum de Raquel Mallavibarrena.

Una de les alumnes d'Emmy Noether, Grete Hermann (1901-1984), va desenvolupar diversos algorismes en Àlgebra Commutativa, en particular pel càlcul de la descomposició primària [8]. Com a conseqüència va trobar que existeix una funció que depèn de n, k i d tal que si I és un ideal d'un anell de polinomis en n variables a coeficients a $\mathbb{C}$, generat per k elements de grau com a molt d, aleshores existeix una descomposició primària tal que els generadors de les seves components primàries tenen graus acotats superiorment per aquesta funció. La funció trobada per Hermann és doble exponencial en n i no es coneix avui en dia si aquesta fita és pot millorar. Els paquets més coneguts de computació en Àlgebra Commutativa, CoCoA, Macaulay2 i Singular, poden calcular descomposicions primàries basant-se en diferents algorismes més o menys eficients, depenen del tipus d'ideal.

4.1. Voldria comentar ara un dels aspectes possiblement més interessants de la descomposició primària. Es dóna el cas que, en general, les potències d'un ideal primer no són ideals primaris. El següent n'es un exemple. Sigui $\mathfrak{p}$ l'ideal primer

$$\mathfrak{p} = (y^2 - xz, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{C}[x, y, x]$$

(és l'ideal de definició de la corba (t^3, t^4, t^5) de l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$). Aleshores,

$$x(x^5 - 3x^2yz + xy^3 + z^3) \in \mathfrak{p}^2$$

però en canvi x no pertany a $\mathfrak{p}$ (i cap potència seva tampoc) i $x^5 - sx^2yz + xy^3 + z^3$ no pertany a $\mathfrak{p}^2$. Per tant, $\mathfrak{p}^2$ no és un ideal primari.

Això no passa si l'ideal primer és maximal, és a dir, si no hi cap altre ideal propi que el contingui (tot ideal maximal és primer): si $\mathfrak{m}$ és un ideal maximal, aleshores tot ideal de la forma $\mathfrak{m}^n$ és primari amb primer associat $\mathfrak{m}$ (encara que no tot ideal $\mathfrak{m}$-primari és una potència de $\mathfrak{m}$).

El que si passa és que per a tot ideal primer $\mathfrak{p}$, tota potència $\mathfrak{p}^n$ te a $\mathfrak{p}$ com a primer associat aïllat (de fet n'és l'únic). Per tant, a qualsevol descomposició primària irredundant de $\mathfrak{p}^n$ hi una component primària ben determinada amb ideal primer associat $\mathfrak{p}$. És l'anomenada n-ésima potència simbòlica de $\mathfrak{p}$, que denotem per

$$\mathfrak{p}^{(n)}$$

Els problemes relacionats amb el comportament d'aquestes potències simbòliques són en general molt difícils i profunds.

Si k és un cos algebraicament tancat i $\mathfrak{p}$ és un ideal primer de l'anell de polinomis $k[x_1, \ldots, x_n]$, tenim com a conseqüència del Teorema dels zeros de Hilbert que

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in X} \mathfrak{m}$$

on X és el conjunt d'ideals maximals de $k[x_1, \ldots, x_n]$ que contenen a $\mathfrak{p}$. El següent teorema ens dona una descripció similar de les potències simbòliques.

Teorema 9 (O. Zariski (1949), M. Nagata (1962))**.** *Sigui k un cos algebraicament tancat de característica zero i $\mathfrak{p}$ un ideal primer de l'anell de polinomis $k[x_1, \ldots, x_n]$. Aleshores, per a tot $r \geq 1$ es verifica que*

$$\mathfrak{p}^{(r)} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in X} \mathfrak{m}^r$$

Dit en altres paraules, la r-èsima potencia simbòlica de $\mathfrak{p}$ és l'ideal de totes les funcions que s'anul·len amb ordre com a mínim r per a tot punt de la varietat definida per $\mathfrak{p}$.

En un anell Noetherià la noció de potència simbòlica és pot estendre a qualsevol ideal no necessàriament primer. La notació és la mateixa: per un ideal I, la n-èsima potencia simbòlica de I és denota per $I^{(n)}$. No en donem els detalls, però.

4.2. El Problema 14 de Hilbert es por formular de la forma següent.

Siguin F un cos de característica zero, $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ l'anell de polinomis en n variables a coeficients a F i K un subcós del cós de fraccions de R. És $K \cap R$ una àlgebra de generació finita sobre F?

Masayoshi Nagata (1927-2008) en va donar un contraexemple al 1958 [10]. Per construir-lo, Nagata va utilitzar l'àlgebra de Rees de les potències simbòliques d'un cert ideal.

Donat un anell A i $I \subset A$ un ideal, podem considerar el subanell de l'anell de polinomis en una variable $A[t]$ donat per

$$R(I) := \bigoplus_{t \geq 0} I^n t^n \subset A[t]$$

És el que s'anomena anell de Rees de I, ja que David Rees [21] el va utilitzar per primera vegada en la construcció d'un contraexemple a una versió més general del Problema 14 de Hilbert formulada per Oscar Zariski (1899-1986). Si l'anell A és Noetherià, l'anell de Rees de qualsevol ideal és també Noetherià o, equivalentment, és una A-àlgebra de generació finita.

La construcció de l'anell de Rees es pot estendre de forma òbvia a qualsevol filtració d'ideals: entenem per filtració d'ideals d'A una successió decreixent d'ideals

$$\mathcal{I} := I_0 = A \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \dots$$

tal que $I^r I^s \subset I^{r+s}$ per a tot r i s. Aleshores, l'anell de Rees de la filtració $\mathcal{I}$ és el subanell graduat de $A[t]$ definit per

$$R(\mathcal{I}) := \bigoplus_{n \geq 0} I_n t^n \subset A[t]$$

Les potències simbòliques d'un ideal I són una filtració d'ideals, és a dir, $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$ per a tot $n \geq 0$ i $I^{(r)} I^{(s)} \subset I^{(r+s)}$ per a tot r i s (no és difícil de provar, però tampoc és obvi). L'àlgebra de Rees de la filtració de les potències simbòliques d'un ideal I s'anomena sovint l'àlgebra de Rees simbòlica d'I. Ara bé: el que ja no és cert en general és que l'anell de Rees $R(\mathcal{I})$ d'una filtració qualsevol d'A sigui una A-àlgebra de generació finita.

Justament, el contraexemple donat per Nagata al Problema 14 de Hilbert es pot realitzar com l'àlgebra de Rees simbòlica d'un cert ideal de l'anell de polinomis en tres variables que no és finitament generada.

4.3. Un dels punts crucials de la demostració d'Andrew Wiles [26] del Darrer Teorema de Fermat consisteix en provar que un cert epimorfisme entre dues àlgebres sobre l'anell dels enters d'una extensió finita d'un cos p-àdic (l'àlgebra universal de les deformacions i una àlgebra de Hecke generalitzada) és un isomorfisme. L'estratègia és provar primer que l'àlgebra de Hecke generalitzada és intersecció completa i deduir a partir d'aquest fet que l'epimorfisme és, en efecte, un isomorfisme. Per provar la propietat intersecció completa de l'àlgebra de Hecke generalitzada cal aplicar un criteri numèric, provat per Richard Taylor i el propi Wiles a [23].

En realitat, la situació anterior és una cas particular de la següent: sigui k un anell i T una k-àlgebra local essencialment de tipus finit sobre k. Una evolució de T sobre k és una k-àlgebra local R essencialment de tipus finit i un epimorfisme de k-àlgebras

$$\varphi : R \to T$$

que indueix un isomorfisme entre els mòduls dels diferencials

$$\Omega_{R/k} \simeq \Omega_{T/k}$$

Es diu que l'evolució és trivial si φ és un isomorfisme i que T és evolucionalment estable si totes les seves evolucions sobre k són trivials. De fet, en el cas de Wiles es té que l'àlgebra de Hecke generalitzada és evolucionalment estable perquè és intersecció completa.

David Eisenbud i Barry Mazur estudien a [6] el problema següent: donat un cos k o bé un anell de valoració discreta de característica mixta, caracteritzar quan una k-àlgebra local T, plana, reduïda i essencialment de tipus finit sobre k és evolucionalment estable. Proven que si T es pot presentar com un quocient P/I d'un anell local $(P, \mathfrak{m})$ que és la localització d'un anell de polinomis en un nombre finit de variables sobre k, T és evolucionalment estable si, i només, si

$$I^{(2)} \subset \mathfrak{m}I$$

Més en general, un es pot plantejar la següent pregunta [6]: donat un ideal primer $\mathfrak{p}$ en un anell local $(P, \mathfrak{m})$, quan es verifica que $\mathfrak{p}^{(2)} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{m}$? La resposta és en general negativa en el cas equicaracterístic positiu, de fet hi ha contraexemples per a tota característica positiva, però no es coneix en característica zero o mixta.

4.4. L'estudi asimptòtic de les propietats d'un ideal és molt important en Àlgebra Commutativa. La funció de Hilbert n'és un cas, també el Lema d'Artin-Rees. En general, volem saber si per alguna propietat les potències d'un ideal és comporten de manera uniforme, o almenys asimptòticament uniforme. Per exemple, donat un ideal I d'un anell Noetherià A, els conjunts d'ideals primers associats a les potències de I poden anar variant. No obstant, es pot provar que existeix un enter positiu n tal que per a tot $m \geq n$, els conjunts de ideals primers associats a I^m són estables.

El fet de que l'àlgebra de Rees simbòlica d'un ideal no sigui en general finitament generada ens indica que el comportament de les potències simbòliques és poc uniforme. És en part per això que el següent resultat provat per Melvin Hochster i Craig Huneke el 2002 [9] és molt remarcable.

Teorema 10. *Sigui A un anell Noetherià regular que conté un cos (per exemple, l'anell de polinomis en un nombre finit de variables a coeficients en un cos). Sigui I un ideal qualsevol d'A i h l'alçada més gran dels ideals primers associats a I. Aleshores,*

$$I^{(hn)} \subset I^n$$

per a tot enter positiu n.

La demostració d'aquest resultat s'obté per reducció a característica positiva i aplicant aleshores la teoria de "tight closure". Aquesta teoria desenvolupada per Hochster i Huneke i la seva escola des de l'any 1986, constitueix un dels avenços més importants i profunds de l'Àlgebra Commutativa els darrers anys.

Referències

[1] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas. Edición revisada y aumentada.* Alianza Editorial S. A., Madrid, 1976.

[2] D. Blanco, *Emmy Noether. Matemática ideal.* La matemática en sus personajes, **22**, NIVOLA libros y ediciones, S.L., Tres Cantos, 2005.

[3] P. Carrasco, *Emmy Noether y el inicio del Álgebra abstracta.* Gac. R. Soc. Mat. Esp. **7** (2004), no. 2, 331-346.

[4] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke I-III.* Herausgegeben von R. Fricke, E. Noether und Ö. Ore. Reprint Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

[5] A. Dick, *Emmy Noether, 1882–1935.* Translated from the German by Heidi I. Blocher. With contributions by B. L. van der Waerden, Hermann Weyl and P. S. Alexandrov. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[6] D. Eisenbud & B. Mazur, *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals.* J. Reine Agew. Math. **488** (1997), 189–201.

[7] H. Flenner, *Emmy Noether and the development of commutative algebra.* The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 23–38, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[8] G. Hermann, *Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale.* Math. Ann. **95** (1926), no. 1, 736–788.

[9] M. Hochster & C. Huneke, *Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals.* Invent. Math. **147** (2002), 349–369.

[10] M. Nagata, *On the 14-th Problem of Hilbert.* Amer. J. Math. **81** (1959), 766-772.

[11] E. Noether, *Gesammelte Abhandlungen.* Edited and with an introduction by Nathan Jacobson. With an introductory address by P. S. Alexandrov. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[12] E. Noether & W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken.* Math. Z. **8** (1920), 1–35

[13] E. Noether, *Über eine Arbeit des im Kriege gefallenen K. Hentzelt zur Eliminationstheorie.* J. Ber. d. DMV **30** (1921), p. 101.

[14] E. Noether, *Idealtheorie in Ringbereichen.* Math. Ann. **83** (1921), 24–66.

[15] E. Noether, *Bearbeitung von K. Hentzelt: zur Theorie der Polynomideale und Resultanten.* Math. Ann. **88** (1923), 53–79.

[16] E. Noether, *Eliminationtstheorie und allgemeine Idealtheorie.* Math. Ann. **80** (1923), 229–261.

[17] E. Noether, *Eliminationtstheorie und Idealtheorie.* J. Ber. d. DMV **33** (1924), 116–120.

[18] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern.* J. Ber. d. DMV **33** (1924), p. 102.

[19] E. Noether, *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p.* Nach. v. d. Ges. d. Wis. zu Göttingen (1926), 28–35.

[20] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern.* Math. Ann. **96** (1927), 26–61.

[21] D. Rees, *On a problem of Zariski.* Illinois J. Math. **2** (1958), 145–149.

[22] B. Srinivasan & J. Sally, *Emmy Noether in Bryn Mawr.* Proceedings of a Symposium in honor of her 100th birthday held at Bryn Mawr College, Bryn Mawr, Pa., March 1719, 1982. Edited by Bhama Srinivasan and Judith D. Sally. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[23] R. Taylor & A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras.* Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 553–572.

[24] M. Teicher, *The Heritage of Emmy Noether.* Proceedings of the conference held at Bar-Ilan University, Ramat-Gan, December 23, 1996. Edited by Mina Teicher. Israel Mathematical Conference Proceedings, 12. Bar-Ilan University, Gelbart Research Institute for Mathematical Sciences, Ramat

Gan; Bar-Ilan University, Emmy Noether Research Institute of Mathematics, Ramat Gan, 1999.

[25] B. L. van der Waerden, *Algebra, Vol I, Vol II.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[26] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.