# EMMY NOETHER: HER HERITAGE

MINA TEICHER

## Introduction

Emmy Noether is my role model for 3 reasons. Firstly, she is one of the most important mathematicians and physicists of the 20th century. Secondly, she fought to be a scientist in times when women were not allowed to be one. And, thirdly, she was a leader who created a School and paved the way to success for her students and followers.

In this lecture I will elaborate on her heritage and in particular we will focus on some of her fundamental contributions to mathematics and physics.

## 1. Biographical Outline

Emmy Noether was born in Erlangen, Germany, on March 23, 1882. Max Noether, her father, was a Professor of Mathematics in the university there. She grew up in a large, warm, intellectual family. Being non-rebellious, she might have settled for the traditional feminine tasks, were it not for the new wave in Germany that allowed girls to study science in high school. From 1900 to 1903 she was a student in the University of Erlangen. This was an unusual phenomenon, although she needed a special agreement from the professor for every course she wanted to attend —she did not give up!— and thus paved the road for many women after her.

She started her university studies by studying languages and then moved to mathematics. In 1903 she was awarded a *Reifepüfung* (university admission certificate) and moved to Göttingen. But after one semester she moved back to Erlangen, since this university took a very liberal step and introduced equal rights for female students.

She started her graduate studies under Paul Gordan, submitting a thesis on the theory of invariants in 1907. Then she remained in Erlangen for the next eight years and in 1915 she moved to Göttingen, which was a more important mathematical center. She still had no official job, but unofficially she gave lectures replacing Hilbert. Finally, in 1919 she submitted her *Habilatation*[1] —we will have a detailed look at it later.

In 1922 she was appointed *Ausserordentlicher* Professor,[2] but it was not a proper appointment and she was still unpaid. She certainly was not a member of the Royal Society of Göttingen (the Royal Society of London, founded in 1662, elected its first female member in 1945; the *Académie des Sciences* of Paris was founded in 1666 and elected its first female member in 1962).

In the early twenties, her mathematical work changed and became more conceptual. She changed from a computational to an axiomatic-conceptual approach. During the next ten years she had an enormous influence on the physics and mathematics of the period, as we will see in more detail later.

In 1932 she gave an invited address at the International Congress in Zurich. There she received full recognition for her work. In fact, she was the queen of the Congress. But in 1933 she was exiled by the Nazis, accepting finally a job in Bryn Mawr College, a women's higher education center in Pennsylvania. She died in Bryn Mawr in 1935, at the age of 53, following an operation.

Her contribution to physics made the symmetries a pillar of physics. Her impact on algebraic geometry is enormous. We can only wonder what mathematics in general, and algebraic geometry in particular, would have been today if she would have survived the operation.

## 2. Mathematical History

As already said, Emmy Noether started her graduate studies in Erlangen under Paul Gordan, who was a colleague of her father. He was

[1] The act of receiving the official right to teach at a given university, or 'venia legendi' (cf. [5]).

[2] A professor with somewhat limited internal administrative rights and functions (cf. [5]).

called “The king of invariants,” for his work on the finite basis for the invariants of a binary quadratic form. (The general problem, called “Gordan’s Problem”, was later solved by Hilbert.) For her thesis she calculated all the 331 invariants of ternary bi-quadratic forms! She worked unpaid in Erlangen supervising students and sometimes lecturing for her ailing father who died in 1914.

After submitting her thesis she started to work with Ernst Fischer, who replaced Gordan after his retirement. Influenced by Fischer, she soon took the abstract approach to algebra following Hilbert’s 1888 basis theory paper.

In 1915, Emmy Noether was invited by David Hilbert to join the team of mathematicians assembled in Göttingen. The mathematicians included Hermann Weyl and Felix Klein. Noether was welcome as she was able to help them with her invariant-theoretic knowledge. She was 33 at that time and had already written eleven papers.

In June-July 1915, shortly after Noether arrived in Göttingen, Albert Einstein gave six lectures on the general theory of relativity. At that time the theory was not yet completed, as Einstein had not yet found the complete field equations. However, the basic ideas were clear and his audience found them compelling. After giving the lectures, Einstein wrote (cf. [17]):

> To my great joy, I completely succeeded in convincing Hilbert and Klein.

Einstein had been working to generalize the special theory of relativity to include gravity since 1905. In 1907 he discovered the importance of the equality of gravitational and inertial mass and formulated the equivalence principle, but it took another eight years to complete the theory. Finally, in November 1915, having found the complete field equations, he submitted the famous paper [7] that gives the theory in its final form. Remarkably, in the same month, Hilbert, being interested in the fundamental laws of physics for many years, submitted a manuscript [9] in which the same field equations are obtained as the solution of a variational problem. Hilbert and Einstein had independently found the field equations at about the same time.

Hilbert's 1915 paper "*Grundlagen der Physik*" [9] contains his derivation of the field equations for general relativity. Hilbert omitted this paper from his collected works, as his original plan for this paper (to provide a unified field theory of gravity, electromagnetism, and matter) was unsuccessful. However, when specialized to gravity, Hilbert's derivation of the field equations is an original and important contribution to the general theory. The Lagrangian he introduced is known as the Hilbert-Einstein Lagrangian, and his formulation of the theory is in widespread use today. Pais [17] writes:

> Hilbert was not the first to apply the principle to gravitation. Lorentz had done so before him. So had Einstein, a few weeks earlier. Hilbert was the first, however, to state this principle correctly.

In 1916 Klein was working on the problem of energy conservation in general relativity, or, as he termed it, "Hilbert's energy vector". He wrote in a letter to Hilbert that

> *Frl.* Noether advised me continually throughout my work, and it was really only through her that I was led to the material presented in this letter. When I spoke recently with *Frl.* Noether about my result concerning your energy vector, she told me that she had derived the same thing from your Note a year ago and written it up in a manuscript (which I examined).

In his 1918 presentation and paper [10], Klein acknowledges helpful contributions from Noether. However, in the annotation to this paper in his collected works he makes it clear that his result is a special case of her 'far-reaching' theorem. He reports that he presented her paper to the Göttingen Society the following week, and says that she also proved and generalized some of Hilbert's ideas.

Her main work on the connections between symmetries and conservation laws was presented to the July 16, 1918 meeting of the Royal Society of Göttingen by Felix Klein (and published in its Proceedings) and not by Noether herself, as Noether was not invited to be a member of the Royal Society (and she probably was not even allowed to be present when the paper was read). In his famous 1924 paper, David Hilbert credits Emmy Noether with having solved the problem of an energy theorem in the general theory, and refers to [14] "*Invariante Variationsprobleme*" (I.V. in the sequel).

During the war Hilbert tried to push through Emmy Noether's *Habilitation* (the right to lecture under University auspices) in the Philosophical Faculty in Göttingen. He failed due to the resistance of the philologists and historians. It is a well-known anecdote that Hilbert declared at the faculty meeting:

> I do not see that the sex of a candidate is an argument against her admission as Privatdocent. After all, we are a university not a bathing establishment.

It was only after the liberalization of Germany in the 1920's that the *Habilitation* was an option for women.

In 1919, Noether chose the I.V paper [14] for her *Habilitation*'s thesis and presented it to the University of Göttingen along with the twelve previously published papers and two additional manuscripts, one of which [13] contained a number of important ideas which had a significant impact on the development of modern abstract algebra.

She was finally able to lecture officially at the University, but as her *Habilitation* was not officially recognized, she was working unpaid. She had given lectures in the preceding years, but the posted notices stated that they were

> offered by Herr Professor David Hilbert, given by Frl. E. Noether,

with no tuition required. These lectures were becoming famous and drawing the attendance of mathematicians from all over Europe.

It is quite clear from the application papers written for her *Habilitation* that Noether knew the scope and importance of her mathematical results for physics in general and for conservation laws in mechanics in particular (she referred to them as first integrals). She also mentioned (cf. [6]) that her mathematical work was

> an outgrowth of my assistance to Klein and Hilbert in their work on Einstein's general theory of relativity.

I trust that she realized that her powerful results are deep and general, far more than a simple verification of Hilbert's assertion on the connection between the failure of proper energy conservation laws and general relativity.

After submitting her *Habilitation* and after some additional work on differential invariants in general relativity [12], Noether returned to the main line of her mathematical research —axiomatic algebra. Her mathematical work changed and it became more conceptual. The turning point can be symbolized by the paper with W. Schmeidler on differential operators, "Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken" [13].

During the next ten years, she had an enormous influence on the mathematics of the period. Looking at her Collected Papers we find that about ten of her papers are devoted to theory of algebras (numbers 17, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41, 42), most of them published between the years 1927 and 1933. However, we have already mentioned that she made her most important contributions known in this field not through her publications, but rather through her courses at Göttingen, in particular the courses during the winter terms of 1927/28 and 1929/30. She did not publish many of her principal results herself, but rather left this task to van der Waerden, Hasse, Deuring and others. Alexandrov, Weyl, and van der Waerden stress this point, that she preferred to communicate her research in conversation; therefore published documents cannot tell the whole story. We know that many brilliant mathematicians attended her seminars and lectures, and it is difficult to guess to which extent she communicated her ideas to them. The following courses were given by her at Göttingen:

| | |
|---|---|
| Winter 1924/25: | *Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen* |
| Winter 1927/28: | *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie* |
| Summer 1928: | *Nichtkommutative Algebra* |
| Summer 1929: | *Nichtkommutative Arithmetik* |
| Winter 1929/30: | *Algebra der hyperkomplexen Grössen.* |

The first course is mentioned in the introduction of van der Waerden's *Moderne Algebra* [20], and in [21], where he writes:

> One of the main subjects in this course was Wedderburn's theory of algebras over arbitrary fields.

The same subject was treated, in a much improved form, in her course under the same title in 1927/28, in which also a quite new treatment of representations of groups and algebras was given [18].

Her work spread out not so much through her published work than through her fruitful research program and courses; her many graduate students and young colleagues (Grete Herman, Köthe, Krull, Deuring, Fitting, Witt, Tsen, Shoda, Levitski, van der Waerden); her associates (Schmidt, Artin, Hasse, Alexandroff, Pontrjagin, Hopf); her being an inspiring teacher to her students; her sharing personality; and also through the lectures of van der Waerden. This was despite her non pedagogical talents, that resulted in a usually non-full lecture hall — only the most brilliant ones attended. There were many foreigners among her students. Her group of students was called "The Noether boys". They were a close research group and she took good care of them. In the Mathematics Geneaology Project it is listed that she has 750 descendants (see the Annex).

Her most devoted student was van der Waerden. He arrived in the winter of 1924-25 and quickly mastered her theories. In 1927 he gave a course on the theory of ideals. He brilliantly exposed her ideas, which gained fame and acceptance in Göttingen and from there to the other universities. His book *Moderne Algebra*, which became one of the "classics", includes her ideas and his new findings. It is still of interest to readers today.

When she had to leave Germany in 1933, she wanted to go to Moscow, where she once spent a semester teaching algebra, organizing a course in algebraic geometry and working with Alexandrof and Pontrjagin (1928-1929). But the process of obtaining papers went slowly and finally she immigrated (like many of her colleagues) to the U.S. Being a woman, she was not accepted into the Institute for Advanced Study in Princeton, but to Bryn Mawr College, Pennsylvania, a women's college. She created a small group there and commuted to Princeton for seminars and collaborations. She taught there for 2 years before her premature death in 1935.

## 3. Contribution to Physics

Emmy Noether's paper I.V., [14], profoundly influenced 20th century physics. The paper proved two theorems and their converses which revealed the general connection between symmetries and conservation laws in physics. They led to a deeper understanding of laws such as the principle of conservation of energy, of angular momentum, etc., and also were instrumental in the great discoveries of gauge field symmetries of the 20th century [2].

In November 1915, Emmy Noether wrote to Ernst Fischer:

> Hilbert plans to lecture next week about his ideas on Einstein's differential invariants, and so ... [we] had better be ready [5].

Athough the general theory of relativity was completed in 1915, there remained unresolved problems. In particular, the principle of local energy conservation was a vexing issue. In the general theory, energy is not conserved locally as it is in classical field theories —Newtonian gravity, electromagnetism, hydrodynamics, etc. Energy conservation in the general theory had been perplexing many people for decades. In the early days, Hilbert wrote about this problem as 'the failure of the energy theorem'. In a correspondence with Klein [3], he asserted that this 'failure' is a 'characteristic feature of the general theory', and that instead of 'proper energy theorems' one had 'improper energy theorems' in such a theory. In the note to Klein he reports that he had requested Emmy Noether to help clarify the matter.

Emmy Noether was thus drafted into physics, which was something of a departure from the main line of her mathematical research, namely the development of modern abstract algebra. After David Hilbert's discovery of the variational principle from which he derived the field equations of general relativity, David Hilbert, Felix Klein and others in Göttingen were intensely interested in the recently completed general theory of relativity and Noether's help was requested to clarify the question of energy conservation referred to above.

She then began to study relativity theory and soon clarified the problem. This led to two papers: [12] and [14]. In [19] Hermann Weyl characterized these two papers as giving

> the genuine and universal mathematical formulation of two of the most significant aspects of general relativity theory: first, the reduction of the problem of differential invariants to a purely algebraic one by use of normal coordinates; and second, the identities between the left sides of Euler's equations of a problem of variation...

In [15] Einstein is quoted as writing to Hilbert about the first paper:

> Yesterday I received from Miss Noether a very interesting paper on invariant forms. I am impressed that one can comprehend these matters from so general a viewpoint. It would not have done the old guard at Göttingen any harm had they picked up a thing or two from her...

The discussion and proofs of the two theorems in I.V. clarified and resolved the issues regarding energy conservation, as Hilbert acknowledged in a 1924 paper.

Let's look at this issue in present day language. In modern mathematical terminology, the general theory of relativity is a gauge theory and the symmetry group of the theory is the gauge group. It is the group of all continuous coordinate transformations with continuous derivatives, often called the group of general coordinate transformations. It is a Lie group that has a continuously infinite number of independent infinitesimal generators. In Noether's terminology such a group is an infinite continuous group. The symmetry group of special relativity, the Poincaré group, is a Lie subgroup of the group of general coordinate transformations. It has 7 independent infinitesimal generators. Noether refers to such a group as a finite continuous group. This distinction between a Lie group with a finite (or countably infinite) number of independent infinitesimal generators and an infinite continuous group is what distinguishes Noether's Theorem I and Theorem II in I.V. Theorem I applies when one has a finite continuous group of symmetries, and Theorem II when there is an infinite continuous group of symmetries. Field theories with a finite continuous symmetry group have what Hilbert called 'proper energy theorems'. Physically in such theories one has a localized, conserved energy density; and one can prove that in any arbitrary volume the net outflow of energy across the boundary is equal to the time rate of decrease of energy within the volume. This follows from the fact that the energy-momentum tensor of the theory is divergence free. In general relativity, on the other hand, it has no meaning to speak of a definite localization of energy. One may define a quantity which is divergence free analogous to the energy-momentum density tensor of special relativity, but it is gauge dependent: i.e., it is not covariant under general coordinate transformations. Consequently, the fact that it is divergence free does not yield a meaningful law of local energy conservation. Thus in such theories one has, as Hilbert saw it, 'improper energy theorems'.

A key feature for physics of Noether's I.V. paper is the clarity her theorems brought to our understanding of the principle of energy conservation. In the N. Jacobson's Introduction to the Collected Papers of Noether [16], he quotes Gursey:

> Before Noether's Theorem the principle of conservation of energy was shrouded in mystery, leading to the obscure physical systems of Mach and Ostwald. Noether's simple and profound mathematical formulation did much to demystify physics.

Noether showed in her Theorem I that the principle of energy conservation follows from symmetry under time translations. This applies to the group of Lorentz transformations and spacetime translations. In general relativity, on the other hand, energy conservation takes a different form as will be shown below. Noether's Theorem II applies in the case of general relativity and one sees that she has proved Hilbert's assertion that in this case one has 'improper energy theorems', and that this is a characteristic feature of the theory. This is due to the fact that the theory is a gauge theory; i.e., that it has an infinite continuous group of symmetries of which time translations are a subgroup. Indeed, generally, she defines as "improper" divergence relationships, which vanish when the field equations are satisfied, which correspond to a finite continuous subgroup of an infinite continuous group. Generally they do not have the required invariance or covariance properties under the larger group.

For example, in general relativity a divergence free energy-momentum (pseudo) tensor can be constructed but it is gauge dependent (see below). Because it is not covariant under general coordinate transformations, it is more properly called a pseudotensor. Such pseudotensors are covariant with respect to the linear transformations of the Poincaré group and may be used in asymptotic spacetime regions far from gravitating sources to derive a principle of energy conservation [2].

We need to discuss in some detail field theories of matter, gravity, electromagnetism, etc. in both special and general relativity. In special relativity these theories have a 'proper energy theorem' in the sense of Hilbert, and 'proper energy theorems' give a principle of local energy conservation. In general relativity, on the other hand, the proper energy theorem becomes improper in that the energy-momentum tensor for which the theorem holds is gauge dependent. There is transfer of energy to and from the gravitational field and it has no meaning to speak of a definite localization of the energy of the gravitational field in space. Consequently, we do not have a principle of local energy conservation in spacetime regions in which there exist gravitational fields. The theories we discuss here are field theories which may be formulated in terms of a variational principle; i.e., their field equations may be obtained from Hamilton's principle. This was Hilbert's great contribution to the general theory of relativity. He showed the correct field equations can be derived from Hamilton's principle, and Noether's work unfolded from this.

## 4. Contribution to Algebra

Emmy Noether created the mathematical work that has made her name immortal in mathematics between the years 1920 and 1932. The importance of her work was immediately recognized by her colleagues in Göttingen and from there to the rest of the world. At the International Congress at Zürich in 1932 she gave an plenary lecture on "Algebras and their Application to Number Theory", and when she died in 1935 there was general agreement that she, more than anybody else, had created the modern algebra of the 20th century.

In his memorial speech (in [15]) on November 5, 1935, Alexandrov, her former collaborator, said:

> But when we think of Emmy Noether as a mathematician, we have in mind not these early works, important though they were in their concrete results, but rather the main period of her research, beginning in

> about 1920, when she became the creator of a new direction in algebra and the leading, the most consistent and prominent representative of a certain general mathematical doctrine, all that which is characterized by the words "conceptual mathematics".
>
> ... she herself was ready to forget what she had done in the early years of her scientific life, since she considered those results to have been a diversion from the main path of her research, which was the creation of a general, abstract algebra.
>
> Emmy Noether embarked on her own completely original mathematical path in the years 1919/1920. She herself dated the beginning of this fundamental period in her work with the famous joint work with V. Schmeidler [13]. In a sense this paper serves as a prologue to her general theory of ideals which she revealed in 1921 in the classic memoir "Idealtheorie in Ringbereichen".
>
> From 1927 on, as the influence of Emmy Noether's ideas on modern mathematics constantly increased, the scholarly renown of the author of those ideas was similarly increasing. Meanwhile, the direction of her own work was changing, moving more and more toward the areas of noncommutative algebra, representation theory and the general arithmetic of hypercomplex systems.
>
> Emmy Noether lived to see the full recognition of her ideas. If in the period 1923-1925 she was striving to prove the importance of the theories she was developing, in 1932, at the International Congress of Mathematicians in Zürich, her accomplishments were lauded on all sides. The major survey talk that she gave at the Congress was a true triumph for the direction of research she presented. At that point she could look back upon the mathematical path she traveled not only with an inner satisfaction, but with an awareness of her complete and unconditional recognition in the mathematical community. The Congress in Zürich marked the high point of her international scientific position.

This evaluation of her position in the "Mathematics Hall of Fame" has not changed in the following 50 years and up to our times. Nathan Jacobson, the editor of her Collected Papers [16] wrote in 1982 in his Introduction to them:

> Emmy Noether was one of the most influential mathematicians of this century. The development of abstract algebra, which is one of the most distinctive innovations of twentieth century mathematics, is largely due to her —in published papers, in lectures, and in personal influence

> on her contemporaries. By now her contributions have become so thoroughly absorbed into our mathematical culture that only rarely are they specifically attributed to her. It therefore seems appropriate in this introduction to her collected papers to seek to highlight her principal contributions to the area of mathematics variously known as "abstract", "conceptual" or "modern" algebra.

The axiomatic approach was for Hilbert a means of logical clarification, but in the hands of Emmy Noether it became a powerful method of mathematical research. As Herman Weyl said [19]:

> This method was applied by Emmy Noether with mastery skill, it suited her nature and she made algebra 'the Eldorado of axiomatics',

and from algebra it spread to the rest of mathematics.

Emmy Noether's (and R. Brauer's) main contributions to the theory of algebras, were the following:

- applications of abstract algebraic concepts, e.g., ideal theory, to the structure theory of algebras;
- unification of the representation theory of finite groups and the theory of semisimple algebras;
- the theory of splitting fields;
- clarification of the internal structure of simple algebras, e.g., the Skolem–Noether theorem and the double centralizer theorem;
- cohomology theory: factor sets and crossed products;
- applications of the theory of algebras to algebraic number theory and class field theory.

One can argue that her first important work in Algebra is contained in the course given in Göttingeen in the fall of the academic year 1927/28: "*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*". In fact, these lectures presented hardly any new major results, but, nevertheless, they constitute one of the main roots of what we call today "modern algebra". Van der Waerden took notes of this course, prepared the publication (No. 34 in the collected works), and incorporated it, in content and spirit, in his own book *Moderne Algebra*. The importance of many fundamental principles of algebra —obvious today— was pointed out in this course for the first time: Isomorphism theorems, Jordan-Hölder theorem, Krull-Schmidt decomposition, semisimplicity, complete reducibility, ground ring extension, structure theory of noncommutative rings, behaviour of the center, and above all the fact that representation theory of finite groups can be based on the theory of semisimple algebras, which seemed to Noether herself the most important aspect.

A lot was still missing in this course, e.g., the structure theory of simple algebras, factor systems and crossed products, a clear grasp of the importance of separability. The following summer semester she continued with her course, where she proved the so-called Skolem–Noether theorem, a cornerstone of the whole theory, which asserts that every automorphism of a simple algebra is inner (Dickson and Wedderburn proved and used special cases of this theorem in their theory of cyclic algebras and crossed products). The closely related centralizer theorem (a simple subalgebra equals its double centralizer), proved by Deuring in 1935, [4], was not yet known to her, as she remarks herself (in the introduction to the paper no. 40 in the Collected Papers).

During the winter semester 1929/30 she gave again a course on "*Algebra der hyperkomplexen Grössen*". Notes of the course were taken by Deuring, but were published for the first time in her Collected Papers. The mathematical content of this course became known before its publication in the Collected Papers, through van der Waerden, through Hasse's 1932 exposition of cyclic algebras and crossed products, in [1], through her own 1933 paper (no. 40 in the Collected Papers), and through Deuring's book from 1935 [4].

It is not clear why she never published her lecture notes on one of her most significant discoveries, namely, the relation between the "Theory of algebras" and "Galois cohomology", including the Wedderburn theorems, structure of simple algebras, the Skolem–Noether and centralizer theorems, splitting fields, factor systems and crossed products. As an application she proves Wedderburn's theorem on finite division rings, Frobenius' classification of real division algebras, and something leading into the future, namely the main result of local class field theory $\mathrm{Br}(L/K) \sim \mathrm{Gal}(L/K)$ for a cyclic extension of a $p$-adic field. The representation theory of finite groups is mentioned only briefly and restricted to abelian groups. The theory of algebras had also implications for algebraic number theory and class field theory. Here it seems to be even more difficult than in the algebraic theory to say exactly what can be credited to Noether. In a 1935 manuscript [19] Weyl remarks:

> Hasse acknowledges that he owed the suggestion for his beautiful papers on the connection between hypercomplex quantities and the theory of class fields to casual remarks by Emmy Noether. She could just utter a far-seeing remark like this, "Norm rest symbol is nothing else than cyclic algebra" in her prophetic lapidary manner, out of her mighty imagination...

Generally speaking, she was probably the first one to see clearly that class field theory could (and perhaps should) be based on the formalism of Galois cohomology. A high point of algebraic number theory is the result of Brauer, Hasse and Noether that over an algebraic number field every division algebra is cyclic (No. 38 of her Collected Papers). However the main step in the proof is Hasse's local-global principle for the Brauer group, where the contributions of Brauer and Noether are relatively minor. On the other hand, her 1932 talk in Zürich, and her paper 41 in the Collected Papers, contain a most remarkable sketch of how Galois cohomology can be used. There, she first proves Hilbert 90 (due to Schur and Speiser but at that time not well-known) and then she essentially works out the cohomology of the ideal group and the ideal class group, which, of course, relies on the local-global principle for the Brauer group, ideas that lead directly to Artin-Tate class field theory (see [18]).

I shall conclude with quotations from Hermann Weyl from 1935 ([19]):

> ...In my Göttingen years 1930-1933, she was without doubt the strongest center of mathematical activity there, considering both the fertility of her scientific research program and her influence upon a large circle of pupils... Above all, her conceptual axiomatic way of thinking in algebra becomes first noticeable in this paper dealing with differential operators... It is here for the first time that the Emmy Noether whom we all know appears, and who changed the face of algebra by her work... Her significance for algebra cannot be read entirely from her own papers; she had great stimulating power and many of her suggestions took final shape only in the works of her pupils or co-workers... She lived in close communion with her pupils; she loved them, and took interest in their personal affairs...

... This clarifying power she proved, for example, in her theory of the cross product, in which almost all the facts had already been found by Dickson and by Brauer...

... Her heart knew no malice; she did not believe in evil —indeed it never entered her mind that it could play a role among men... She was a great mathematician, the greatest, I firmly believe, that her sex has ever produced, and a great woman... And of all I have known, she was certainly one of the happiest...

... Her strength lay in her ability to operate abstractly with concepts. It was not necessary for her to be led to new results on the leading strings of concrete examples. She possessed a most vivid imagination, with the aid of which she could visualize remote connections; she constantly strove for unification. In this, she sought out the essentials in the known facts, brought them into order by means of appropriate general concepts, espied the vantage point from which the whole could best be surveyed, cleansed the object under consideration of superfluous dross, and thereby won through to so simple and distinct a form that the venture into new territory could be undertaken with the greatest prospect of success."

## Annex
## A transcript of the Mathematical Genealogy of Emmy Noether

***Emmy Amalie Noether***

*PH.D. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1907*
*Dissertation: Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*
*Mathematics Subject Classification: 06—Order, lattices, ordered algebraic structures*
*Advisor: Paul Gordan*

*Student(s):*

| Name | School | Year | Descendants |
|---|---|---|---|
| *Max Deuring* | *UG* | *1931* | *444* |
| *Wilhelm Dörate* | *UG* | *1927* | |
| *Hans Fitting* | *UG* | *1931* | |
| *Heinrich Grell* | *UG* | *1926* | *109* |
| *Margarethe Hermann* | *UG* | *1926* | |
| *Yaakov Levitzki* | *UG* | *1929* | *27* |
| *Otto Schilling* | *UM* | *1935* | *45* |
| *Ruth Stauffer* | *BM* | *1935* | |
| *Chiungtze Tsen* | *UG* | *1934* | |
| *Werner Vorbeck* | *UG* | *1935* | |
| *Werner Weber* | *UG* | *1929* | *6* |
| *Wolfgang Wichmann* | *UG* | *1936* | |
| *Ernst Witt* | *UG* | *1934* | *109* |

*According to our current on-line database,*
*Emmy Noether has 13 students and 750 descendants*
*UG=Georg-August-Universität Göttingen*
*BM=Bryn Mawr College*
*UM=Georg-August-Universität Göttingen*

## Referències


[1] R. Brauer, H. Hasse, E. Noether, *Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren*, J. reine angew. Math. 167 (1932), 399-404; (E. Noether, Gesammelte Abh., pp. 630-635).

[2] N. Byers, *E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws*, Heritage of Emmy Noether, IMCP 12, 1999 (Mina Teicher, ed.), pp. 67-81.

[3] Correspondence between D. Hilbert and F. Klein published by F. Klein in Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse (1918) as *Zu Hilberts erster Note Äuberdie Grundlagen der Physik*; included in his annotated collected works Ref. [11]; see Ch. XXXI (erster band, p. 560); English translation courtesy of Basil Gordon.

[4] M. Deuring, *Algebren*. Ergebnisse der Math., Band 4, Heft 1, Berlin, 1935.

[5] A. Dick, *Emmy Noether (1882-1935)*, Birkhauser, 1981; English translation by H.I. Blocher.

[6] A. Dick, *Die Habilitation von Emmy Noether an der Universitat Göttingen*, ATM Schriften Leipzig, vol. 28, (1991), 13-32.

[7] A. Einstein, *Sitzungsberichte*, Preussische Akademie der Wissenschaften, 1915, p. 844.

[8] D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[9] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse (1915), 395-407.

[10] F. Klein, *Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in die Einsteinschen Gravitationstheories*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918).

[11] F. Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, Berlin, 1921.

[12] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse (1918), 37-44.

[13] E. Noether and W. Schmeidler, *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken*, Math. Zs. 8 (1920), 1-35.

[14] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257; English translation M.A. Travel, Transport Theory and Statistical Physics 1(3) (1971), 183-207.

[15] Emmy Noether, *A Tribute to Her Life and Work* (James W. Brewer and Martha K. Smith, eds.), Marcel Dekker, Inc., 1981.

[16] Emmy Noether, *Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983.

[17] A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.

[18] W. Scharlau, *Emmy Noether's contributions to the theory of algebras*, Heritage of Emmy Noether, IMCP 12, 1999 (Mina Teicher, ed), pp. 39-55.

[19] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Math. 3 (1935), 201 - 220; Ges. Abh. Bd. 3, pp. 425-444; English translation of this memorial lecture is given in Ref. [8].

[20] B.L. van der Waerden, *Moderne Algebra II*, Berlin, 1931.

[21] B.L. van der Waerden, *On the sources of my book Moderne Algebra*, Historia Math. 2 (1975), 31-40.

[22] B.L. van der Waerden, *Obituary of Emmy Noether*, Mathematische Ann. 111 (1935), 469-474.

# Emmy Noether: el seu llegat*

**Mina Teicher**

## Introducció

Emmy Noether és el meu model de persona, per tres raons. Primera, perquè és una de les figures més importants del segle XX en el món de les matemàtiques i la física. Segona, perquè lluità per ser una científica en un temps en què a les dones no els era permès ser-ho. I tercera, perquè fou una líder que creà una escola i promogué l'èxit dels seus estudiants i seguidors.

En aquesta conferència comentaré el seu llegat i, en particular, algunes de les seves contribucions fonamentals a les matemàtiques i a la física.

## 5. Ressenya biogràfica

Emmy Noether va néixer a Erlangen, Alemanya, el 23 de març de 1882. El seu pare, Max Noether, era professor de Matemàtiques de la universitat d'aquesta ciutat. Emmy va créixer en una família gran, càlida i intel·lectual.

Dòcil com era, segurament hauria estat educada per ocupar-se de les tasques tradicionalment femenines si no hagués estat per les noves tendències a Alemanya que permetien a les noies estudiar ciències a l'escola secundària superior.

Des de 1900 a 1903 va ser estudiant de la Universitat d'Erlangen. Aquest fet no era gens habitual, i havia de demanar permís per assistir a classe a cadascun dels professors de les assignatures que volia estudiar. No es va rendir, i va obrir camí a tantes dones que han vingut després d'ella.

Els seus estudis universitaris es van iniciar en el camp de les llengües, per després canviar a matemàtiques. El 1903 va aconseguir un certificat d'admissió a la universitat, *Reifeprüfung*, i se'n va anar a Göttingen,

*Traducció al català a càrrec de Jaume Franch, Margarida Mitjana, Eduard Recasens, Oriol Serra i Sebastià Xambó. Les referències coincideixen amb les de la versió original anglesa i es troben a les pàgines 34-35.

però al cap d'un semestre va tornar a Erlangen perquè aquesta universitat havia pres una orientació més liberal en introduir igualtat de drets per a les noies estudiants.

Va començar els estudis de doctorat amb Paul Gordan. Presentà la tesi, sobre teoria d'invariants, el 1907 i es va quedar a Erlangen els següents vuit anys. El 1915 va anar a Göttingen, que era un dels centres més importants en matemàtiques. Oficialment no tenia cap posició, però en realitat donava classes substituint a Hilbert.

El 1919 va presentar la seva *Habilatation*,[1] punt que considerarem amb més detall posteriorment.

El 1922 va ser contractada com a *Ausserordentlicher*,[2] però no era pròpiament un nomenament, ja que no tenia cap sou, i certament no fou membre de la *Real Societat de Göttingen* (la *Royal Society of London*, fundada el 1662, va escollir per primer cop una dona com a membre el 1945; l'*Académie des Sciences* de París, fundada el 1666, no en va escollir una fins el 1962).

A principi dels any vint, el seu treball matemàtic va canviar per esdevenir més abstracte. D'una aproximació computacional als problemes, va passar a un estudi més axiomàtic i conceptual. Durant els propers deu anys va tenir una gran influència en la física i la matemàtica de l'època, com veurem amb més detall posteriorment.

Durant el Congrés Internacional de Zuric, el 1932, va impartir una conferència plenària on va rebre el màxim reconeixement pel seu treball, esdevenint l'estrella del Congrés. El 1933, a causa del nazisme, es va haver d'exiliar, acceptant finalment un treball en un centre universitari per a noies, el Bryn Mawr College, a Pennsylvania. Va morir el 1935, a l'edat de 53 anys, després d'una operació quirúrgica.

Les seves contribucions a física van erigir els grups de simetries en un dels pilars de la física. El seu impacte en la geometria algebraica és enorme. Podem preguntar-nos què hauria estat de les matemàtiques en general i de la geometria algebraica en particular si ella hagués sobreviscut a l'operació.

---

[1] L'acte de rebre oficialment el dret a ensenyar en una universitat donada, o 'venia legendi' (v. [5]).

[2] Un professor amb funcions i drets administratius limitats (cf. [5]).

## 6. Història Matemàtica

Emmy Noether començà els seus estudis de doctorat a Erlangen sota la direcció de Paul Gordan, que era un col·lega del seu pare. L'anomenaven "El rei dels invariants", pels seus treballs sobre bases finites per als invariants d'una forma quadràtica binària (el problema general, anomenat "el problema de Gordan", fou resolt posteriorment per Hilbert). A la seva tesi, Emmy Noether va calcular tots els 331 invariants de les formes biquadràtiques ternàries! Es va doctorar l'any 1907. Treballà a Erlangen sense cobrar, dirigint tesis i, de vegades, fent les classes del seu pare, qui morí l'any 1914.

Un cop va rebre el títol de doctor, començà a treballar amb Ernst Fischer, que havia substituït a Gordan quan aquest es jubilà. Sota la seva influència aviat prengué el camí abstracte a l'àlgebra tot seguint l'article sobre bases d'ideals de polinomis que Hilbert publicà l'any 1888.

L'any 1915, David Hilbert convidà Emmy Noether a integrar-se a l'equip de matemàtics de Göttingen. En aquest equip hi havia, entre d'altres, Hermann Weyl i Felix Klein. Fou molt ben acollida i va ser capaç d'ajudar-los amb el seu coneixement teòric sobre els invariants. Tenia 33 anys i ja havia publicat onze articles.

L'estiu de 1915, poc després de l'arribada de Noether a Göttingen, Einstein hi va impartir sis conferències sobre la teoria general de la relativitat. En aquells temps la teoria encara no estava enllestida, ja que Einstein encara no havia trobat la forma final de les equacions del camp gravitatori. Tanmateix, les idees bàsiques eren clares i l'audiència les trobà engrescadores. Després de donar les conferències, Einstein va escriure (cf. [17]):

> Amb gran joia veig que he reeixit en la tasca de convéncer Hilbert i Klein.

Einstein havia estat treballant des de 1905 per generalitzar la teoria especial de la relativitat a fi d'incloure-hi la gravitació. L'any 1907 descobrí la importància de la igualtat entre la massa gravitacional i la inercial, i va formular el principi d'equivalència, però necessità encara vuit anys més per completar la teoria. Finalment, al novembre de 1915, un cop havia trobat les equacions, va sotmetre el seu famós article [7] en el que donava la forma definitiva a la seva teoria. Remarcablement, el mateix mes, Hilbert, que estava interessat en les lleis fonamentals de la física des de feia anys, enviava el manuscrit [9] en el qual s'obtenien les mateixes equacions com a solució d'un problema variacional. Hilbert i Einstein havien arribat a les mateixes equacions de manera independent a l'ensems.

L'article de Hilbert de 1915 "*Grundlagen der Physik*" [9] conté la seva deducció de les equacions de camps per a la teoria general de la relativitat. Hilbert va ometre aquest article en els seves obres completes perquè el seu pla original per aquell treball (fornir una teoria unificada de la gravitació, l'electromagnetisme i la matèria) no havia reeixit. Tanmateix, aplicada a la gravitació, la deducció de Hilbert és una contribució important i original a la teoria general. El lagrangià que va introduir es coneix com a Lagrangià de Hilbert-Einstein, i la seva formulació de la teoria és encara molt emprada avui dia. Pais [17] escriu el següent:

> Hilbert no fou el primer en aplicar el principi a la gravitació. Lorentz ho feu primer, i encara Einstein setmanes abans. Tanmateix Hilbert fou el primer a enunciar aquest principi correctament.

L'any 1916 Klein estava treballant en el problema de la conservació de l'energia en la relativitat general o, com deia ell, en el "vector d'energia de Hilbert". Va escriure una carta a Hilbert on deia:

> *Frl.* Noether m'ha aconsellat contínuament al llarg del meu treball, i ha estat només gràcies a ella que he arribat al material que presento en aquesta carta. Quan vaig parlar recentment amb *Frl.* Noether sobre el meu resultat relatiu al teu vector d'energia, m'ha dit que ella va arribar al mateix resultat a partir del teu article ara fa un any, i que ho havia escrit en un manuscrit (que he examinat).

A la seva presentació de 1918, i en l'article [10], Klein agraí les contribucions de Noether. Tanmateix, en l'anotació d'aquest article a les seves obres completes va deixar clar que el seu resultat no era més que un cas particular del teorema de Noether. Ell explica que va presentar l'article d'ella a la Reial Societat de Göttingen la setmana després, i també diu que ella va demostrar i generalitzar algunes de les idees de Hilbert.

Aquest articles és el principal treball de Noether sobre les connexions entre simetries i les lleis de conservació i fou presentat per Felix Klien a la sessió del 16 de juliol de 1918 de la Reial Societat de Ciències de Göttingen, i publicat després als Proceedings. No fou, doncs, presentat per la mateixa Noether, i probablement ni fou convidada a assistir-hi per no ser membre de Societat. En el seu famós article de 1924, David Hilbert reconeix que Emmy Noether havia resolt el problema d'un teorema de l'energia dins la teoria general, i cita "Invariante Variationsprobleme" [14] (I.V. en el que segueix).

Durant la guerra Hilbert va intentar fer passar l'*Habilitation* (requisit per donar classes sota els auspicis de la Universitat) d'Emmy Noether a la Facultat de Filosofia de Göttingen. Va fracassar, però, per la resistència de filòlegs i historiadors. És una anècdota ben coneguda que Hilbert va declarar a la reunió de la facultat:

> No veig que el sexe d'un candidat sigui un argument contra la seva admisió com a *Privatdozent*. Després de tot som una Universitat, no un balneari.

L'*Habilitation* només va arribar a ser una opció per les dones a partir de la liberalització d'Alemanya als anys vint.

El 1919 Noether va escollir l'article I.V. [14] per a la seva Tesi d'Habilitació i el va presentar a la universitat de Göttingen acompanyat dels dotze articles que ja havia publicat i de dos manuscrits addicionals, un dels quals [13] contenia una sèrie d'idees cabdals que van tenir un impacte profund en el desenvolupament de l'àlgebra abstracta moderna.

Finalment va aconseguir donar classes oficialment a la universitat, però com que la seva *Habilitation* no va ser legalment reconeguda, va haver de treballar de franc. Ja havia donat classes els cursos anteriors, però els anuncis oficials precisaven que eren

> ofertes per Herr Professor David Hilbert, donades per Frl. E. Noether,

sense que fos necessari matricular-se. Aquestes classes estaven esdevenint cèlebres i atreien a matemàtics de tot Europa.

Es desprèn ben clarament de la sol·licitud que va fer per a la seva *Habilitation* que Noether era conscient del context i de la importància que els seus resultats matemàtics tenien per a la física en general i per a les lleis de conservació de la mecànica en particular (a les quals es referia com integrals primeres). També va mencionar (cf. [6]) que el seu treball matemàtic

> sorgeix de la meva col·laboració amb Klein i Hilbert en el seu treball sobre la teoria general de la relativitat d'Einstein.

Estic segura que Noether era plenament conscient de la profunditat i la generalitat dels seus potents resultats, molt més enllà del que seria una simple verificació de les hipòtesis de Hilbert sobre la connexió entre la teoria general de la relativitat i el no compliment de les lleis de conservació local de l'energia.

Després d'haver sotmès la seva habilitació i del seu treball addicional sobre invariants diferencials en relativitat general [12], Noether va retornar a la seva línia principal de recerca matemàtica: l'àlgebra axiomàtica. El seu treball matemàtic es va transformar i es va tornar més conceptual. El punt d'inflexió es pot observar en l'article amb W. Schmeidler sobre operadors diferencials, "*Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzen ausdrücken*" [13].

En els deus anys següents, Noether va tenir una enorme influència en les matemàtiques del seu temps. Revisant les seves obres completes, trobem que uns deu dels seus articles estan dedicats a la teoria d'àlgebres (números 17, 32, 33, 34, 38, 39, 40, 41 i 42), la majoria dels quals van ser publicats entre els anys 1927 i 1933. Tot i així, ja hem dit que les contribucions més importants de Noether en aquesta àrea no es troben tant en les seves publicacions com en els seus cursos de Göttingen, en particular els dels hiverns de 1927/28 i 1929/30. Ella no va publicar directament molts dels seus resultats, sinó que més aviat va deixar aquesta tasca a van der Waerden, Hasse o Deuring, entre altres. Alexandrov, Weyl, i van der Waerden insisteixen en aquest punt: que ella preferia comunicar els seus resultats en viu. Així doncs, els documents publicats no expliquen la història completa. Sabem que molts matemàtics brillants van assistir als seus seminaris i a les seves classes, i es fa difícil endevinar fins a quin punt els va transmetre les seves pròpies idees. Els següents cursos van ser impartits per Noether a Göttingen:

| | |
|---|---|
| Winter 1924/25: | *Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen* |
| Winter 1927/28: | *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie* |
| Summer 1928: | *Nichtkommutative Algebra* |
| Summer 1929: | *Nichtkommutative Arithmetik* |
| Winter 1929/30: | *Algebra der hyperkomplexen Grössen.* |

El primer curs és mencionat a la introducció de *Moderne Algebra* de van der Waerden [20], i a [21], on van der Waerden escriu que

> un dels temes principals del curs fou la teoria de Wedderburn de les àlgebres sobre cossos arbitraris.

El mateix tema fou tractat i millorat en el curs que portava el mateix nom i que Emmy Noether va impartir el 1927/28. En aquest curs també es va donar un nou i complet tractament de la teoria de representacions de grups i àlgebres (v. [18]).

La difusió de l'obra d'Emmy Noether fou deguda, més que a les seves publicacions, als rics programes de recerca que proposava i als cursos que donava; als seus molts estudiants graduats i joves col·legues (Grete Herman, Köthe, Krull, Deuring, Fitting, Witt, Tsen, Shoda, Levitski, van der Waerden); als seus associats (Schmidt, Artin, Hasse, Alexandroff, Pontrjagin, Hopf); al fet de ser una professora que motivava i inspirava als seus estudiants; al seu esperit de col·laboració amb els demés; i, també, a les classes que impartia van der Waerden. Això va ser d'aquesta manera a pesar del seu poc talent pedagògic, que feia que només els més brillants assistissin a les seves classes impartides en aules que mai omplia. Hi hagué molts estrangers entre els seus estudiants. El seu grup d'estudiants era conegut com "Els nois de la Noether". Formaven un grup de recerca molt compacte i ella tenia gran cura de tots ells. Al "Mathematics Genealogy Project" estan llistats 750 descendents (v. l'annex de la pagina 33 per a més detalls).

Van der Waerden fou l'estudiant més devot d'Emmy Noether. Va arribar a l'hivern del 1924/25 i de seguida va aprendre les seves teories. El 1927 va impartir un curs sobre la teoria d'ideals. Van der Waerden exposava de manera brillant les idees d'Emmy Noether, les quals llavors van agafar fama i acceptació a Göttingen i d'aquí cap a les altres universitats. El seu llibre *Moderne Algebra*, el qual ha esdevingut un clàssic, inclou les idees i resultats d'Emmy Noether i encara avui és un llibre interessant.

El 1932 va ser conferenciant invitada al Congres Internacional de Zurich i la seva obra va rebre un reconeixement total. Podríem dir que va ser l'estrella del congrés.

Quan va haver de marxar d'Alemanya el 1933, ella volia anar a Moscow, on, ja feia un temps, havia impartit un semestre d'àlgebra, havia organitzat un curs de geometria algebraica i havia treballat amb Alexandrof i Pontrjagin (1928-1929). Però la burocràcia dels papers anava lenta i finalment va emigrar (com molts altres dels seus col·legues) als Estats Units. Pel fet de ser dona no va ser acceptada a l'"Institute for Advanced Study", a Princeton. Va ser-ho al Bryn Mawr College, un "college" femení de Pennsyvania. Allà va crear un petit grup de recerca i anava a Princeton per a seminaris i col·laboracions. A Bryn Mawr va ensenyar-hi només durant dos anys, ja que morí prematurament el 1935.

## 7. Contribucions a la Física

L'article d'Emmy Noether I.V., [14], va influir profundament la física del segle XX. A l'article es provaven dos teoremes i els seus recíprocs, la qual cosa revelava la connexió general entre simetries i les lleis de conservació de la física. Van conduir a un profund coneixement d'algunes lleis, com ara el principi de conservació de l'energia, del moment angular, etc., i foren un instrument cabdal en els grans descobriments de les simetries dels camps gauge al llarg del segle XX [2].

Al novembre de 1915, Emmy Noether escrivia a Ernst Fischer:

> Hilbert pretén fer unes xerrades la propera setmana sobre les seves idees relatives als invariants diferencials d'Einstein i, per tant, ... millor que estem preparats [5].

Tot i que la teoria general de la relativitat es completà l'any 1915, romangueren problemes oberts. En particular, el principi de la conservació local de l'energia era un tema controvertit. A la teoria general, l'energia no es conservava localment com a les teories clàssiques de camps (gravitació Newtoniana, electromagnetisme, hidrodinàmica, etc.). La qüestió de la conservació de l'energia a la teoria general havia deixat perplexos a molta gent des de feia dècades. En els seus primers dies, Hilbert anomenava aquest problema "la fallada del teorema de l'energia". En una carta a Klein [3], assegurava que aquesta "fallada" és un "fet característic de la teoria general" i que en comptes de tenir "teoremes d'energia propis", hom tenia "teoremes d'energia impropis". En una nota a Klein explica que li va demanar a Emmy Noether que aclarís el problema.

Emmy Noether va ser doncs enllistada per a la física, que era quelcom diferent de la seva línia principal de recerca (el desenvolupament de l'àlgebra abstracta moderna). Després de la descoberta de David Hilbert del principi variacional del qual se'n deduïen les equacions del camp de la relativitat general, David Hilbert, Felix Klein i d'altres a Göttingen es van interessar intensament per l'aleshores recentment completada teoria de la relativitat i l'ajut de Noether fou reclamat per clarificar la qüestió de la conservació de l'energia a la que ens hem referit abans.

Ella va començar a estudiar la teoria de la relativitat i aviat va clarificar el problema. Això la conduí a dos articles: [12] i [14]. Hermann Weyl caracteritzà aquests dos articles ([19])de la manera següent:

> La formulació matemàtica genuïna i universal de dos dels aspectes més representatius de la teoria de la relativitat general: en primer lloc, la reducció del problema dels invariants diferencials a un altre purament algebraic mitjançant l'ús de coordenades normals; i en segon lloc, les identitats entre les parts esquerres de les equacions d'Euler d'un problema de variacions ...

Segons [15] Einstein escriu a Hilbert el següent sobre el primer article:

> Ahir vaig rebre un article molt interessant sobre formes invariants de la senyoreta Noether. Estic realment impressionat que hom pugui entendre aquestes qüestions des d'un punt de vista tan general. No li hauria fet cap mal a la vella guàrdia de Göttingen aprendre alguna cosa d'ella ...

La discussió i les demostracions dels teoremes de I.V. aclaria i resolia qüestions sobre conservació de l'energia, com reconeixia Hilbert en el seu article de 1924.

Considerem la qüestió en el llenguatge actual. En la terminologia matemàtica moderna, la teoria de la relativitat general és una teoria gauge i el grup de simetria de la teoria és el grup de gauge. És el grup de tots els canvis de coordenades que tenen derivades contínues, sovint anomenat el grup dels canvis de coordenades generals. És un grup de Lie que té un nombre infinit (amb la potència del continu) de generadors infinitesimals independents. En la terminologia de Noether, un grup així és un grup continu infinit. El grup de simetria de la relativitat especial, el grup de Poincaré, és un subgrup de Lie del grup dels canvis de coordenades generals. Té 7 generadors infinitesimals independents. Noether s'hi refereix com el grup continu finit. La diferència entre un grup de Lie amb un nombre finit o numerable de generadors infinitesimals independents i un grup continu infinit és el que diferencia els teoremes I i II de l'article I.V. El teorema I val quan hom té un grup continu finit de simetries, mentre que el teorema II val en el cas que el grup sigui continu infinit. Les teories de camps amb un grup continu finit de simetries presenten, com ho anomenava Hilbert, 'teoremes d'energia propis'. Físicament, en aquestes teories hom té una densitat d'energia localitzada i conservada; i hom pot demostrar que en qualsevol volum arbitrari el flux net d'energia a través de la frontera és igual a la taxa de decreixement per unitat de temps de l'energia dins del volum. Això se segueix del fet que el tensor d'energia-moment té divergència zero. D'altra banda, a la relativitat general, no té sentit parlar de la localització de l'energia. Hom pot definir una quantitat que tingui divergència zero anàlogament al tensor de densitat d'energia-moment de la relativitat especial, però és dependent del gauge: és a dir, no és covariant sota canvis de coordenades generals. Per tant, el fet que tingui divergència zero no implica cap llei de conservació local de l'energia. Així, en aquestes teories hom té, com ho veia Hilbert, 'teoremes d'energia impropis'.

Un aspecte essencial per a la física del article I.V. de Noether és la claredat que els seus teoremes tenen per la nostra comprensió del principi de conservació de l'energia. En la introducció de N. Jacobson als Collected Papers de Noether aquest cita a Gursey [16]:

> Abans de Noether el teorema de conservació de l'energia estava envoltat de misteri, portant-nos cap els obscurs sistemes físics de Mach i

> Ostwald. La simple i profunda formulació matemàtica de Noether va fer molt per aclarir la física.

Noether va demostrar en el seu Teorema I que el principi de conservació de l'energia és conseqüència de la simetria sota translacions en el temps. Això s'aplica al grup de transformacions de Lorentz i a les translacions a l'espai-temps. D'altra banda, en relativitat general la conservació de l'energia pren una forma diferent com es podrà veure més endavant. El Teorema II de Noether s'aplica en el cas de la relativitat general i es pot veure que ella va provar l'afirmació de Hilbert que en aquest cas hom té "teoremes d'energia impropis", i que això és "un aspecte característic de la teoria". Això es degut al fet que la teoria és una teoria gauge; és a dir, que té un grup de simetries infinit i continu del qual les translacions en el temps en són un subgrup. De fet defineix, d'una manera generalment, defineix relacions de divergència "impròpies", les quals s'anul·len quan se satisfan les equacions del camp, cosa que correspon a un subgrup continu finit d'un grup continu infinit, però que generalment no tenen les propietats requerides d'invariància o covariància respecte del grup més gran.

Per exemple, en relativitat general es pot construir un (pseudo) tensor d'energia-moment amb divergènce nul·la, però resulta que depèn del gauge perquè no és covariant per transformacions generals de coordenades (és per això que se'n diu més pròpiament un pseudotensor). Aquests pseudotensors són covariants respecte les transformacions lineals del grup de Poincaré i poden ser utilitzats en regions de l'espai-temps que estiguin allunyades de fonts gravitatòries per derivar un principi de conservació de l'energia [2].

Necessitem tractar amb cert detall teories de camps de la matèria, la gravetat, l'electromagnetisme, etc., tant pel que fa a la relativitat especial com a la general. En relativitat especial aquestes teories tenen un "teorema d'energia propi", en el sentit de Hilbert, i els "teoremes d'energia propis" donen un principi local de conservació de l'energia. En relativitat general, d'altra banda, el teorema d'energia esdevé impropi pel fet que el tensor energia-moment que intervé en el teorema depèn del gauge. Hi ha transferència d'energia cap i des del camp gravitatori i no té cap sentit parlar d'una localització definida de l'energia del camp gravitatori relativista. En conseqüència, no tenim un principi local de conservació de l'energia en les regions de l'espai-temps en què hi ha camps gravitatoris. Las teories que estem tractant són teories de camp que poden ser formulades en termes d'un principi variacional; és a dir, les equacions del camp poden ser obtingudes del principi de Hamilton. Aquesta va ser la més gran contribució de Hilbert a la teoria de la relativitat general. Ell va provar que les equacions de camp poden deduir-se del principi de Hamilton, i el treball de Noether es desenvolupà a partir d'això.

## 8. Contribució a l'Àlgebra

Entre els anys 1920 i 1932, Emmy Noether va crear el treball matemàtic que ha fet el seu nom immortal. La importància del seu treball va ser immediatament reconeguda pels seus col·legues de Göttingen i, a partir d'allà, a la resta del món. En el Congrés Internacional de Zuric el 1932, va donar la conferència plenària "Algebras and their Application to Number Theory". I quan va morir, el 1935, tothom va estar d'acord que ella, més que ningú altre, havia creat l'àlgebra moderna del segle vint.

Alexandrov, el seu antic col·laborador, en la necrològica [15] que en la seva memòria va escriure el 5 de novembre de 1935, deia:

> Però quan pensem en Emmy Noether com a matemàtica, tenim al cap no els seus treballs inicials, importants com són en resultats concrets, sinó el principal període de la seva recerca que comença el 1920 quan ella esdevé la creadora d'una nova direcció en l'àlgebra i la directora, la més consistent i eminent representant d'una certa doctrina matemàtica, tota la que es caracteritza amb les paraules "matemàtica conceptual".
>
> ··· ella mateixa es va disposar a oblidar tot el que havia fet els primers anys de la seva vida científica, perquè considerava que aquells resultats havien estat una desviació del camí principal de la seva recerca, que era la creació d'una àlgebra general, abstracta.
>
> Emmy Noether es va iniciar en el seu propi camí matemàtic, totalment original, en els anys 1919/1920. Ella mateixa data el començament d'aquest període fonamental en el la seva recerca amb el famós treball en col·laboració amb V. Schmeidler [13]. En aquest sentit, aquest article és el pròleg de la seva teoria general d'ideals que va recollir en la clàssica memòria "*Idealtheorie in Ringbereichen*".

> A partir de 1927, com que creixia constantment la influència de les idees d'Emmy Noether, el renom acadèmic de l'autora de les idees va créixer també de forma similar. Mentre, la direcció del seu treball anava canviant cap a les àrees d'àlgebra no commutativa, teoria de representacions i aritmètica general de sistemes hipercomplexes.
>
> Emmy Noether va viure per poder veure el complet reconeixement de les seves idees. En el període 1923-1925, es va comprometre fortament en demostrar la importància de les teories que estava desenvolupant. El 1932, en el Congrés Internacional de Zuric, els seus esforços es van veure totalment acomplerts. La conferència que va impartir en el Congrés va significar un vertader triomf de la línia de recerca que ella presentava. En aquest punt, podia haver revisat el camí matemàtic que havia hagut de recórrer no només amb íntima satisfacció, sinó adonant-se del reconeixement complet i incondicional de la comunitat matemàtica. El Congrés a Zuric va marcar el punt més alt de la seva posició científica internacional.

Aquesta avaluació de la seva posició en el "Mathematics Hall of Fame" no va canviar en els següents 50 anys, i es manté fins els nostres dies. Nathan Jacobson, l'editor de la seva Obra Completa [16], el 1982 va escriure en la Introducció:

> Emmy Noether va ser una de les personalitats més influents en la matemàtica d'aquest segle. El desenvolupament de l'àlgebra abstracta, que és una de les més distingides innovacions de la matemàtica del segle vint, és deguda a ella — pels articles publicats, els seminaris, i per la seva influència en els seus contemporanis. Per ara, les seves contribucions han estat tan profundament absorbides en la nostra cultura matemàtica que rarament li són atribuïdes. Per tant sembla més adequat, en aquesta introducció a la seva obra completa, mirar de subratllar les seves principals contribucions a l'àrea de les matemàtiques genèricament coneguda com àlgebra "abstracta", "conceptual", o "moderna".

Per a Hilbert el punt de vista axiomàtic tenia com a objectiu la clarificació lògica. Noether, en canvi, el va convertir en un mètode potent per a la recerca matemàtica. Com va dir Herman Weyl [19]:

> Noether va aplicar el mètode axiomàtic amb una habilitat excepcional, encaixava amb la seva naturalesa i va fer de l'àlgebra un 'Eldorado de l'axiomàtica',

i de l'àlgebra es va estendre a la resta de la matemàtica.

Les contribucions principals d'Emmy Noether (i de R. Brauer) a la teoria d'àlgebres van ser les següents:

- aplicacions de conceptes algebraics abstractes, com la teoria d'ideals, a la teopria estructural d'àlgebres;
- unificació de la teoria de representacions de grups finits i la teoria d'àlgebres semisimples;
- la teoria de cossos de descomposició;
- aclarir l'estructura interna de les àlgebres simples, com el teorema de Skolem-Noether o el teorema del doble centralizador;
- cohomologia: conjunts factors i productes creuats;
- aplicacions de la teoria d'àlgebres a la teoria algebraica de nombres i a la teoria de classes de cossos.

Es pot sostenir l'opinió que el primer treball important de Noether en àlgebra es troba en el curs que va donar a Göttingen la tardor de l'any acadèmic 1927/28: "*Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*". En realitat aquestes notes gairebé no presenten resultats importants nous. Tot i això constitueixen una de les arrels principals del que ara anomenem "àlgebra moderna". Van der Waerden va prendre notes d'aquest curs, en va preparar la seva publicació (no. 34 en les obres completes) i el va incorporar, en continguts i esperit, en el seu propi llibre *Moderne Algebra*. La importància de molts dels principis fonamentals de l'àlgebra, que avui resulta óbvia, va ser indicada per primera vegada en aquest curs: teoremes d'isomorfisme, el teorema de Jordan-Hölder, la descomposició de Krull-Schmidt, semisimplicitat, reduïbilitat completa, extensió d'anells, teoria estructural d'anells no commutatius, comportament del centre i, sobretot, el fet que la teoria de repreentacions de grups finits es pot basar en la teoria d'àlgebres semisimples, aspecte que a la pròpia Noether li semblava el més important.

En aquest curs hi faltaven encara moltes coses, com la teoria estructural d'àlgebres simples, sistemes factorials i productes creuats o una visió clara de la importància de la separabilitat. El semestre d'estiu següent Noether va continuar amb el seu curs, en el qual va provar el que es coneix com a teorema de Noether–Skolem, una fita essencial de tota la teoria, que afirma que qualsevol automorfisme d'una àlgebra simple és interior (Dickson i Wedderburn havien provat i fet servir casos especials d'aquest teorema en la seva teoria d'àlgebres cícliques i productes creuats). Noether, tal com explica a la introducció de l'article 40 de les seves obres completes, no coneixia encara el teorema del centralitzador (una àlgebra semisimple és igual al seu doble centralitzador), estretament relacionat amb el teorema de Noether–Skolem, i que fou provat per Deuring el 1935, [4].

Durant el semestre d'hivern de 1929/30 Noether va donar una altra vegada un curs sobre "*Algebra der hyperkomplexen Grössen*". Les notes del curs van ser preses per Deuring, però només es van publicar a les seves obres completes. El contingut matemàtic d'aquests cursos es va difondre abans de la seva publicació a través de van der Waerden, de l'exposició de Hasse el 1932 sobre àlgebres cícliques i productes creuats, a [1], del propi article de Noether (núm. 40 de les seves obres ocmpletes) i del llibre de Deuring del 1935 [4].

No està clar per què Noether no va publicar mai les seves notes de classe sobre una de les seves descobertes més significatives, la relació entre la teoria d'àlgebres i la cohomologia de Galois, incloent els teoremes de Wedderburn, l'estructura de les àlgebres simples, el teorema de Noether–Skolem, els teoremes de centralitzadors, cossos de descomposició, sistemes factorials i productes creuats. Com a aplicacions Noether prova el teorema de Wedderburn sobre anells de divisió finits, la classificació de Frobenius de les àlgebres de divisió reals i quelcom que apuntava al futur: el resultat principal sobre els cossos de classes, $\mathrm{Br}(L/K) \sim \mathrm{Gal}(L/K)$, per a l'extensió cíclica d'un cos $p$–àdic. La teoria de representacions de grups finits es menciona només breument i restringida a grups abelians. La teoria d'àlgebres va tenir també implicacions a la teoria algebraica de nombres i a la teoria de cossos de classes. Aquí és encara més difícil que a la teoria algebraica de precisar el que es pot atribuir a Noether. En un manuscrit del 1935 Weyl [19] escriu:

> Hasse reconeix que deu la inspiració dels seus meravellosos articles sobre la connexió entre quantitas hipercomplexes i la teoria de cossos de classes a observacions informals de Noether. Ella podia deixar anar una observació profunda com la següent: " El símbol del residu de la norma no és res més que àlgebra cíclica" en el seu estil lapidari i profètic sorgit de la seva poderosa imaginació.

Parlant en general, Noether probablement fou la primera persona en veure clarament que la teoria de cossos de classes es podria (i potser s'hauria) de basar en el formalisme de la cohomologia de Galois. Un punt important de la teoria algebraica de nombres és el resultat de Brauer, Hasse i Noether que sobre un cos de nombres algebraic tota àlgebra de divisió és cíclica (No. 38 de les seves obres completes). Tanmateix el pas essencial de la demostració és el principi local-global de Hasse per al grup de Brauer, essent les contribucions de Brauer i Noether relativament menors. Per altra banda, la seva conferència del 1932 al congrés de Zuric, i l'article número 41 de les seves obres completes, contenen un més que remarcable esboç de com es pot usar la cohomologia de Galois. Primer prova el teorema 90 de Hilbert (degut a Schur i Speiser, però poc conegut en aquell moment), i tot seguit desenvolupa, en essència, la cohomologia del grup d'ideals i el grup de classes d'ideals, basant-se, naturalment, en el principi local-global per al grup de Brauer. Aquestes idees van conduir directament a la teoria de cossos de classes d'Artin–Tate (v. [18]).

Finalitzaré amb unes cites de Hermann Weyl de 1935 (v. [19]):

> ...En els anys que vaig estar a Göttingen, 1930-1933, ella era sens dubte el centre més fort d'activitat matemàtica allà, vista la fertilitat del seu programa d'investigació científica i la seva influència sobre un nombrós cercle de deixebles ... La seva manera conceptual i axiomàtica de pensar l'àlgebra es manifesta especialment en el seu article sobre operadors diferencials ... És aquí que apareix per primera vegada l'Emmy Noether que tots coneixem, la que amb el seu treball canvià la cara de l'àlgebra ... La seva total significació pel que fa a l'àlgebra no es pot inferir només partint dels seus articles, i cal tenir en compte la seva capacitat inspiradora i el fet que molts dels seus suggeriments van cuallar en els treballs dels seus deixables i col·laboradors
>
> ... La seva existència era propera a la dels seus deixebles; els apreciava i s'interessava pels seus afers personals ...
>
> ... Aquesta capacitat de destil·lació la va demostrar, per exemple, amb la seva teoria del producte creuat, en la qual gairebé tots els fets havien ja estat trobats per Dickson i per Brauer ...
>
> ... El seu cor no coneixia la malícia; no creia en el mal —de fet, mai es pogué imaginar que pogués tenir un paper entre les persones

... Fou una gran matemàtica, crec fermament que la més gran, i fou una gran dona ... I de totes les que he conegut, ella fou certament una de les més felices ...

... La seva força provenia de la seva habilitat per operar d'una manera abstracta amb els conceptes. A ella no li calien exemples concrets per arribar a nous resultats ... Estava dotada de la més viva imaginació, la qual li servia per visualitzar connexions remotes, i sempre s'esforçava per trobar punts d'unificació. D'aquesta manera cercava els aspectes essencials dels fets coneguts, els ordenava mitjançant conceptes generals apropiats, trobava un punt des del qual es pogués contemplar la totalitat, netejava l'objecte considerat de tot el que fos superflu, i aconseguia així una forma tant simple i nítida que es podia aventurar a entrar en el nou territori amb les més grans possibilitats d'èxit.