EMMY NOETHER I L'ALGEBRAÏTZACIÓ DE LA TOPOLOGIA

PERE PASCUAL GAINZA

RESUM. Aquestes notes són la versió escrita de la conferència pronunciada el 18 de febrer de 2009 a la Jornada Noether de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC. S'hi descriuen alguns dels canvis de la Topologia Algebraica i més concretament de l'homologia, al voltant dels anys 20 sota la influència de Emmy Noether. S'ha procurat mantenir el caràcter expositiu de la conferència.

1. INTRODUCCIÓ

La Comissió de l'Any Noether de la Facultat de Matemàtiques Estadística de la UPC em va demanar que fes una presentació de la contribució d'Emmy Noether a la Topologia. És un fet ben assumit que Emmy Noether va tenir un paper molt important en la formulació de la Topologia, i en particular de la Topologia Algebraica, tal i com l'entenem avui en dia, però quin va ser aquest rol?

Emmy Noether és una figura fonamental de les matemàtiques de la primera meitat del segle XX; i és en aquest període que la Topologia esdevé una branca pròpia, alliberant-se de les seves servituds respecte de l'anàlisi i la geometria, alhora que col·laborant al seu desenvolupament conjunt. És lògic preguntar-se doncs si Emmy Noether va intervenir en el desenvolupament de la Topologia i en quina forma.

El llibre de Jean Dieudonné *History of Algebraic and Differential Topology* és segurament el lloc més adient per a començar el nostre recorregut. Hi trobem tres cites a Emmy Noether, totes elles menors (pp. 38, 54 i 68), i en cap d'elles es fa referència a cap treball científic de Noether ni a cap resultat concret. Les cites són referències a la influència d'Emmy Noether en el treball de dos joves topòlegs del moment que crearien una escola de primer ordre, Pavel Alexandroff i Heinz Hopf. Com es va produir aquesta influència? Emmy Noether es trobava als anys 20 immersa en l'alliberament de l'àlgebra del garbuix de matrius i determinants que la dominaven, substituint-los per mòduls i morfismes, i va ser aquesta visió conceptual la que va transmetre als seus col·laboradors.

Cap els anys 1930, Alexandroff i Hopf van imaginar un tractat complet que descrivís els nombrosos avenços de la Topologia, del qual van escriure el primer volum *Topologie*, iniciant un procés que ha esdevingut usual en matemàtiques i que consisteix en preveure diversos volums sobre un tema per quedar-se només amb el primer, desbordats pels nous punts de vista que s'anaven produint. Al final de la introducció del *Topologie*, Alexandroff i Hopf fan un elogi d'Emmy Noether i la seva influència en la forma i en la presentació de la matèria tal i com apareix en aquell volum:

> La fonamentació de la topologia en la teoria de grups que segueix la nostra exposició es deu enterament a E. Noether [...] Va ser necessària tota l'energia i el temperament d'E. Noether per tal que aquesta algebraïtzació fos acceptada pels topòlegs, i per tal que esdevingués la bastida bàsica en la qual s'estructuren les qüestions i els mètodes de la topologia.

Aquesta cita reflecteix resumidament la intervenció d'Emmy Noether en el desenvolupament de la Topologia. Hi ha un abans i un després d'Emmy Noether, un pas de la Topologia Combinatòria inicada per Poincaré a la Topologia pròpiament Algebraica. Aquesta transició va ser implementada per Alexandroff, Hopf i molts altres matemàtics sota la seva influencia, i també per altres investigadors que treballaven independentment, com ara Vietoris.

En les notes que segueiexen farem un esboç de com estava la Topologia, i més precisament l'Homologia, abans de Noether i com va canviar sota la seva influència, seguint el corrent d'algebraïtzació de la matemàtica dels inicis del segle XX. Estem interessats en mostrar el pas de la intuïció de Riemann a l'aritmetització de Poincaré i la formulació algebraica propiciada per Noether.

Hem estructurat l'exposició a partir de tres fites que hem considerat rellevants per a l'evolució de la Topologia Algebraica que volem analitzar:

- El treball pioner de Riemann (1851, 1857) i Betti (1871), en el qual introdueixen els ordres de connexió d'una varietat.
- La publicació, a partir de l'any 1895, de l'*Analysis situs* de Poincaré i els seus complements, on introdueix l'homologia i demostra alguns resultats fonamentals, com ara el teorema de dualitat.
- La coincidència, el curs 1926/27, de Noether, Alexandroff i Hopf a Holanda, on visiten Brouwer i estudien els seus mètodes i resultats, i l'assistència regular d'Alexandroff i Hopf als seminaris de Noether a Göttingen (amb una estada a Princeton, 27/28).

Tractant-se d'una exposició informativa, proposem un recorregut descriptiu de la situació. Així, aquestes notes no tenen altre objectiu que incentivar el lector interessat a aprofundir en la història de la topologia a partir de la bibliografia ressenyada al final del text.

Vull agrair a l'Abdó Roig el seu ajut per la lectura d'alguns dels textos en alemany. Les traduccions dels diversos paràgrafs que incloem en aquestes notes són aproximades i pretenen, sobretot, reflectir l'esperit d'allò que s'hi diu. Agraeixo al professor Sebastià Xambó els comentaris i observacions sobre una primera redacció d'aquest article.

2. El treball de Riemann i Betti

El nostre recorregut s'inicia amb Bernhard Riemann i els seus estudis de les funcions de variable complexa i de les funcions abelianes, publicats els anys 1851 i 1857, [R1, R2]. És en aquests escrits on Riemann introdueix i analitza l'*ordre de connexió* d'una regió. El paper emergent dels conceptes topològics com a suport de l'anàlisi queda palès en les paraules següents (cf. [R2]):

> en l'estudi de les funcions que provenen de la integració de les diferencials totals, alguns teoremes de l'analysis situs són gairebé imprescindibles. [...] on s'estudien únicament les relacions de situació dels llocs i les regions, fent abstracció de les relacions mètriques.

En la *Inauguraldissertation* de 1851, Riemann considera una funció holomorfa $f(z)$ definida en un domini D del pla, fixa un punt z_0 de D i analitza la dependència de la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz,$$

respecte del camí utilitzat en la integració. Pel teorema de Cauchy, que Riemann també demostra, es té

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0, \tag{1}$$

si γ és un camí tancat que envolta una superfície de D.

Si el camí γ envolta una singularitat de la funció $f(z)$, Riemann aïlla aquesta singularitat mitjançant una circumferència al seu voltant. La fórmula (1) segueix sent vàlida integrant sobre la corba resultant d'adjuntar una nova línia (una secció transversa ℓ) entre aquesta circumferència i γ.

Així, a partir de la teoria de funcions, Riemann entreveu una classificació de les superfícies: anomena *simplement connexes* aquelles superfícies per a les quals no cal afegir cap secció trasversa per tal que se satisfaci (1) per a les corbes tancades, mentre que les altres les classifica segons el nombre de seccions transverses independents que cal afegir perquè esdevinguin simplement connexes.

Els comentaristes posteriors del treball de Riemann assenyalen dues deficiències de la noció d'ordre de connexió anterior: d'una banda, tot i que permet distingir (llevat d'homeomorfisme) entre superfícies compactes sense vora (remarquem que, a l'època, aquestes superfícies eren sempre orientables), aquest no és un invariant complet de les superfícies amb vora; i de l'altra, la demostració de Riemann de la invariància topològica de l'ordre de connexió és obscura i es basa en fets assumits com a intuïtivament evidents que resultarien parcialment falsos.

Enrico Betti va completar el treball de Riemann en un article publicat l'any 1871, [B], en el qual estén la noció d'ordre de connexió per a varietats de dimensió qualsevol. Anotem, de passada, que l'article de Betti marca l'inici de la topologia de les varietats en dimensió superior.

Seguint una definició alterntiva donada pel propi Riemann de l'ordre de connexió per a les superfícies, Betti defineix l'ordre de connexió d'una varietat com segueix:

> Si, en un espai R de dimensió n, podem imaginar un nombre p_m d'espais tancats de dimensió m, que no formin el contorn d'una part connexa d'un subespai de dimensió $m+1$ i tal que tot altre espai de dimensió m formi, ell mateix o amb la totalitat dels p_m espais, el contorn d'una porció connexa de dimensió $m+1$, direm que R té connexió p_m pel gènere m.

Betti contrasta aquests conceptes sobre uns quants exemples, que avui consideraríem elementals (un el·lipsoide, l'espai entre dues esferes concèntriques, l'espai interor d'un un tor, o l'espai entre dos tors), i enuncia el següent teorema d'invariància:

Teorema. *Si t espais tancats de dimensió m, $A_1, \ldots, A_t$ no formen el contorn d'un subespai connex de dimensió $m+1$ de R, però si que ho fan si afegim un altre espai tancat de dimensió m qualsevol, i si un altre sistema $B_1, \ldots, B_{t'}$ d'espais tancats de dimensió m té les mateixes propietats, aleshores $t = t'$.*

La prova d'aquest resultat proposada per Betti segueix de prop la prova de Riemann per a superfícies i, una vegada més, es basa en alguns lemes acceptats sense demostració que no resistiran les anàlisis efectuades pels seus contemporanis.

En definitiva, Riemann i Betti introdueixen els ordres de connexió d'una varietat, però el concepte està mancat de precisió i els resultats que enuncien es basen en una intuició que resulta parcial, i fins i tot errònia. No disposen d'una metodologia adequada per analitzar aquest nou concepte. Aquest és l'estat de l'Analysis Situs abans de l'arribada de Poincaré.

3. L'*Analysis Situs* de Poincaré

Henri Poincaré publica l'any 1895 el transcendental article *Analysis Situs*, [P1]. Al llarg de les més de cent pàgines d'aquest article, i dels complements que el seguiran pocs anys després ([P2]), Poincaré estableix les nocions fonamentals de la Topologia Algebraica sobre les que s'edificarà aquesta nova àrea de la matemàtica.

Poincaré, com Riemann el 1857, justifica el seu interés pels conceptes bàsics de la Topologia per la necessitat de desenvolupar aquesta nova disciplina com a eïna fonamental de les seva recerca en diferents camps. Aquesta punt de vista es resumeix en el paràgraf següent ([P1]):

> Tots els diferents camins en els quals m'he interessat darrerament em conduixen a l'*Analysis Situs*. Tenia necessitat dels resultats d'aquesta Ciència pel meu estudi de les corbes definides per les equacions diferencials i per estendre'l a les equacions diferencials d'ordre superior, i, en particular, a les del problema dels tres cossos. En tenia necessitat per l'estudi de les funcions no uniformes de dues variables. En tenia necessitat per l'estudi de les integrals múltiples i per a l'aplicació d'aquest estudi al desenvolupament de la funció de pertorbació. [...]

La Topologia, que apareix com una disciplina auxiliar de les matemàtiques, esdevé mitjançant el treball de Poincaré una teoria amb continguts i problemes propis. En els següents anys, seran altres autors els qui resoldran alguns dels problemes plantejats per les idees de Poincaré.

No pretenem analiztar aqui les múltiples contribucions de Poincaré en l'*Analysis Situs* (per a un estudi més aprofundit, consulteu [D2], [Ja], especialment l'article de Sakarian, i [N]), sinó centrar-nos en aquells aspectes de l'homologia que ens seran útils en la nostra història. Assenyalem però, a tall d'exemple dels temes que no analitzarem, que és en aquest article en el qual Poincaré introdueix el grup fonamental d'un espai topològic.

Poincaré inicia l'*Analysis Situs* fixant el concepte de varietat, que Betti havia utilitzat en un sentit un tant imprecís. Per a Poincaré, una varietat M és un subconjunt de $\mathbb{R}^N$ donat per equacions i desigualtats

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_1,\ldots,x_N) &= 0, \quad 1\le\alpha\le p,\\ \Phi_\beta(x_1,\ldots,x_N) &> 0, \quad 1\le\beta\le q, \end{aligned}$$

essent les funcions que apareixen derivables amb continuïtat.

Per tal de formalitzar la definició d'ordre de connexió de Riemann-Betti, on es parlava de *contorn d'un espai*, Poincaré defineix la *frontera* de la varietat M com el conjunt donat per

$$\{F_\alpha = 0,\ 1 \leq \alpha \leq p; \quad \Phi_\beta = 0,\ \Phi_\gamma > 0,\ 1 \leq \beta \neq \gamma \leq q\}.$$

Per a Poincaré les varietats són el que avui anomenaríem subvarietats orientades d'$\mathbb{R}^n$ definides implícitament. Sovint, al llarg de l'article de Poincaré, les hipòtesis són implícites, donades pel context.

Si $v_1, \ldots, v_\lambda$ són subvarietats compactes de M de dimensió $q-1$ tals que la seva unió constitueix la *vora completa* d'una subvarietat q-dimensional de M, Poincaré escriu

$$v_1 + \cdots + v_\lambda \sim 0,$$

i diu que és una *homologia* entre les v_i, i afageix una frase que representa un gir fonamental en la definició de l'homologia:

> les homologies es poden combinar com equacions ordinàries.

És a dir, Poincaré considera les subvarietats de M com elements d'una nova estructura en la qual es poden realitzar les operacions aritmètiques bàsiques, la suma i la resta. És potser el primer lloc en la història de les matemàtiques on es considera el grup abelià lliure generat per un conjunt; tot i que, formalment, Poincaré no considera el grup abelià, sino l'aritmètica subjacent.

Aquesta formalització és una mostra d'un procés que Poincaré aplica al llarg de l'*Analysis Situs*, el de substituir la intuició espacial, vaga i poc concreta, per consideracions aritmètiques, més adaptades als raonaments i càlculs matemàtics. Una situació similar s'estava donant en l'anànalisi matemàtica, sobretot amb el treball de K. Weierstrass, conformant allò que F. Klein va anomenar l'*aritmetitació de les matemàtiques*.

Per a Poincaré, aquesta aritmetització de les subvarietats de dimensió q respon a la geometria de la varietat M. Així, el sentit de nv no és altre que el d'una suma d'n-subvarietats $nv \sim v_1 + \cdots + v_n$, *lleugerament* diferents de v, terme imprecís, però que responia a la intuició; mentre que el sentit de $-v$ correspon al canvi d'orientació de la subvarietat.

Un cop establerta la noció d'homologia i de depència lineal associada, Poincaré defineix els nombres de Betti de M, b_i, $0 \leq i \leq \dim M$, segons

$$b_i \; := \; \text{nombre màxim de subvarietats compactes i connexes de dimensió } i \text{ que són independents,}$$

on hem utilitzat la notació moderna (originalment Poincaré defineix uns nombres de Betti P_i tals que $b_i = P_i - 1$), i accepta implícitament que aquesta definició coincideix amb la d'ordre de connexió de Riemann-Betti, basant-se en part en els càlculs que efectua per als exemples analitzats per Betti, on troba aquesta coincidència. Per la pròpia definició, els nombres de Betti són invariants diferencials de les varietats, per la qual cosa no li cal plantejar el problema de la seva invariància.

Els dos resultats fonamentals referents als nombres de Betti de l'*Analysis Situs* són:

Teorema de dualitat. *Si M és una varietat compacta, connexa, orientable i de dimensió n, aleshores*

$$b_{n-i} = b_i.$$

Característica d'Euler-Poincaré. *Si α_i és el nombre de símplexs de dimesió i d'una triangulació de M, aleshores $\sum (-1)^i \alpha_i$ és independent de la tiangulació.*

Tot i l'esforç de fonamentació de Poincaré, el seu treball té algunes llacunes, com assenyala l'any 1898 el matemàtic holandès Poul Heegaard. En la seva tesi, Heegaard prova que si M és la varietat de dimensió 3 intersecció del con $z^2 = xy$ amb el cilindre $|x|^2 + |y|^2 = 1$ a $\mathbb{C}^3$, aleshores

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0,$$

contradient el teorema de dualitat establert per Poincaré. Analitzant aquest exemple, Poincaré observa dos fets importants. D'una banda, que Heegaard utilitza la definició d'ordre de connexió de Riemann-Betti, cosa que mostra que és diferent de la definició de nombre de Betti de Poincaré, i de l'altra, que la prova del teorema de dualitat va bé indistintament de la definició que es prengui. Es fa palesa un cop més la necessitat d'una bona fonamentació de la Topologia que permeti un tractament més rigurós dels conceptes involucrats.

Quina és la diferència entre la definició de Riemann-Betti i la de Poincaré? L'ordre de connexió q-èsim de Riemann-Betti és el màxim nombre de subvarietats compactes, connexes i *diferents* v_i tals que la unió no és vora d'una subvarietat de dimensió $q+1$.

Això no impedeix que existeixin enters n_i tals que

$$n_1 v_1 + \cdots + n_\lambda v_\lambda \sim 0,$$

possibilitat que sí contempla Poincaré. Dit altrament, amb Poincaré es tenen en compte per primera vegada els fenòmens de torsió. Un exemple elemental d'aquesta situació, que s'imparteix en qualsevol curs de Topologia Algebraica, el dóna l'espai projectiu real: a $\mathbb{P}^3$ hi ha un $\mathbb{P}^1$ que no és vora, però si que ho és $2\mathbb{P}^1$.

En el primer dels complements a l'Analysis Situs, [P2], Poincaré fa un pas endavant en el camí d'aritmetització de la topologia: reformula la definició d'homologia, introduint els *complexos simplicials* mitjançant una triangulació T de la varietat M (que Poincaré suposa que vé donada d'antuvi), el que donarà lloc a l'anomenada *Topologia Combinatòria*.

Així, Poincaré parteix d'una triangulació T amb cel·les q-dimensionals orientades a_i^q, $1 \leq i \leq \alpha_i$. Donades cel·les a_i^q, a_j^{q-1}, defineix el nombre d'incidència

$$\varepsilon_{ij}^q = [a_i^q : a_j^{q-1}] = \pm 1, 0.$$

segons que a_j^{q-1} formi part o no de la vora de a_i^q, i en cas afirmatiu, $+1$ o -1 segons que l'orientació induïda sobre a_j^{q-1} coincideixi o no amb l'original.

Seguidament considera les cadenes (el terme *cadenes* es deu a Alexander)

$$\sum \lambda_i a_i^q$$

i defineix la vora d'una cadena com

$$\sum \lambda_i \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1},$$

establint la relació

$$\sum \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

quan la cadena és una vora. Demostra, a més, que la vora d'una cadena que és vora, és zero; és a dir, el que ara escrivim com la relació fonamental $\partial^2 = 0$.

Poincaré organitza els nombres d'incidència mitjançant una matriu de tipus $\alpha_q \times \alpha_{q-1}$, la *matriu d'incidència*

$$E_q = (\varepsilon_{ij}^q),$$

i estableix un resultat fonamental que relaciona aquestes matrius amb els nombres de Betti, tal com ell els havia definit a l'*Analysis Situs*. En efecte, Poincaré utilitza el teorema de Frobenius (del qual, de fet, en dóna una demostració independent) segons el qual la matriu d'incidència admet una reducció en la forma $PE_qQ = (\rho_{ij})$, on P i Q són matrius unimodulars, amb

$$\rho_{ij} = 0, i \neq j, \quad \rho_{ii} | \rho_{i+1,i+1}, \quad \text{i}$$

$$\rho_{ii} = 0 \Leftrightarrow i > \gamma_q = \text{rang } E_q.$$

Poincaré demostra aleshores la relació fonamental

$$b_q = \alpha_q - \gamma_q - \gamma_{q+1}. \tag{2}$$

A partir d'aquest punt, el teorema de dualitat i el de la característica d'Euler es dedeuixen fàcilment:

- Pel que fa a la dualitat, Poincaré considera la *triangulació dual* T^* de T i observa que la matriu d'incidència corresponent és la transposta de la matriu d'incidència de T, més concretament, que $E^*_{n-p+1} = E^t_p$. Per tant, $\gamma^*_{n-p+1} = \gamma_p$, i com $\alpha^*_{n-p+1} = \alpha_{p-1}$, de (2) se segueix que

  $$b^*_{n-p+1} = \alpha^*_{n-p+1} - \gamma^*_{n-p+1} - \gamma^*_{n-p+2} = \alpha_{p-1} - \gamma_p - \gamma_{p-1} = b_{p-1}$$

  Poincaré prova, per un procés de subdivisió baricèntrica, que $b^*_i = b_i$, per la qual cosa dedueix finalment el teorema de dualitat

  $$b_{n-i} = b_i.$$

- Pel que fa a la característica d'Euler, la fórmula (2) dóna immediatament

  $$\sum (-1)^i \alpha_i = \sum (-1)^i b_i,$$

  i, per tant, la invariància de la característica.

El nou treball de Poincaré obra molts interrogants: la invariància topològica dels b_i, la triangulabilitat de les varietats, etc. que no seran resolts fins a uns quants anys després. Hem de remarcar que la Topologia Combinatòria és una disciplina difícil, mancada d'un llenguatge adequat per atacar els diversos problemes que planteja. En aquest context d'invariants numèrics poc estructurats, només un treball de fina orfebreria permetria a Hermann Künneth, els anys 1923/24, fer el càlcul dels nombres de Betti d'un producte de compexos simplicials, tal i com assenyala Friedrich Hirzebruch, [Hi].

Com a resultat dels entrebancs que sorgeixen en l'anàlisi de la topologia de les varietats, l'any 1913 James W. Alexander i Oswald Veblen es proposen fonamentar el treball de Poincaré en unes bases sòlides i dotar-lo de tècniques de demostració adequades, establint un programa de treball que s'haurà de desenvolupar en el temps. Fruit d'aquest treball, l'any 1922, Veblen publica el llibre *Analysis situs*.

Tot i l'esforç de Veblen, encara quedava molta feina per fer, com demostra el següent comentari de Saunders MacLane :

> era extremadament difícil entendre la topologia combinatòria seguint el llibre de Veblen sense un mestre; l'any 1931 ho vaig intentar i vaig fracasar,

i és en aquest context que el punt de vista de Noether esdevindria clau.

Abans de situar el paper d'Emmy Noether en el desenvolupament de l'homologia hem d'esmentar una altra gran figura de la Topologia a principis del segle XX, Lutzien Brouwer. Entre els anys 1910 i 1912, Brouwer desenvolupa nous mètodes de demostració i prova alguns resultats fonamentals. Així, introdueix l'aproximació simplicial d'una aplicació contínua i el grau d'una aplicació, i amb aquest bagatge demostra un seguit de resultats clau que representaven un repte per a la nova disciplina emergent: la invariància de la dimensió, la invariància del domini, el teorema de Jordan-Brouwer, el teorema del punt fix; i analitza les singularitats dels camps vectorials.

En definitiva, Brouwer remarca la importància de les apliacions contínues simplicials en l'anàlisi de la topologia de les varietats. Dieudonné [D2] resumeix les contribucions de Poincaré i Brower de la forma següent:

> es pot assegurar que Poincaré va definir els objectes de la Topologia Algebraica, però que va ser Brouwer qui va imaginar els mètodes mitjançant els quals els teoremes sobre aquests objectes es poden provar.

4. El panorama en temps d'Emmy Noether

Com ja hem esmentat, a mitjants dels anys 20, Emmy Noether es trobava immersa en un procés de refonamentació de l'àlgebra en el qual es primen les estructures sobre els elements particulars i les operacions associades. Per a Noether, les relacions numèriques només esdevenien clares i aplicables quan eren aïllades dels objectes particulars que les conformaven, establint-se mitjançant conceptes vàlids universalment.

Per il·lustrar el paràgraf anterior basta referir-nos a l'article *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, publicat l'any 1927 ([N2], [J]), en el qual Noether introdueix conceptes i resultats que avui en dia estan a la base de qualsevol presentació de l'àlgebra, i que podem estar temptats d'imaginar que sempre hi han estat, tot que és aleshores que prenen carta d'identitat. Així, Noether introdueix els morfismes entre mòduls:

> Si M i $\overline{M}$ són mòduls sobre R, diem que M és homomorf a $\overline{M}$, $M \sim \overline{M}$, si tot element de M representa un i només un element de $\overline{M}$; i per aquesta correlació la diferència i el múltiple per un element de R es representen per ells mateixos,

i els mòduls quocient:

> Si U és un R-mòdul contingut en M aleshores s'obté un mòdul $\overline{M}$ homomorf a M —el mòdul de classes de residus $M|U$— prenent congruència mòdul U com la relació d'igualtat [...] recollim els elements iguals de $\overline{M}$ en una classe i concevim aquestes classes com els elements de $\overline{M}$.

Aquesta darrera frase és molt significativa, ja que Noether és la primera que analitza un quocient com a conjunt *per se*, de forma abstracta i com un objecte a analitzar individualment (els grups d'homologia en serien una aplicació evident). Aquest tractament de l'àlgebra és el que s'anomenaria l'*àlgebra basada en la teoria de conjunts de Noether* (cf. [M]).

Un cop establertes les nocions d'homomorfisme i de quocient, Noether demostra els teoremes d'isomorfisme. Per exemple, enuncia el primer teorema d'isomorfisme en la forma:

> **Primer teorema d'isomorfisme**. Sigui $\overline{M}$ el mòdul de classes de residus $M|U$ i C un divisor de U. Aleshores hi ha un isomorfisme $\overline{M}|\overline{C} \simeq M|C$.

(En l'enunciat anterior Noether utilitza un llenguatge heretat de l'aritmètica segons el qual C és un divisor de U si $U \subseteq C$, que és la mena de relació que trobem entre els ideals i divisors de $\mathbb{Z}$.)

Podem imaginar el punt de vista adoptat per Noether com l'embrió de la noció de categoria abeliana desenvolupat per S. MacLane (qui, per cert, va participar als seminaris de Noether a Göttingen a finals dels anys 20) i, sobretot, per A. Grothendieck, ja que les categories abelianes donen el context adequat on els morfismes i els teoremes d'isomorfisme adquireixen tot el seu valor.

Noether assenyala la importància de les estructures i les seves relacions mitjançant els homomorfismes. Una mostra més d'aquest punt de vista és l'anàlisi del teorema de Frobenius utiltzat per Poincaré, assenyalat en la secció anterior. Noether inverteix la prova del teorema per establir directament el teorema de classificació dels grups abelians finit generats, del qual deduix el resultat de Frobenius. Per a Emmy Noether, els grups són més simples que l'aritmètica subjacent. De fet, és en aquest context en el qual trobem l'única referència a la topologia en els treballs de Noether ([N1]):

> El teorema sobre els grups és el més simple; en l'aplicació d'aquest teorema —e.g. pels nombres de Betti i de torsió en topologia— no cal fer referència al teorema dels divisors elementals.

En el curs 1926/27 Emmy Noether visita Brouwer a Holanda, on troba un grup de matemàtics joves i prometedors que assisteixen als seminaris i conferències de Brouwer. En aquells anys, per Holanda passen la major part dels joves topòlegs europeus, com ara Alexandroff, Hopf, Hurewicz, Uryshon o Vietoris. Sota la influència de Brouwer, aquests topòlegs emfasitzaran el paper de les aplicacions contínues per damunt dels espais i varietats. Noether, que al seu torn està remarcant la importància dels morfismes en l'àlgebra, coincideix amb Alexandroff i

Vietoris i exerceix una clara influència en el primer, com ho mostra el següent comentari d'Alexandrof:

> la meva teoria de particions contínues d'espais topològics [descomposició canònica d'una aplicació contínua] va sorgir en gran mesura de la influència de les converses amb ella [Emmy Noether] [...] quan ambdós ens trobàvem a Holanda.

A partir d'aquell moment, Alexandroff i Hopf assisteixen regularment als seminaris d'Emmy Noether a Göttingen, i desenvolupen part de la seva recerca sota la influència dels novedosos punts de vista que ella proposa, com evidencien les paraules recollides al pròleg del *Topologie* recordades a la introducció.

Hopf ho recorda, l'any 1966, amb les següents paraules ([Ho2]):

> Alexandroff i jo vam aprendre d'E. Noether els fonaments de la teoria d'homologia pels complexos simplicials. És a dir, si X^r és el grup de cadenes r-dimensionals i $\partial : X^{r+1} \longrightarrow X^r$ l'homomorfisme vora, aleshores $\partial\partial = 0$. Això significa que $\partial X^{r+1} \subseteq Z^r$, on Z^r denota el nucli de $\partial : X^r \longrightarrow X^{r-1}$. El grup $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ és l'i-èsim grup d'homologia, i es té
> $$b_i = \mathrm{rang} H^i.$$
> Aquesta igualtat era la traducció dels teoremes d'isomorfisme en aquest context
> $$X^r/Z^r \cong \partial X^{r+1}, \qquad Z^r/\partial X^{r+1} \cong H^r\ .$$

Hopf va ser un dels pioners en la utilització dels grups d'homologia i de l'àlgebra associada, constatant ben aviat els avantatges de disposar de les eïnes que proporcionaven les idees d'Emmy Noether aplicades a la topologia. Ho assenyala explícitament en el seu treball sobre punts fixos. En efecte, Hopf estudia els punts fixos d'una aplicació contínua qualsevol $f : X \longrightarrow X$, on X és un complex simplicial de dimensió finita n. Per fer-ho, introdueix el morfisme $f_{*,q}$ induït per f en l'homologia q-èsima (un cop més estem simplificant la presentació utilitzant el llenguatg actual, mentre que Hopf va utilitzar en primera instància una complicada combinatòria) i, seguint el treball de Solomon Lefschetz, introdueix el *nombre de Lefschetz*

$$\Lambda(f) = \sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_{*,q}),$$

per provar el resultat següent:

Teorema del punt fix. *Suposem que f no té punts fixos, aleshores* $\Lambda(f) = 0$.

Hopf redueix la prova d'aquest resultat al que anomenarà una *fórmula d'Euler-Poincaré generalitzada*

$$\sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_q) = \sum_{0 \leq q \leq n} (-1)^q \mathrm{tr}(f_{*,q}),$$

on els f_q són els morfismes associats a una aproximació simplicial d'f entre els complexos de cadenes. D'aquesta fórmula Hopf en va donar dues proves, en la segona de les quals va utilitzar tota la potència de les idees de Noether, cosa que explicava en la forma següent ([Ho1]):

> Vaig ser capaç d'emmarcar la prova original d'aquesta fórmula d'Euler-Poincaré generalitzada en un context més simple i més clar al llarg d'una sèrie d'exposicions que vaig fer a Göttingen l'estiu de 1928, introduint-hi, sota la influència de la Senyora E. Noether, les idees de teoria de grups.

Al llarg dels anys 30 les idees de E. Noether implementades per Alexandroff i Hopf van impregnar tota la Topologia Algebraica, tot i que amb algunes reticències. Alexandroff comenta:

> Hopf i jo vam adoptar immediatament el punt de vista d'Emmy Noether, però per algun temps ens vam trobar entre un reduït grup de matemàtics, ja que no va trobar una acollida favorable per part de molts topòlegs d'autoritat.

Bona mostra de la desconfiança sobre els nous mètodes proposats per Noether i implementats per Alexandroff i Hopf, i l'acceptació posterior, n'és l'actitud de Lefschetz. L'any 1930 Lefschetz escriu en el pròleg del llibre *Topology*, [L1]:

> La connexió amb la teoria abstracta de grups és clara... De fet tot el que segueix pot enunciat-se en termes de la teoria de grups. És simplement una qüestió de terminologia.

Anys més tard, en el llibre *Algebraic Topology*, publicat el 1942 ([L2]), Lefschetz canviaria aquest punt de vista i assumiria plenament el plantejament de Noether:

> Com ha assenyalat Emmy Noether, la relació entre cadenes, cicles, ..., l'única forma adequada d'expressar-la, requereix la teoria de grups.

Observació: Hem d'assenyalar que els grups d'homologia van ser introduïts independentment per Vietoris, i pel seu estudiant Walther Mayer (en aquest sentit, vegeu [D1], [M1] i [R]), en el context de l'homologia dels espais mètrics (Vietoris, 1927) i del càlcul de l'homologia mitjançant l'homologia de peces més simples (Mayer, 1929), com per exemple, quan formulen la igualtat

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

5. Comentaris finals

Emmy Noether no va treballar directament en els problemes de la Topologia, però sota la seva influència els grups d'homologia esdevenen el tema central de la Topologia Algebraica. Coneixem aquesta influència mitjançant els testimonis dels seus contemporanis, sobretot els d'Alexandroff i Hopf.

Podriem concloure que Emmy Noether va introduir, en un sentit encara naïve, la functorialitat en Topologia. En paraules de MacLane, [M2]:

> Al 1930, Emmy Noether va emfasitzar la idea de que l'homologia no tractava simplement dels nombres de Betti, sinó de grups abelians [. . .] els grups d'homologia donaven una imatge algebraica de la topologia —una primera versió de la idea final [. . .] del que avui anomenariem *functors* [. . .]

Aquest punt de vista functorial va permetre, a partir dels anys 30, un desenvolupament espectacular de la Topologia Algebraica. Assenyalem alguns dels ítems més significatius en el desenvolupament de l'homologia dels espais topològics:

- 1935 En la conferència internacional de Moscou, Alexander i Whitney defineixen l'anell de *cohomologia*

$$H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X),$$

per a *tot espai* topològic X.

- 1944 Eilenberg introdueix l'homologia singular.
- 1945 Eilenberg i MacLane introdueixen les categories i els functors.
- 1945 Eilenberg i Steenrod desenvolupen la teoria axiomàtica de l'homologia.

Amb el temps, la visió conceptual de Emmy Noether dóna lloc a una nova disciplina, l'àlgebra homològica, i les seves aplicacions apareixen en els llocs més insospitats. Tot i això, el paper d'E. Noether es va diluint. En paraules de David Blanco, [Bl]:

> Noether pertenece a la estirpe de los creadores que con el paso del tiempo acaban por volverse invisibles: sus puntos de vista, tan cuestionados en su día, han terminado por asimilarse con tal intensidad que quienes hoy manejan sus ideas piensa que pertenecieron al álgebra desde tiempos de los griegos.

Referències

[A] P. Alexandroff, *Die Topologie in und um Holland in der Jahren 1920-1930.* Niue Archief voor Wiskunde (3) **XVII**, (1969), 109–127.

[AH] P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie. Springer, 1935. (Reimpressió: Chelsea Publ. 1965)

[B] E. Betti, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni.* Annali di Matematica pura ed applicata. **4**, (1871), 140–18.

[Bl] D. Blanco, Emmy Noether, matemática ideal. Nívola, 2005.

[D1] J. Dieudonné, *Emmy Noether and Algebraic Topology.* Journal of Pure and Appl. Algebra **31**, (1984), 5–6.

[D2] J. Dieudonné, History of Algebraic and differential Topology, 1900-1960. Birkhäuser Verlag, 1989.

[Hi] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and Topology.* En "The mathematical heritage of Emmy Noether". Bar Ilan Univ. (1999), 57–65.

[Ho1] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel.* Nachrichten, Gesellschaft der Wissenchaften zu Göttingen, (1928), 127-136.

[Ho2] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Topologie.* Colloque de Topologie. CBRM, Bruxelles (1966), 9–20.

[J] N. Jacobson (ed), E. Noether: Gesammelte Abhandlungen. Springer Verlag, 1983.

[Ja] I. M. James (ed), History of Topology. Noth-Holland, 1999.

[L1] S. Lefschetz, Topology. AMS, 1930.

[L2] S. Lefschetz, Algebraic Topology. AMS, 1942.

[M1] S. MacLane, *Topology became algebraic with Vietoris and Noether.* Jour. of Pure and Appl. Algebra**39**, (1986), 305–307.

[M2] S. MacLane, *Samuel Eilenberg and Categories*. Jour. of Pure and Appl. Algebra**168**, (2002), 127–131.

[M] C. McLarty, *Emmy Noether's "set theoretic" topology: from Dedekind to the first functors*. En "The architecture of modern mathematics". Oxford, 2006. 21–235.

[N1] E. Noether, *Abstract*. Jahresbericht DMV, (1926), 34–104.

[N2] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*. Math. Annalen, **96**, (1927), 26–91.

[N] S. Novikov, *Henri Poincaré and XXth Century Topology*. Proc. of the Symposium Henri Poincaré. International Solvay Institutes for Physics and Chemistry. Brussels, 8-9 October 2004.

[P1] H. Poincaré, *Analysis Situs*. Journal de l'École Polythecnique **1**, (1895), 1–121.

[P2] H. Poincaré, *Compléments à l'Analysis Situs*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **13**, (1899), 285–343.

[P] J.C. Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. Presses univ. de France, 1974.

[R] H. Reitberger, *Leopold Vietoris, (1891-2002)*. Notices AMS, **49** (10), 1232-1236.

[R1] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Inaugurationdissertation, Göttingen, 1851.

[R2] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*. J f. Math. **54** (1957).

[V] O. Veblen, Analysis Situs. AMS, 1922.