EL TEOREMA DE NOETHER: COM EL VA DESCOBRIR I COM ES FA SERVIR

FRANCESC MARQUÈS

RESUM. Emmy Noether va demostrar el 1918 dos importants teoremes, emprats des de llavors pels físics en multitud de diferents branques. Aquesta va ser una de poques, però molt fructuoses incursions d'Emmy Noether a la física. De fet, ho va fer a petició de David Hilbert, que va demanar la seva ajuda per resoldre el problema de la conservació de l'energia en relativitat general, problema que quedà resolt amb els seus dos teoremes.

Els teoremes de Noether (i els seus inversos) estableixen una profunda relació entre invariància per un grup de simetries i lleis de conservació. Encara que es parla molt sovint del *Teorema de Noether generalitzat*, pràcticament totes les versions que s'han fet servir estaven ja incloses en el treball de 1918. Els dos teoremes s'il·lustraran amb exemples procedents de la mecànica clàssica, així com de les teories de camps, i es comentarà com els teoremes de Noether permeteren resoldre el problema de la conservació de l'energia en relativitat general.

1. Introducció

La vida d'Emmy Noether es descriu amb tot luxe de detalls a altres treballs d'aquest volum, i aquí comentarem únicament els esdeveniments al voltant del descobriment dels teoremes de Noether, molt ben descrits als treballs de Nina Byers [By1, By2].

L'any 1915 David Hilbert i Felix Klein conviden Emmy Noether a formar part de l'equip de matemàtics de la Universitat de Göttingen. Hermann Weyl [Wey] diu que la convidaren per tal que els ajudés amb el seu coneixement de la teoria dels invariants. Tenia trenta tres anys, i

Treball parcialment suportat per l'AGAUR, SGR-00024.

continuava a Erlangen, on es va doctorar, encara que havia passat una temporada a Göttingen com a estudiant.

El juny i juliol de 1915, poc després de l'arribada de Noether a Göttingen, Albert Einstein va donar un seminari en sis lliçons sobre la teoria general de la relativitat, que encara no tenia completament acabada. Però les idees bàsiques eren ja prou clares, i l'audiència les va trobar molt convincents. El mateix Einstein va dir [Pai]:

> Estic molt satisfet d'haver aconseguit convèncer completament a Hilbert i Klein.

Einstein treballava en la generalització de la seva teoria de la relativitat especial des de 1905, per tal d'incloure-hi el principi d'equivalència entre massa inercial i gravitatòria. Uns mesos després dels seminaris a Göttingen, el novembre de 1915, Einstein completà la teoria i envià a publicar el famós article amb la teoria de la relativitat general [Ein]. Curiosament, el mateix mes Hilbert envià a publicar un article [Hil] on obtenia les mateixes equacions de la relativitat general a partir d'un principi variacional; els dos havien obtingut les equacions del camp pràcticament al mateix temps.

Arran dels seminaris d'Einstein i altres seminaris organitzats per Hilbert sobre relativitat general, Emmy Noether es posà a estudiar relativitat, i a treballar en els invariants diferencials d'Einstein. A finals de 1915, obté els seus dos teoremes sobre lleis de conservació i simetries. Els manuscrits son de gran ajut per a Klein, Hilbert i Einstein, i així ho reconeixen en els seus escrits. Per exemple, Einstein, en una carta a Hilbert, deia [Kim]:

> Ahir vaig rebre un escrit molt interessant de la senyora Noether sobre formes invariants. Estic impressionat de que es pugui abordar aquest problema des d'un punt de vista tan general. No li hauria fet cap mal a la vella guàrdia de Göttingen aprendre algunes coses d'ella.

Encara que la teoria de la relativitat general fou completada el 1915, quedaven problemes per resoldre. Un d'ells, el principi de la conservació local de l'energia, era particularment molest. A diferència de les teories clàssiques de camps (gravitació Newtoniana, electromagnetisme, etc.), en la relativitat general l'energia no es conserva localment. Hilbert sospitava que en lloc de teoremes propis de conservació de l'energia, en relativitat general hi hauria 'teoremes impropis' de conservació. Aquesta conjectura va ser clarificada, quantificada i demostrada per Emmy Noether en els seus dos teoremes, en particular el segon.

Aquets resultats sobre invariants i simetries, obtinguts a finals de 1915, no foren publicats fins el 1918 [No1, No2], als Proceedings de la Real Societat de Ciències de Göttingen. I de fet foren presentats per Felix Klein, ja que les dones no podien ser membres de la Real Societat. Encara que Emmy Noether no tornà a treballar en física, era molt conscient de la importància dels seus descobriments, i de fet va escollir aquest treball (juntament amb un treball fonamental en àlgebra) per la seva tesi d'habilitació. La seva habilitació també mostra una llarga història de discriminació de la dona. A pesar dels esforços de Hilbert i Klein per el seu reconeixement i habilitació a Göttingen, això no va ser possible fins acabada la primera guerra mundial, i només parcialment, ja que se li permeté ensenyar a la Universitat, però sense remuneració!

Els teoremes de Noether redueixen la recerca de lleis de conservació i regles de selecció a l'estudi sistemàtic de les simetries del Lagrangià del problema; i inversament, a partir de l'observació de lleis de conservació, es poden descobrir noves simetries del Lagrangià. Els teoremes de Noether foren ignorats a la literatura en física durant els propers quaranta anys. Assenyalarem dos fets que ens donen una possible explicació. En primer lloc, el descobriment de la desintegració del neutró (desintegració beta) el 1914 va posar en qüestió el principi de conservació de l'energia. Encara que Pauli postulà l'existència del neutrino el 1927 per restaurar la conservació de l'energia, no fou fins el 1956 que el neutrino fou finalment detectat directament, quedant així restablert del tot el principi de conservació de l'energia. Un altre factor influent va ser el predomini de les formulacions Hamiltonianes en mecànica quàntica i teories de camps; i no fou fins els anys 50 del segle passat que les formulacions Lagrangianas tornaren a predominar, i els teoremes de Noether començaren a ser citats. També podem suggerir com a possible factor la resistència, fins ben acabada la segona guerra mundial, a atribuir a una dona resultats tan fonamentals.

2. Sistemes amb un nombre finit de graus de llibertat

Els teoremes de Noether s'apliquen tant a sistemes dinàmics discrets com continus que derivin d'un Lagrangià, i a grups de simetria continus (grups de Lie) de dimensió finita o infinita. Començarem amb el cas més senzill, el dels sistemes dinàmics discrets amb un nombre finit de graus de llibertat, i grups de Lie de dimensió finita, per introduir les idees fonamentals de manera senzilla i amb exemples familiars.

Principis variacionals. Considerem un sistema dinàmic governat per un principi variacional: les òrbites són extremals d'un funcional anomenat acció. Suposem un sistema mecànic amb un nombre finit de graus de llibertat $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, i sigui

$$I = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \tag{1}$$

l'acció i $\mathcal{L}$ el Lagrangià, on hem fet servir $\dot{q} = dq/dt$ per simplificar l'escriptura. Si $q(t)$ és extremal per a I, llavors $q \to q + \delta q$ satisfà $\delta I = 0$, i obtenim les equacions d'Euler-Lagrange:

$$\psi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0, \tag{2}$$

que son les equacions diferencials (equacions del moviment) del sistema dinàmic considerat.

Per exemple, considerem dues partícules m_1 i m_2, amb vectors de posició $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, sotmeses a un potencial $V = V(r)$, on $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Llavors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 - V(r), \tag{3}$$

i les equacions del moviment són

$$m_1 \dot{\mathbf{v}}_1 = -m_2 \dot{\mathbf{v}}_2 = -V'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{4}$$

Direm que una transformació $q'(q,t)$, $t'(q,t)$ és una transformació de simetria del sistema dinàmic governat per el principi variacional (1), si les equacions d'Euler-Lagrange per a $(q', \dot{q}', t')$ són invariants (funcionalment idèntiques). El Lagrangià transformat és

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t') = \mathcal{L}\big(q(q', t'), \dot{q}(q', \dot{q}', t'), t(q', t')\big)\frac{dt}{dt'}. \tag{5}$$

Com que dos Lagrangians donen les mateixes equacions si i només si difereixen en una derivada total [Lev], la transformació serà de simetria si existeix una funció $\Omega(q, t)$ tal que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + d\Omega/dt$. Un càlcul senzill, per una transformació infinitesimal de simetria $q' = q + \delta q$, $t' = t + \delta t$ ens dóna

$$\frac{dQ}{dt} = -\psi \cdot (\delta q - \dot{q}\delta t) \tag{6}$$

on hem posat

$$Q = \mathcal{L}\delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\delta q - \dot{q}\delta t) + \delta\Omega. \tag{7}$$

Per tant, Q es conserva sobre les trajectòries solució ($\psi = 0$). De fet, en els teoremes d'Emmy Noether, es considerava sols el cas $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$; la inclusió del terme $\delta\Omega$ és una de les poques extensions posteriors dels teoremes de Noether, i són molt pocs els cassos d'interés on $\delta\Omega \neq 0$. D'altre banda, la modificació de la demostració del Teorema deguda al terme $\delta\Omega$ és mínima.

Si el sistema dinàmic és invariant per un grup de Lie n-dimensional $\mathcal{G}_n$, per cada un dels n generadors infinitesimals $(\delta q_n, \delta t_n)$ podem construir la corresponent quantitat conservada.

Exemple: el grup de Galileu. La mecànica Newtoniana és invariant pel grup de Galileu; una transformació infinitesimal genèrica d'aquest grup s'escriu

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r} + \mathbf{c}t, \qquad t' = t + \tau, \tag{8}$$

on $\mathbf{r}$ és la posició de qualsevol de les partícules del sistema, i $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i τ són els generadors infinitesimals de les translacions, rotacions, canvis de sistema de referència amb velocitat constant (boost) i traslacions temporals, respectivament. Per l'exemple de dues partícules i una força central discutit abans (3), les equacions del moviment són invariants, pero el Lagrangià no ho és ($\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$), i obtenim que

$$\delta\Omega = -\mathbf{c}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2). \tag{9}$$

En aquest cas, tenim $\delta\Omega \neq 0$ únicament pels boosts. Les quantitats conservades associades a cada generador infinitesimal són:

$$\begin{array}{ll} \text{Moment lineal:} & \mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \\ \text{Moment angular:} & \mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 \\ \text{Moviment centre de masses:} & \mathbf{R}_0 = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \dfrac{\mathbf{P}}{M}t \\ \text{Energia:} & E = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + V(r) \end{array}$$

on hem posat $M = m_1 + m_2$. Com que el centre de masses es mou amb velocitat constant, el podem eliminar amb un canvi apropiat de sistema de referència i de coordenades; si posem $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ i $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ arribem al Lagrangià pel moviment relatiu,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - V(r), \tag{10}$$

on $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}/dt$.

El teorema de Noether invers. Fins ara hem considerat transformacions puntuals, $q'(q,t)$, $t'(q,t)$. Per aquestes transformacions, el Teorema de Noether no admet invers: hi ha quantitats conservades que no deriven d'una transformació puntual de simetria. L'article de E. Noether treballa des del primer moment amb transformacions més generals, $q'(q,\dot{q},t)$, $t'(q,\dot{q},t)$. Per aquestes transformacions, existeix sempre invers: a tota magnitut conservada li correspon una transformació de simetria, com va demostrar E. Noether a l'article; coneguts Q i $\mathcal{L}$, (7) proporciona δt, δq i $\delta\Omega$. Com a exemples d'aquestes transformacions, tornem al cas de dues partícules amb una força central entre elles, i considerem directament el Lagrangià pel moviment relatiu (10).

Hi ha dos potencials centrals que donen lloc a òrbites tancades: el potencial gravitatori $V(r) = -k/r$ i l'oscil·lador harmònic $V(r) = kr^2$. En els dos cassos hi ha quantitats conservades addicionals que no deriven d'una transformació puntual:

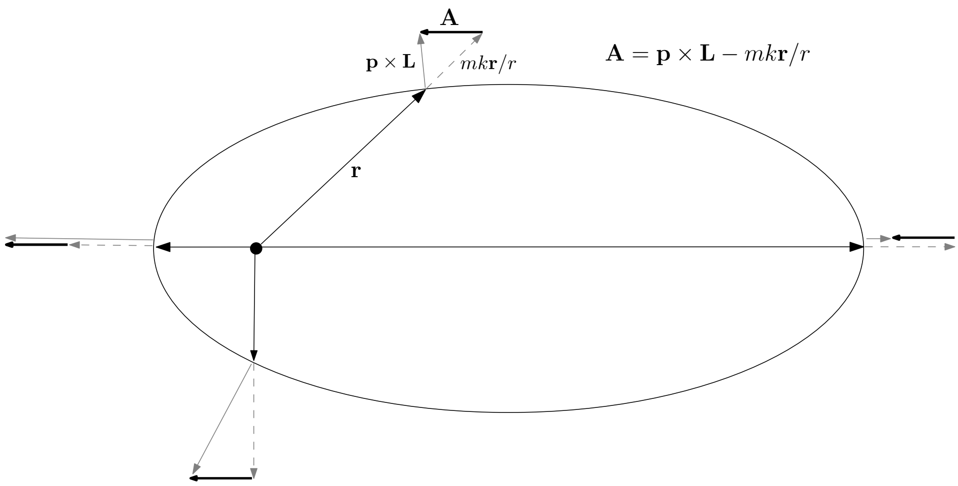
Potencial	**Nom**	**Quantitat conservada**
$V(r) = -k/r$	Vector de Runge-Lenz	$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{r}/r$
$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$	Tensor energia	$E_{i,j} = \frac{1}{2}mv_iv_j + \frac{1}{2}kr_ir_j$

on $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ i $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}$ denoten els moments lineal i angular de la massa puntual m. Les transformacions no puntuals s'anomenen *simetries dinàmiques*, mentre que les puntuals s'anomenen *simetries geomètriques*. Les simetries dinàmiques son sovint de difícil visualització. Examinem els dos cassos esmentats.

Problema de Kepler: el vector de Runge-Lenz. Les òrbites del problema de Kepler son còniques (el·lipses si són acotades), amb el centre de masses a un focus de l'el·lipse. La direcció del vector de Runge-Lenz,

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\mathbf{r}/r,$$

és la del semieix major, tal com indica la figura.



La simetria dinàmica que genera el vector de Runge-Lenz és:

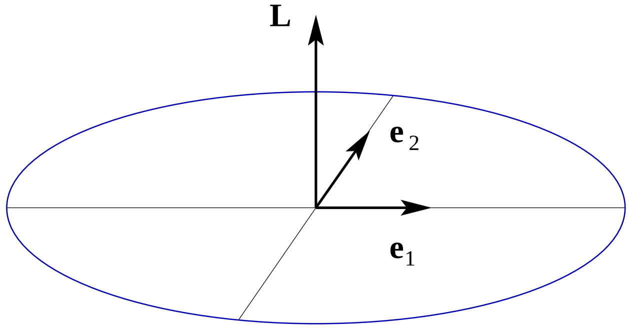
$$\delta r_i = \epsilon_j (2v_i r_j - r_i v_j - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \delta_{i,j}), \quad j = 1, 2, 3 \tag{11}$$

Com que hi ha tres simetries dinàmiques, es conserven tres quantitats, les components del vector de Runge-Lenz. Aquesta quantitat conservada la va descobrir Jakob Hermann ($\sim$1710), parent llunyà d'Euler i deixeble de Jacob Bernouilli. Aquest vector el van redescobrir posteriorment Laplace, Hamilton i Gibbs. Runge i Lenz el popularitzaren, i a partir del treball de Pauli sobre la mecànica quàntica de l'àtom d'hidrogen, va ser conegut com vector de Runge-Lenz.

Oscil·lador harmònic: tensor energia. Les òrbites de l'oscil·lador harmònic son el·lipses. En aquest cas, la simetria dinàmica que genera el tensor energia $E_{i,j}$ és

$$\delta r_i = \epsilon_{j,k}(v_k \delta_{i,j} + v_j \delta_{i,k}), \quad j,k = 1,2,3. \tag{12}$$

$E_{i,j}$ és semidefinit positiu, i està íntimament lligat a les altres quantitats conservades i a la geometria de l'òrbita. La direcció pròpia nul·la correspòn al moment angular $\mathbf{L}$, i les dues direccions pròpies positives $\mathbf{e}_i$ corresponen als semieixos de l'òrbita. La traça de $E_{i,j}$ és l'energia mecànica de l'oscil.lador.



3. El primer teorema de Noether

Una vegada vistes les idees bàsiques de la teoria en el cas de sistemes discrets, podem passar a descriure el primer teorema de Noether tal com apareix a [No2]. El teorema s'aplica a sistemes dinàmics continus, és a dir, a sistemes dinàmics descrits per camps $u_i(t, \mathbf{r})$ que depenen de les coordenades espacials i el temps. S'aplica a sistemes dinàmics derivats d'un principi de mínima acció, amb un Lagrangià que conté derivades dels camps fins a ordre k,

$$I = \int \mathcal{L}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) dx \tag{13}$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\mu$, i μ és el nombre de camps. Les equacions d'Euler-Lagrange són EDP d'ordre $2k$:

$$\psi \equiv \sum_{j=0}^{k} (-1)^j D_x^j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)} \right) = 0, \quad \text{on} \tag{14}$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial^{j+1} u}{\partial x^{j+1}} \frac{\partial}{\partial(\partial_x^j u)} + \ldots \tag{15}$$

on hem suprimit l'escriptura dels índexs per simplicitat. Per exemple, com que x té n components, D_x també té n components; així, la component i-èsima de $(\partial u/\partial x)\partial/\partial u$ és $\sum_{j=1}^{\mu} (\partial u_j/\partial x_i)\partial/\partial u_j$; i ψ té μ components, és a dir, tenim μ equacions diferencials per als μ camps u_j. La notació explícita de $\partial_x^j u$ és particularment pesada, i cal fer servir multiíndexs:

$$\partial_x^j u_\ell = \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n} u_\ell}{\partial^{j_1} x_1 \ldots \partial^{j_n} x_n}, \tag{16}$$

i $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ és un multiíndex. El conveni d'Einstein s'aplica tant a l'index ℓ com al multiíndex j de $\partial_x^j u$. El mateix es pot fer amb les derivades D_x^j. A l'expressió (14) el sumatori és sobre el multiíndex j, i s'extén a tots els multiíndexs fins ordre k; l'ordre del multiíndex j es defineix com $j_1 + \ldots + j_n$ i és l'ordre de la derivada parcial $\partial_x^j u$.

Considerem una transformació de variables independents i dependents,

$$\begin{aligned} y &= x + \delta x(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^j u, \ldots) \\ v(y) &= u(x) + \delta u(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^j u, \ldots). \end{aligned}$$

Quan calculem $\partial_y^j v$, ens apareixen derivades de u d'ordre més elevat que les que apareixen a $\mathcal{L}$, i per invertir la transformació i trobar x, u en funció de y, v ens trobem amb un sistema infinit d'equacions, per tots els ordres de $\partial_y^j v$. Aquest procés sols funciona si totes les funcions són analítiques, o bé per transformacions infinitesimals (en aquest cas, si suposem δx i δu d'ordre ϵ i menyspreem els termes d'ordre superior en ϵ, no necessitem derivades d'ordre més elevat que k). En el cas de grups de Lie, les transformacions finites es poden reconstruir a partir de les transformacions infinitesimals, i són analítiques, per tant tot funciona.

Si la transformació $(x,u) \to (y,v)$ és de simetria, és a dir si, les equacions d'Euler-Lagrange en les noves variables son idèntiques a les originals, es verifica:

$$D_x\Big\{\mathcal{L}\delta x + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar\delta u^{j-1}\Big) + \delta\Omega\Big\} = -\psi\bar\delta u$$

$$\text{on}\quad \bar\delta u = \delta u - \frac{\partial u}{\partial x}\delta x, \quad \bar\delta u^j = D_x^j\bar\delta u, \quad \delta\Omega\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1}u}{\partial x^{k-1}}\Big).$$

Donat un grup uniparamètric de transformacions ($\delta x = \epsilon X$, $\delta u = \epsilon U$, $\delta\Omega = \epsilon\Lambda$), i sobre les trajectòries del sistema ($\psi = 0$), existeix una quantitat conservada; assumint que les variables independents $x = (t, \mathbf{r})$ son espai i temps, ens queda

$$(17)\quad D_x\mathcal{F} = 0 \;\Rightarrow\; \partial_t\mathcal{F}_0 + \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{\mathbf{F}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}_0 dV + \int_{\partial\mathcal{D}}\overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot\overrightarrow{dS} = 0,$$

on hem hem posat

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}\delta x + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar\delta u^{j-1}\Big)$$

i on $\mathcal{D}$ és un domini d'integració arbitrari. La quantitat $Q = \int_{\mathcal{D}}\mathcal{F}_0 dV$ es conserva localment: l'augment a $\mathcal{D}$ de Q és igual al flux de Q que entra per $\partial\mathcal{D}$, per qualsevol volum $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{F}$ decau prou ràpidament a l'infinit, llavors la *càrrega* total $Q_T = \int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{F}_0 dV$ és una quantitat conservada. [Gol] conté una descripció detallada del formalisme del primer teorema de Noether.

Si les equacions del camp són de segon ordre, com és molt habitual, llavors el *corrent de Noether* $\mathcal{F}$ s'escriu

$$(18)\qquad \mathcal{F} = \mathcal{L}\delta x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x u)}(\delta u - \partial_x u\,\delta x) + \delta\Omega$$

L'única "millora" respecte del Teorema I de Noether del 1918 és la inclusió del terme $\delta\Omega$, en el cas de que el Lagrangià no sigui invariant però sí ho siguin les equacions d'Euler-Lagrange.

Hem vist doncs que un grup de Lie m-dimensional de simetries implica la conservació de m magnituts, una per cada un dels m generadors infinitesimals del grup. Es verifica també el teorema invers, demostrat a l'article de 1918: si les equacions d'Euler-Lagrange admeten m quantitats conservades independents, llavors existeix un grup de Lie m-dimensional que deixa el problema invariant. No existeix l'equivalent del Teorema de Noether per al cas que les equacions d'Euler-Lagrange admetin simetries discretes (paritat, inversió temporal...).

Presentem a continuació alguns exemples d'aplicació del teorema de Noether a les teories de camps.

El camp electromagnètic. Les equacions del camp electromagnètic en el buit s'obtenen del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{19}$$

on $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ és el 4-vector potencial: $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla\Phi$ és el camp elèctric i $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ és el camp magnètic. Φ es redueix al potencial electrostàtic si el problema és estacionari, i $\mathbf{A}$ és el potencial vector del camp magnètic. Les equacions del camp són $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, o equivalentment $\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$, que és l'equació d'ones per A_ν. Els índexs grecs (μ, ν, ...) varien de 0 a 3, i fem servir el conveni d'Einstein, que suposa que si hi ha un índex repetit en una equació, es suma sobre tots els seus valors.

El Lagrangià és invariant per transformacions de Poincaré,

$$y^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad B^\mu = A^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu A^\nu, \qquad \epsilon_{\mu,\nu} = -\epsilon_{\nu,\mu}. \tag{20}$$

Aquí suposem que els índexs pugen i baixen amb la mètrica de Minkowski $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. El teorema I de Noether ens porta a la conservació dels tensors energia-impuls

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right)$$

i moment angular $M^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\nu}x^\lambda - T^{\mu\lambda}x^\nu$ del camp electromagnètic:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0. \tag{21}$$

Per exemple, la component T^{00} és la densitat d'energia del camp electromagnètic:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B^2}) \tag{22}$$

Per qualsevol teoria de camps invariant Poincaré, es poden construir anàlogament els tensors energia-impuls i moment angular.

Mecànica quàntica no relativista. L'equació d'Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \tag{23}$$

on ψ és la funció d'ona d'una partícula de massa m que es mou en el potencial $V(x,t)$, s'obté del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi) - V(x,t)\psi^*\psi, \tag{24}$$

on ψ^* és el complex conjugat de ψ. Aquest Lagrangià és invariant per un canvi de fase de la funció d'ona:

$$\psi \to e^{i\epsilon}\psi,\ \psi^* \to e^{-i\epsilon}\psi^*; \qquad \delta\psi = i\epsilon\psi,\ \delta\psi^* = -i\epsilon\psi^* \tag{25}$$

D'aquí s'obté immediatament per aplicació del Teorema I de Noether la conservació de la probabilitat

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0, \quad p = |\psi|^2, \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{m}\Im(\psi^*\nabla\psi), \tag{26}$$

on p és la densitat de probabilitat, $\mathbf{j}$ el corrent de probabilitat i $\Im$ indica la part imaginaria del nombre complex.

Hem tractat ψ i ψ^* com a variables independents per simplicitat; altrament, caldria escriure-ho tot en funció de les seves components real i imaginaria, $\psi = \psi_R + i\psi_I$, i al final retornar a ψ, ψ^*. El resultat és el mateix, però els càlculs més complicats.

Conservació de l'energia en mecànica clàssica i relativista. Un sistema dinàmic aïllat és invariant per un grup de Lie G_{10} de dimensió 10, amb 10 paràmetres corresponents a translacions en espai i temps (4 paràmetres), rotacions (3) i canvis de sistema de referència amb velocitat constant (3):

- El grup de Galileu en mecànica clàssica.
- El grup de Poincaré en relativitat restringida.

Si les equacions del sistema dinàmic deriven d'un principi variacional (un Lagrangià), llavors el teorema I de Noether implica l'existència de

10 quantitats conservades: l'energia, el moment lineal i angular, i la velocitat uniforme del centre de masses.

Per tant, el **principi de conservació de l'energia**, que la física considera vàlid en qualsevol cas i circumstancia, es dedueix directament pels sistemes esmentats del teorema I de Noether. Aquest principi de conservació de l'energia té un caràcter local, és a dir s'aplica a l'energia continguda en un volum arbitrari $\mathcal{D}$ tal com hem vist a (17).

Les equacions de la relativitat general, en canvi, admeten un grup d'invariància molt més gran: el grup de totes les transformacions de coordenades. Aquest grup de transformacions, en lloc de dependre d'un nombre finit de paràmetres (un grup de Lie en el sentit habitual) conté quatre *funcions* arbitràries. En aquest cas caldria parlar de grups de Lie de dimensió infinita, pels quals encara no existeix una teoria rigorosa completament desenvolupada. Per tractar aquets cassos Emmy Noether demostrà el seu segon teorema, com veurem a §4.

Teoria Quàntica de Camps. El mateix que hem fet per al camp electromagnètic i l'equació d'Schrödinger es pot fer per les diferents equacions dels camps que governen els diferents tipus de partícules: equació de Klein-Gordon per a partícules d'espín zero, equació de Dirac per a espín 1/2, equació de Proca per a espín un, equació de Rarita-Schwinger per a espín 3/2, etc [Mon]. Altres equacions dels camps, tipus Yang-Mills, inclouen simetries internes per descriure nombres quàntics addicionals com color, estranyesa i d'altres.

En totes elles, la invariància pel grup de Poincaré porta a la conservació del tensor d'energia-impuls i del moment angular. Altres simetries per grups de Lie de dimensió finita porten a altres conservacions (probabilitat, càrrega, etc.). Un paper especial juguen les anomenades *simetries de gauge*, que contenen funcions arbitràries; en aquest cassos cal aplicar el segon teorema de Noether.

En teoria quàntica de camps, els camps $\phi(x,t)$ es substitueixen per operadors a l'espai de Hilbert, i es postulen certes relacions de commutació entre ells [Sch]. Això les converteix en teories de moltes partícules: és el que s'anomena segona quantificació. Al fer això les quantitats conservades del Teorema de Noether es reinterpreten en termes del nombre de partícules.

Teories de camps clàssiques. Aquí just donarem algunes indicacions sense entrar en els detalls tècnics.

Elasticitat. Aquí les equacions deriven d'un principi variacional, i el Teorema de Noether és de gran utilitat. Les equacions són d'ordre superior a dos (típicament d'ordre quatre) i hi ha un nombre elevat de quantitats conservades [Fle].

Mecànica de fluids. Les celebrades equacions de Navier-Stokes (recordem que la *Clay Foundation* té establert un premi d'un milió de dòlars per la resolució d'alguns dels problemes matemàtics més difícils, i un d'ells és l'existència i unicitat de solucions d'aquestes equacions) són:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F}(x,t), \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{27}$$

on $\mathbf{v}(x,t)$ és el camp de velocitats del fluid, $p(x,t)$ la pressió i $\mathbf{F}(x,t)$ el camp de forces externes. Aquestes equacions son dissipatives, i no deriven d'un Lagrangià, per tant el Teorema de Noether no s'aplica. En el cas especial de les equacions d'Euler per a fluids no viscosos, en les quals s'ha eliminat la dissipació,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}(x,t), \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{28}$$

és possible amb grans dificultats formular un principi variacional i fer servir el Teorema de Noether [Naz].

Un exemple senzill. Donarem per acabar un exemple senzill on les simetries inclouen una dilatació. El procés de relaxació cap a una distribució de Maxwell ve donada per l'EDP no lineal

$$\partial_{xt} u + u^2 = 0, \quad u(x,t), \quad \text{on} \quad x, t, u \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

que deriva del Lagrangià

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} u_x u_t + \frac{1}{3} u^3. \tag{30}$$

$\mathcal{L}$ és invariant per les transformacions

$$x \to x + \epsilon_1 - \epsilon x, \quad t \to t + \epsilon_2 + \epsilon t, \quad u \to u \tag{31}$$

que corresponen a translacions espacials i temporals (ϵ_1, ϵ_2) i a una dilatació temporal i contracció espaial ϵ. Aquestes transformacions donen lloc a tres lleis de conservació:

$$\begin{aligned}
&\text{Traslació espaial:} && \partial_t\big(\frac{1}{2}u_x^2\big) + \partial_x\big(\frac{1}{3}u^3\big) = 0 \\
&\text{Traslació temporal:} && \partial_t\big(\frac{1}{3}u^3\big) + \partial_x\big(\frac{1}{2}u_t^2\big) = 0 \\
&\text{Dilatació:} && \partial_t\big(\frac{1}{3}tu^3 - \frac{1}{2}xu_x^2\big) + \partial_x\big(\frac{1}{2}tu_t^2 - \frac{1}{3}xu^3\big) = 0
\end{aligned}$$

4. El segon teorema de Noether

Grups de Lie de dimensió infinita. Hi ha simetries que en lloc de dependre d'un nombre finit (o numerable) de paràmetres, contenen *funcions* arbitràries. Llavors parlem de grups de Lie de dimensió infinita. En la notació de Emmy Noether, escriurem:

- $\mathcal{G}_m$: grups de Lie de dimensió finita m; les transformacions contenen m paràmetres arbitraris.
- $\mathcal{G}_{\infty,m}$: grups de Lie de dimensió infinita no numerable; les transformacions contenen m funcions arbitràries.

Les *transformacions de gauge*, típiques de la teoria de camps, son d'aquesta mena. Per exemple, pel camp electromagnètic, si fem

(32) $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi$, deixa invariant $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, i $\mathcal{L}$,

per qualsevol funció $\phi(x,t)$. En aquest cas, tenim invariància per $\mathcal{G}_{\infty,1}$.

El teorema II de Noether. El teorema s'aplica a sistemes dinàmics continus derivats d'un principi de mínima acció, (13), però ara les equacions del moviment són invariants per un grup de Lie de dimensió infinita, $\mathcal{G}_{\infty,m}$. Encara és vàlida l'expressió obtinguda per grups de Lie de dimensió finita a §4,

$$D_x\Big\{\mathcal{L}\delta x + \sum_{\ell=1}^{k}(-1)^{\ell-1}D_x^{\ell-1}\Big(\sum_{j=\ell}^{k}\binom{j}{\ell}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x^j u)}\bar{\delta}u^{j-1}\Big) + \delta\Omega\Big\} = -\psi\bar{\delta}u,$$

per una transformació de simetria $(x,u)\to(x+\delta x, u+\delta u)$ on δx, δu contenen una funció arbitrària p. Però ara, com que p no és constant i no commuta amb D_x, no surt factor comú al primer membre, i no podem ja obtenir quantitats conservades sobre les trajectòries del sistema. Les identitats $fD_xp = -pD_xf + D_x(fp)$, $fD_x^jp = (-1)^j pD_x^j f + D_x(\dots)$ permeten manipular el terme $\psi\bar{\delta}u$ i obtenir

$$\big(a_0\psi + a_1 D_x\psi + \dots + a_j D_x^j\psi + \dots\big)p = D_x(B) \tag{33}$$

on B és lineal en p i les seves derivades. Integrant sobre recintes arbitraris, arribem a

$$a_0\psi + a_1 D_x\psi + \dots + a_j D_x^j\psi + \dots = 0, \tag{34}$$

expressió que el Lagrangià $\mathcal{L}$ ha de satisfer idènticament per admetre una transformació de simetria amb una funció arbitrària. Per $\mathcal{G}_{\infty,m}$ obtenim m expressions d'aquest tipus; però ara aquestes expressions s'anul·len idènticament sobre les trajectòries (definides per $\psi = 0$). Noether les anomena expressions *impròpies*. Les quantitats conservades són no trivials (*pròpies*) sols per $\mathcal{G}_m$, i de fet sols quan $\mathcal{G}_m \not\subset \mathcal{G}_{\infty,m}$, ja que d'un grup de Lie infinit dimensional sempre podem extreure subgrups de Lie de dimensió finita (substituint les funcions arbitràries per constants), però aquest procediment en aquest cas no proporcionarà quantitats conservades, sinó identitats.

Exemple: transformació de gauge del camp electromagnètic. Hem vist abans que el Lagrangià del camp electromagnètic

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad \text{on} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{35}$$

és invariant per les transformacions de gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\phi$. El teorema II de Noether ens porta a

$$\partial^2_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi = D_\mu\{(\partial_\mu F^{\mu\nu})\phi - F^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\} \tag{36}$$

L'equació que ens dóna el teorema II de Noether és $\partial^2_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$, que és idènticament nul·la degut al caràcter antisimètric de $F^{\mu\nu}$. Si posem ϕ constant obtenim un grup uniparamètric de transformacions, i l'aplicació del Teorema I de Noether ens porta a la mateixa equació. L'equació obtinguda en aquest cas és l'anul·lació de la divergència $\partial_\mu F^{\mu\nu}$, que són simplement les equacions d'Euler-Lagrange del camp electromagnètic,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{37}$$

Per tant, les expressions obtingudes són idènticament nul·les (impròpies), i no obtenim cap quantitat conservada.

Relativitat General. Les teories de camps que hem vist fins ara descriuen la dinàmica d'un camp en un espai-temps donat immutable: l'espai temps euclidià per la mecànica clàssica o l'espai de Minkowsky per la relativitat restringida.

A la relativitat general, l'estructura de l'espai temps ve condicionada per la matèria present. L'estructura de l'espai temps ve descrita pel tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, $R^{\lambda\mu\rho\nu}$, que depèn únicament del tensor mètric $g_{\mu\nu}$ i les seves derivades, mentre que la matèria es descriu amb el tensor d'energia-impuls $T^{\mu\nu}$, que ja hem trobat abans i depèn del Lagrangià que descriu la interacció de la matèria. La connexió la donen les equacions d'Einstein de la relativitat general,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \chi T^{\mu\nu}, \qquad \chi = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{38}$$

on $R^{\mu\nu} = R_{\lambda}{}^{\mu\lambda\nu}$ és el tensor de Ricci, $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ l'escalar de curvatura, G la constant gravitatòria i c la velocitat de la llum. Aquestes són les equacions enviades a publicar per Einstein el novembre de 1915 [Ein] com ja hem comentat a la introducció. Aquestes equacions son les mateixes en qualsevol sistema de coordenades, i per tant son invariants pel grup de transformacions de coordenades, $\mathcal{G}_{\infty,4}$, que conté quatre funcions arbitràries.

Implicacions del Teorema II de Noether. El mateix novembre de 1915 Hilbert va enviar un article [Hil] on obtenia les mateixes equacions a partir d'un problema variacional,

$$I = \int (\mathcal{L} + \chi^{-1}R)\sqrt{-g}\,d^4x \tag{39}$$

on $\mathcal{L}$ és el Lagrangià de la matèria i g és el determinant del tensor mètric. Per exemple, si introduïm el camp electromagnètic,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \text{i} \quad T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) \tag{40}$$

obtindríem les equacions d'Einstein-Maxwell.

Tenim així tots els ingredients per aplicar el Teorema II de Noether; com que el grup de transformacions és de dimensió infinita, no existeixen quantitats conservades, en el sentit que ens donin un corrent localment conservat ($\partial_\mu \mathcal{F}^\mu = 0$). El que s'obté de l'aplicació del Teorema II de Noether són les identitats de Bianchi del tensor de curvatura,

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma;\rho} + R^\mu{}_{\nu\sigma\rho;\lambda} + R^\mu{}_{\nu\rho\lambda;\sigma} = 0, \tag{41}$$

on hem introduït la notació $_{;\mu}$ per indicar la derivada covariant associada a la mètrica $g_{\mu\nu}$.

'Conservació de l'energia' en relativitat general. Les identitats de Bianchi impliquen que el tensor de Ricci satisfà

$$\big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\big)_{;\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \tag{42}$$

on hem fet servir les equacions d'Einstein. L'última expressió és el que es considera el principi de conservació de l'energia en relativitat general; però ara, les derivades parcials que apareixen al Teorema I de Noether (17) resulten substituïdes per derivades covariants, amb termes addicionals dependents de l'estructura de l'espai temps. En conseqüència, no podem deduir-ne principis locals de conservació com a (17). Això és el que va clarificar Emmy Noether en la secció §6 i última del seu article del 1918 [No2], titulat *A Hilbertian Assertion*. Molts anàlisis posteriors han permès clarificar aquest assumpte totalment. Així, esmentarem que aquest principi de conservació *no és un principi local*, ja que qualsevol càlcul local de conservació resulta dependent del sistema de coordenades utilitzat. En canvi, *sí és un principi global*: Donada una hipersuperfície tipus espai que sigui asimptòticament plana, llavors es pot formular un principi de conservació de l'energia global, que és Poincaré invariant lluny de les fonts del camp. El mètode de construcció del corrent conservat ja fou apuntat a l'article d'Emmy Noether del 1918.

El problema a relativitat general és que l'energia es transfereix entre els camps que descriuen la matèria i l'estructura de l'espai temps, i aquesta transferència no té un caràcter local.

5. Desenvolupaments posteriors dels teoremes de Noether

En els 90 anys passats des de la seva formulació s'han produït molts desenvolupaments a partir del Teoremes de Noether, consistents essencialment en transportar aquets resultats a altres formulacions. Així podem esmentar:

- Formulació dels Teoremes de Noether en formalisme Hamiltonià i la seva relació amb les transformacions canòniques ([G-S] és una referència clàssica; per una formulació breu i molt assequible, cf. [Tak], Theorem 2.17).
- Formulació del Teorema de Noether en fibrats sobre varietats diferenciables ([Kru]).
- Extensió de la teoria a Lagrangians singulars i a sistemes amb lligadures [Lec].
- Construcció de tècniques basades en els Teoremes de Noether per EDP que no deriven d'un principi variacional (cf. [NMM]).

Referències

[By1] N. Byers, *The Life and times of Emmy Noether: Contributions of Emmy Noether to particle physics*, UCLA-94-TEP-42, e-Print: `hep-th/9411110, 1994`.

[By2] N. Byers, *E. Noether's discovery of the deep connection between symmetries and conservation laws*, UCLA-98-TEP-20A, e-Print: `physics/9807044, 1998`.

[Ein] A. Einstein, *Sitzungsberichte*, Preussische Akademie der Wissenschaften, p. 844, 1915.

[Fle] D. C. Fletcher, *Conservation laws in linear elastodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 60(4), 329-353, 1976.

[Fra] T. Frankel, *The Geometry of Physics—An Introduction*. Cambrigde University Press, 1998.

[Gol] H. Goldstein, Ch. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics* (3rd edition). Pearson, 2002.

[G-S] H. Goldsmith, S. Sternberg, *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*. Ann. de l'Institut Fourier, tome 23, nº1 (1973), p. 203-267.

[Hil] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, S. 395-407, 1915.

[Kim] Clark Kimberling in *Emmy Noether, A Tribute to Her Life and Work*; James W. Brewer and Martha K. Smith, ed.; Marcel Dekker, Inc.

[Kru] D. Krupka, *Some geometric aspects of variational problems in fibred manifolds.* Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purk. Brunensis, Physica 14, Brno (Czechoslovakia), 1973.

[Lec] M. Leclerc, *Noether's theorem, the stress-energy tensor and Hamiltonian constraints*, `arXiv:gr-qc/0608096v4`.

[Lev] J. M. Lévy-Leblond *Conservation Laws for Gauge-Variant Lagrangians in Classical Mechanics.* American Journal of Physics, **39**, 502-506, 1971.

[Naz] R. Naz, F.M. Mahomed, D.P. Mason, *Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics*, Applied Mathematics and Computation, 205, 212-230, 2008.

[No1] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke.* Nachr. d. König Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, pp. 37-44, 1918.

[No2] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, pp. 235-257, 1918. Per una traducció a l'anglès, vegeu `arXiv:physics/0503066v1 [physics.hist-ph]`.

[NMM] R. Naz, F.M. Mahomed, D.P. Mason: *Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics.* Applied Mathematics and Computation **205** (2008), 212-230.

[Mon] M. Montesinos, E. Flores, *Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether's theorem*, `arXiv:hep-th/0602190v1`.

[Pai] A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.

[Sch] L. I. Schiff, *Quantum mechanics.* McGraw-Hill, 1968.

[Tak] L. A. Takhtajan, *Quantum Mechanics for Mathematicians.* Graduate Studies in Mathematics, **95**. American Mathematical Society, 2008.

[Wey] H. Weyl, Scripta Mathematica III. 3 201-220, 1935; està traduït a l'anglès a [Pai].