EMMY NOETHER: UNA CONTRIBUCIÓN EXTRAORDINARIA Y GENEROSA AL ESTABLECIMIENTO DE LA GEOMETRíA ALGEBRAICA

RAQUEL MALLAVIBARRENA

Resumen. Emmy Noether, matemática excepcional, no se dedicó propiamente a la Geometría Algebraica, pero sus aportaciones y razonamientos en el ámbito del Álgebra Conmutativa contribuyeron de modo muy importante a clarificar y dar rigor al estudio de las variedades algebraicas.

1. Motivación del título

1.1. Una contribución extraordinaria y generosa. Emmy Noether no se dedicó propiamente a la Geometría Algebraica, pero fue consciente de que sus investigaciones sobre la Teoría de Anillos e Ideales tenían consecuencias geométricas importantes cuando se particularizaban al anillo de polinomios en varias variables. Coincidió en el tiempo con los trabajos encaminados a dar rigor, mediante el Álgebra Conmutativa, al estudio y clasificación de las variedades algebraicas, objetos principales de la Geometría Algebraica.

B. L. van der Waerden fue alumno destacado de Emmy Noether cuando ella estaba en la Universidad de Göttingen. Sus aportaciones a la fundamentación de la Geometría Algebraica son bien conocidas y en ellas queda patente la influencia del trabajo algebraico de Emmy Noether (cf. [9]).

Muchos razonamientos de Emmy Noether han sido absorbidos por la cultura matemática general y por ello no es fácil ver la influencia directa que tuvo en las investigaciones de otras personas.

Alexandrov, gran amigo de Emmy Noether, escribió en el obituario con motivo de su fallecimiento ([6])

> ...eran ajenas a ella la búsqueda de gloria y de éxito en el mundo ...

Esta frase nos confirma la apreciación anterior: sus contribuciones a la Geometría Algebraica fueron sólidas e importantes pero en cierto sentido han quedado diluídas en trabajos de otras personas o forman parte de conocimientos básicos cuyo origen es desconocido para muchos. En todo caso el uso esencial de los anillos noetherianos en Geometría Algebraica deja constancia de su nombre aunque no sean tan conocidas sus aportaciones concretas al estudio y aplicaciones de estos anillos.

En las biografías de Emmy Noether y también en los testimonios de los que la conocieron, sobre todo en el período alemán, queda constancia de la gran preocupación que tenía por sus alumnos y jóvenes investigadores en general. Su dedicación, entusiasmo y capacidad para las Matemáticas se hacían patentes en las tertulias organizadas en su casa para colegas y estudiantes o los paseos por la ciudad de Göttingen y sus alrededores con las mismas características.

B. L. van der Waerden le presentó en una ocasión unos resultados obtenidos a partir de unos artículos suyos y de Hentzel, otro estudiante suyo muerto en la Primera Guerra Mundial. Ella también los había obtenido por su cuenta para completar el trabajo de Hentzel, pero no le dijo nada a van der Waerden y aceptó su trabajo en Mathematische Annalen. Él supo más tarde que ella había hecho lo mismo independientemente.

1.2. Establecimiento de la Geometría Algebraica. Esta rama de la Geometría se había ido desarrollando en los siglos anteriores y se basa en el estudio de los conjuntos de ceros comunes a una cantidad finita de polinomios en varias variables:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\cdots \\ f_r(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

A estos conjuntos de puntos de les llama *variedades algebraicas*.

A finales del siglo XIX y principios del XX se obtienen resultados y modos de razonamiento muy importantes por parte de la llamada *Escuela italiana* y de otros matemáticos europeos. Max Noether, padre de Emmy, es uno de estos últimos. Los nombres de Segre, Castelnuovo, Enriques o Severi deben ser mencionados como figuras principales de la escuela italiana.

La Escuela italiana aporta resultados muy notables que reflejan una gran visión geométrica de los autores. A la vez aparecen problemas de precisión, conceptos que no están claros y demostraciones incompletas. Por ejemplo:

- Distinción entre puntos generales (puntos que verifican las propiedades de casi todos los puntos de la variedad) y puntos cualesquiera de la variedad. Si pensamos en curvas planas con nodos o cúspides, o superficies como un cono cuádrico, un par de planos que se cortan en una recta o la desarrollable tangencial de una curva alabeada, intuiremos que los nodos y cúspides, el vértice del cono, la recta de intersección de los dos planos o la curva alabeada dentro de la desarrollable tangencial, son puntos especiales que pueden presentar propiedades distintas que el resto de los puntos. Delimitar qué puntos verifican cierta propiedad en una variedad presenta dificultades en muchos casos, sobre todo en variedades de dimensión alta y cuya construcción es más complicada que la de los ejemplos citados.
- Multiplicidades. Medir la intersección entre dos variedades algebraicas no es fácil si no disponemos de técnicas adecuadas. Hay situaciones límite en las que una variedad comparte con otra no sólo un punto, sino varias direcciones infinitesimales en ese punto. Los geómetras italianos no acertaron siempre a la hora de medir estas multiplicidades con precisión o intuyeron el resultado correcto pero no dieron argumentos rigurosos para demostrarlo.
- Conservación del número. Si estamos seguros de que el número que queremos calcular (puntos en determinada intersección) no cambia si especializamos la configuración geométrica, puede resultar más fácil trabajar en el caso especial en vez de en el caso general. Un ejemplo sencillo: si queremos calcular el número de puntos de corte entre dos curvas planas y sabemos que se conserva el número en una situación

especial podemos considerar que cada curva es unión de rectas distintas (tantas como el grado de la curva) y calcular así el número de puntos de intersección.

- Con frecuencia, en las demostraciones de los resultados conocidos hasta el momento de Geometría Algebraica, aparecían técnicas puramente algebraicas y otras de tipo analítico. Para darle autonomía a la Geometría Algebraica era preciso disponer de técnicas propias.
- El trabajo de Emmy Noether con cuerpos abstractos contribuye al punto anterior en el sentido del desarrollo de técnicas algebraicas que no dependan del cuerpo base elegido. Los geómetras italianos trabajaron sobre el cuerpo de los números complejos. La Geometría Algebraica posterior utiliza cuerpos base generales hasta donde es posible. Para ciertas situaciones hay que imponer condiciones sobre la característica del cuerpo, que sea algebraicamente cerrado,...o buscar demostraciones diferentes según los casos. El famoso texto de Zariski, *Conmutative Algebra*, publicado en 1958 en colaboración con Samuel, contribuyó de modo importante a la autonomía de la Geometría Algebraica con técnicas propiamente algebraicas. Las aportaciones fundamentales de Zariski a la resolución de singularidades fueron también un paso en la fundamentación rigurosa de la Geometría italiana.

Las herramientas algebraicas necesarias para una fundamentación rigurosa de la Geometría Algebraica, tema de gran importancia en la época en la que vivió Emmy Noether, fueron: La Teoría de Ideales, la Teoría de Eliminación y la Teoría de Cuerpos. Este proceso de fundamentación transcurrió asociado a los nombres de Dedekind, Kronecker, Hilbert o Van der Waerden entre otros. Una exposición más detallada y rigurosa sobre este proceso puede leerse en el artículo histórico de van der Waerden que aparece en [9].

Una etapa clave en este proceso de fundamentación de la Geometría Algebraica, y que llevó a su extensión a contextos mucho más amplios, se produjo más tarde: fue la introducción de la teoría de haces y esquemas tratando de traducir al ámbito algebraico el papel tan importante de los haces en Topología y Geometría Analítica. Dos nombres son de obligada referencia en esta etapa: Serre y Grothendieck. Además de los haces y esquemas, una herramienta básica es la cohomología de haces.

A la vista del artículo de Pere Pascual en este volumen, podemos mencionar de nuevo aquí a Emmy Noether y su importante papel en el nacimiento del Álgebra Homológica y por tanto podemos concluir que de algún modo está presente en el desarrollo de la Geometría Algebraica actual.

La Geometría Clásica llega así, fundamentada y rigurosa, hasta nuestros días y sigue siendo una línea de investigación activa conectada con muy diversos campos.

Una de las técnicas más empleadas en la Geometría Algebraica contemporánea a Emmy Noether fue la llamada *Teoría de Eliminación*. Se pretende encontrar un análogo a la eliminación de parámetros en las ecuaciones que definen las variedades lineales pero con ecuaciones polinómicas de cualquier grado (las que determinan las variedades algebraicas). Naturalmente el problema general, con ecuaciones de grado superior a uno es mucho más complicado y los cálculos son con frecuencia largos y farragosos. Se definen las resultantes o eliminantes y los discriminantes para obtener los ceros comunes a dos polinomios o a un polinomio y su derivada.

En la comunidad matemática de la época hubo quienes intentaron evitar su uso o simplificarlo. Mucho después, los tratamientos informáticos y computacionales de estos problemas geométricos han vuelto a poner de actualidad la eliminación: la definición de las bases de Gröbner y los algoritmos para su uso que se han desarrollado en las últimas décadas ponen de manifiesto que es posible abordar la eliminación y obtener de ella resultados importantes. También puede verse en [4] una demostración de la completitud del espacio proyectivo en la que se utiliza la teoría de eliminación clásica. Quede en todo caso como anécdota la siguiente frase de A. Weil en 1946, muestra del ambiente que se vivió en aquellos momentos:

> Hemos conseguido por fin eliminar la eliminación.

En relación con la Teoría de Ideales y Cuerpos, hay que insistir en el papel fundacional de Emmy Noether, con su extraordinaria capacidad de abstracción, a la hora de dar las definiciones de anillo e ideal y su trabajo con los cuerpos abstractos ya mencionado. A continuación se indican simplemente algunas definiciones y cuestiones básicas:

- Sea $(A, +, .)$ un anillo. Decimos que un subconjunto I de A es un *ideal* de A si para la suma de A restringida a I es un grupo y verifica además la propiedad: para todo $x \in A$ y para todo $y \in I$, el producto $xy \in I$.
- Los *cuerpos* son anillos en los que podemos dividir (excepto por el cero). Las variedades algebraicas (ceros comunes a una cantidad finita de polinomios en varias variables) pueden asociarse a unos anillos y cuerpos de cuyo estudio se deducen resultados muy importantes.

2. Emmy Noether y B. L. Van der Waerden

Bartel Leendert van der Waerden nació en Amsterdam en 1903 y falleció en Zurich en 1996. Estudió Matemáticas en su ciudad natal, donde ya se distinguió como alumno brillante, y entre 1924 y 1926 en Göttingen, donde estudió con Emmy Noether, de la que recibió una gran influencia. En esta universidad alemana, tan importante en la época, consiguió la habilitación en 1928. Previamente, en 1925, se había doctorado en Amsterdam.

Mencionarle en una ponencia sobre Emmy Noether y la Geometría Algebraica tiene sentido, pues contribuyó en gran medida a difundir las ideas y razonamientos de Emmy Noether en sus trabajos de Álgebra y Geometría Algebraica.

Podemos comentar aquí que los razonamientos tan abstractos de Emmy Noether eran a veces poco accesibles para un público general. Hay referencias y anécdotas de ello en las biografías que se han escrito y también en los relatos de alumnos suyos. Se desenvolvía mejor en las clases para alumnos más avanzados o en conversaciones con ellos fuera de la docencia reglada.

El famoso texto de van der Waerden, "Moderne Algebra", contiene en el segundo volumen material abundante de las clases de Emmy Noether [7].

B. L. van der Waerden publicó en la década de los treinta varios artículos sobre Geometría Algebraica en la revista Mathematische Annalen. En estos artículos dió una definición precisa de dimensión de una variedad algebraica. Para ello utiliza la teoría de ideales en anillos de polinomios creada por Artin, Hilbert y Emmy Noether, y también la teoría algebraica de cuerpos. Queda fuera del ámbito de esta ponencia comentar estos estudios (y confrontarlos, por ejemplo, con las opiniones de Severi sobre los mismos), así como analizar su propia evolución, visible en su libro de 1939 (*Einführung in die Algebraische Geometrie*), sobre todo por su mayor conocimiento de la geometría italiana (v., a este respecto, el comentario de Dan Pedoe en [7]).

3. El lema de normalización de Noether

Este resultado de Álgebra Conmutativa, debido en su forma más completa a Emmy Noether, tiene una traducción geométrica de gran utilidad y que forma parte de la cultura general y básica en Geometría Algebraica. La primera demostración que conocemos para un cuerpo infinito está en [5].

3.1. Investigaciones de Kronecker y Emmy Noether. Podemos considerar como resultados que dieron lugar al lema de normalización, tal como se conoce hoy, los siguientes:

- Con métodos de la Teoría de Eliminación, Kronecker había probado que toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles. Igualmente demostró que, después de una transformación lineal de coordenadas, todos los puntos de una variedad irreducible de dimensión d pueden obtenerse de este modo: *las primeras coordenadas,* $x_1, \ldots, x_d$*, son arbitrarias y las otras son funciones algebraicas de estas* d *primeras.*
- Un estudiante de Emmy Noether, Henzel, había obtenido un método de eliminación más elegante que los habituales. Emmy Noether, utilizando el método de Henzel, llegó a los mismos resultados que Kronecker y los completó reemplazando las coordenadas definidas sobre la variedad por indeterminadas y trabajando con el llamado *cuerpo de ceros* del ideal primo que define la variedad irreducible (*cuerpo de funciones*).

3.2. Enunciado y demostración del lema. Tomamos el enunciado que aparece en [1] (v. también [3] y el capítulo I de [4]).

Lema de normalización de Noether: Sea K un cuerpo y $A \neq 0$ una K-algebra con generación finita, $A = K[x_1, \dots, x_n]$. Entonces existen elementos $y_1, \dots, y_r$ de A que son algebraicamente independientes sobre K y tales que A es entero sobre $K[y_1, \dots, y_r]$.

Esquema de la demostración (según el texto [1]):

- Partimos de que $A = K[x_1, \dots, x_n]$. Las hipótesis nos permiten afirmar que, reordenando las variables, las primeras r son algebraicamente independientes sobre K y el resto algebraicas sobre $K[x_1, \dots, x_r]$.
- Aplicamos inducción sobre n para demostrar la segunda parte del enunciado.
- Si $n = r$ no hay nada que probar. Si $n > r$ y el resultado es cierto para $n-1$, el generador x_n es algebraico sobre $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ y por tanto existe un polinomio f no nulo con n variables tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Sea F la parte homogénea de mayor grado de f. Como K es infinito, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ tales que $F(\lambda_1, , \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$.
- Si $x'_i = x_i - \lambda_i x_n, (1 \leq i \leq n)$, se prueba que x_n es entero sobre el anillo $A' = K[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$ y por tanto A es entero sobre A'.
- Se termina aplicando la hipótesis de inducción.

De la demostración se deduce que $y_1, \dots, y_r$ pueden elegirse como combinaciones lineales de $x_1, \dots, x_n$.

En [3] pueden verse una demostración y un enunciado ligeramente distintos del que en este caso se llama *Teorema de normalización*. Hay una definición que surge naturalmente del Lema (Teorema):

Si A es una K-álgebra afín no nula, $K[y_1, \dots, y_r] \subset A$ es una *normalización noetheriana* si $y_1, \dots, y_r$ son algebraicamente independientes sobre K y A es un $K[y_1, \dots, y_d]$-módulo finitamente generado.

La demostración de [3] y de [4] vale para cualquier cuerpo, finito o infinito, y especifica que la expresión lineal de las $y_1, \dots, y_r$ en función de las $x_1, \dots, x_n$ se verifica en el caso en el que K es infinito.

3.3. Interpretación geométrica del lema en el espacio afín y en el espacio proyectivo. Aplicando el lema al anillo de coordenadas de una variedad llegamos a resultados geométricos:

Proposición: Si K es algebraicamente cerrado y X es una variedad algebraica afín de $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^n(K)$, con anillo de coordenadas $A = K[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ y dimensión r, entonces existe una variedad lineal L de dimensión r de $\mathbf{A}^n$ y una aplicación lineal (proyección paralela) de $\mathbf{A}^n$ sobre L que aplica X sobre L y la antiimagen en X de cualquier punto de L es finita. (Ver [1], [3] y [8] (Cap. 1)).

La demostración se basa en aplicar el lema de normalización a la K-álgebra A y entonces encontramos $y_1, \ldots, y_r$, que son polinomios homogéneos lineales de $x_1, \ldots, x_n$. Como además son algebraicamente independientes sobre K, mediante un cambio de coordenadas podemos suponer que $y_i = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Consideramos la variedad lineal L de dimensión r dada por $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$. Como el lema de normalización afirma que A es un $K[x_1, \ldots, x_r]$-módulo finitamente generado, por las propiedades de las extensiones enteras de anillos, como es el caso, y en concreto la correspondencia entre los ideales maximales de los dos anillos, se demuestra que la proyección de $\mathbf{A}^n$ sobre L cumple lo que afirma el enunciado.

Un ejemplo elemental de este resultado es la parábola de $\mathbf{A}^2$ dada por $y = x^2$ y su proyección paralela de dirección vertical sobre la recta $y = 0$. Por otra parte, las cónicas $xy = 0$ y $xy-1 = 0$, y sus proyecciones sobre los ejes X e Y, no cumplen la proposicióm, ya que en el primer caso hay fibras infinitas y en el segundo no son sobreyectivas, pero es fácil hacer un cambio coordenadas (que en todo caso debe existir por el lema de normalización) para las cuales las proyecciones horizontales o verticales cumplen la proposición.

Una consecuencia de la proposición es la siguiente:

Corolario: Si X es una variedad algebraica de dimensión r de $\mathbf{A}^n$ $r \geq 0$, existe una variedad lineal L' de dimensión $n - r$ tal que corta a X en una cantidad finita de puntos y otra variedad lineal L'' de dimensión $n - r - 1$ que no corta a X.

La demostración del Corolario se basa en la proyección de la proposición. La antiimagen de cualquier punto p de L por la proyección de $\mathbf{A}^n$

a L, es una variedad lineal, L', de dimensión $n-r$ cuyo corte con X es la antiimagen finita de p por la proyección restringida a X. Si ahora elegimos un hiperplano H que no contiene a ninguno de los puntos de X anteriores (se demuestra que H existe por un cálculo de dimensiones de los conjuntos de hiperplanos que pasan por una cantidad finita de puntos), podemos definir L'' como $L' \cap H$ que verifica lo que se pide en el enunciado.

Observación: La demostración anterior lleva a concluir que, variando el punto p de L, *casi todas* las variedades lineales de $\mathbf{A}^n$ de dimensión $n-r$ (hay que precisar este concepto excluyendo a las paralelas a L y variando la dirección de la proyección paralela) cortan en una cantidad finita de puntos a X y además se puede demostrar que esa cantidad finita es casi siempre la misma.

Si consideramos ahora *variedades algebraicas proyectivas* (conjuntos de un espacio proyectivo dados por ceros comunes a una cantidad finita de polinomios homogéneos) podemos también obtener algunas consecuencias del Lema de Normalización que se demuestran de manera análoga al caso afín:

Proposición: Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y sea X una variedad algebraica proyectiva de $\mathbf{P}^n(K)$ de dimensión $r \geq 0$. Entonces existen variedades lineales L y L' de dimensión r y $n-r-1$, respectivamente, que son disjuntas, L' no corta a X y tales que la proyección central de X en L desde L' es exhaustiva y con fibras finitas.

Observación: La proyección central desde L' se define del modo siguiente: Para cada $x \in X$, la variedad lineal generada por x y L' tiene dimensión $n-r$ y corta a L en un punto, y, que es, por definición, la imagen de x por la proyección central desde L'.

4. Consideraciones finales

Las ideas desarrolladas en el ámbito del Álgebra Conmutativa, y en concreto en la Teoría de Ideales, por Emmy Noether, han contribuido a clarificar y dar rigor de modo muy importante al estudio de las variedades algebraicas. El lema de normalización proporciona la existencia de proyecciones lineales con ciertas propiedades, lleva al estudio de la ramificación para dichas proyecciones, permite definir el grado y la dimensión de una variedad algebraica o la normalización de una variedad algebraica afín (v. [8]). Además los anillos noetherianos y sus propiedades constituyen el contexto algebraico en el que se trabaja con las variedades en la mayoría de los casos.

Los razonamientos abstractos y axiomáticos de Emmy Noether, a veces difíciles de entender, tuvieron una influencia clara en sus alumnos y matemáticos en general y permitieron un avance significativo en la Geometría y el Álgebra al dar definiciones generales de conceptos que hasta el momento se estudiaban en casos particulares, por muy importantes que fueran éstos.

El párrafo siguiente del citado obituario de Alexandrov [6] describe con gran sensibilidad la personalidad de tan impresionante mujer y matemática:

> *...Ella amó a las personas, a la ciencia y a la vida con todo el calor, el gozo, la generosidad y la ternura de los que es capaz un corazón –el corazón de una mujer– que siente profundamente.*

5. Agradecimientos

Mi agradecimiento a los organizadores de la Jornada Noether por la oportunidad de participar en ella y de acercarme de nuevo a la figura de Emmy Noether y su perseverancia para mantener su dedicación matemática en un ambiente hostil que la rechazaba por ser mujer. Especialmente agradezco a Sebastià Xambó sus comentarios y sugerencias para preparar esta ponencia.

Referencias

[1] M. Atiyah - I.G. MacDonald: *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Reverté, 1980.
[2] A. Dick: *Emmy Noether*, Birkhäuser, 1981.
[3] E. Kunz: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, 1985.
[4] D. Mumford: *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer LNM 1358, 1988.
[5] E. Noether: *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1926), 28-35.
[6] E. Noether: *Collected Papers*, Springer-Verlag, 1983.
[7] Artículo sobre B. L. van der Waerden de J. J. O'Connor y E. F. Robertson en `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Van_der_Waerden.html`
[8] I. R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, Second Edition, Springer - Verlag, 1994.
[9] B. L. van der Waerden: *Selected Papers*, Springer-Verlag, 1983.