EMMY NOETHER: DE L'ÀLGEBRA NO COMMUTATIVA A LA TEORIA DE NOMBRES

PILAR BAYER

Resum. Els treballs d'Emmy Noether en àlgebra no commutativa constitueixen la darrera etapa de la seva producció. Resultats remarcables obtinguts en aquest període foren el càlcul del grup de Brauer d'un cos local i del grup de Brauer d'un cos global, que s'aconseguiren al mateix temps que diversos teoremes de la teoria de cossos de classes. La participació de Noether en aquestes descobertes i, molt especialment, en les tècniques inherents a les seves demostracions exercí una notable influència en el desenvolupament posterior de la cohomologia de grups i en la formulació cohomològica de la teoria de cossos de classes.

Emmy Noether (1882–1935)

Atès que aquesta és l'última conferència del curs Noether, faré un breu resum de la trajectòria matemàtica d'Emmy Noether, abans d'entrar a parlar de les seves recerques en àlgebra no commutativa, que corresponen a la darrera etapa de la seva producció.

Nascuda a Erlangen (Baviera, Alemanya), el 23 de març de l'any 1882, Emmy Noether era filla de Max Noether, també matemàtic. Es doctorà als 25 anys a la Universitat d'Erlangen sota la direcció de Paul Gordan, un dels especialistes de l'època en teoria d'invariants. Del 1907 al 1915 treballà a l'Institut de Matemàtiques d'Erlangen, institució de la qual el seu pare també n'era professor i al qual ella suplia en alguna de les classes. L'any 1915 s'incorporà a la Universitat de Göttingen, a instàncies de F. Klein i de D. Hilbert. El 1919, quan comptava 37 anys, esdevingué la primera dona matemàtica habilitada per la Universitat de Göttingen; el tribunal estava format per Klein, Hilbert, Courant, Landau i Debye. Li fou concedida la *venia legendi* amb el títol de *Privatdozent*, càrrec que li permetia impartir docència a l'alumnat que ho sol·licités. L'any 1922 fou nomenada *Nichtbeamter ausserordentlicher Professor* (és a dir, professor extraordinari no funcionari).

Les seves classes solien tractar temes de la seva pròpia recerca, en els quals estava treballant. Aquest fet dotava les seves lliçons d'un caràcter poc metòdic, però viu i participatiu per part dels estudiants (que, sovint, n'editaven apunts). Durant el semestre d'hivern de l'any 1928 fou convidada a impartir un curs d'àlgebra a la Universitat de Moscou. L'any 1932 fou la primera dona matemàtica en presentar una conferència plenària en un *International Congress of Mathematicians* (ICM), celebrat aquell any a Zürich. L'any 1933, i després de l'arribada dels nazis al poder, hagué d'emigrar als EUA per la seva condició de jueva. A Amèrica la trobem com a professora del Bryn Mawr College, de Pennsylvania. Morí l'any 1935, a l'edat de 53 anys.

Emmy Noether

Sota el mestratge de Klein i de Hilbert, la Universitat de Götingen s'havia convertit en un pol d'atracció per a estudiants de matemàtiques d'arreu. Crida l'atenció la quantitat d'aquests que hi feien estades (ja fossin predoctorals o postdoctorals), becats pels seus propis governs, a banda de nombrosos professors visitants. De 1890 a 1920, Klein havia dirigít 27 tesis a Göttingen i, de 1898 a 1934, Hilbert n'hi dirigí 74.

Entre els matemàtics que col·laboraren amb Emmy Noether arran del seu pas per Götingen, esmentarem H. Weyl (1885–1955), E. Artin (1898–1962), H. Hasse (1898–1979), W. Krull (1899–1971), R. Brauer (1901–1977), B. van der Waerden (1903–1996), G. Köthe (1905–1989), Olga Taussky (1906–1995), A. Weil (1906–1998), M. Deuring (1907–1984), J. Herbrand (1908–1931) i E. Witt (1911–1991).

Artin feu estades a Göttingen els anys 1921–1922 i mantingué després un contacte permanent amb Noether.

Hasse hi feu una estada predoctoral l'any 1920 i en fou professor durant els anys 1934 al 1939, com a successor de Weyl. Tal com veurem, mantingué durant molts anys correspondència matemàtica amb Emmy Noether.

Van der Waerden hi feu una estada postdoctoral l'any 1924, becat per la fundació Rockefeller, i una altra l'any 1928, com a professor visitant. A banda, com és ben conegut, a partir dels cursos de Noether i dels d'Artin escriuria el seu famós text *Moderne Algebra*, editat en dos volums els anys 1930 i 1931, i que encara es continua reeditant.

Köthe fou alumne de Göttingen l'any 1928. Posteriorment no es dedicà a l'àlgebra, sinó que ho feu a l'anàlisi funcional.

Krull estudià a Göttingen en el decurs dels anys 1920–1921, en el seminari de Klein. Noether exercí una gran influència en l'obra de Krull sobre la teoria d'ideals i mantigué amb ell una amistat durant tota la vida.

Olga Taussky, quan ja era doctora, hi fou contractada en els anys 1931–1932, amb l'encàrrec específic de revisar i preparar l'edició de les obres de Hilbert.

Weil visità Göttigen l'any 1927, com a alumne predoctoral, i hi tornà l'any 1931, ja com a doctor. Herbrand i Deuring hi són l'any 1931 i Witt, l'any 1934.

Deuring i Witt formen part dels 13 estudiants a qui Noether dirigí la tesi, entre els quals hi trobem H. Fitting, C. Tsen i O. Schilling. Fitting és conegut per les seves recerques en grups finits. Schilling fou un dels difusors de la teoria de valoracions. De Tsen es recorda especialment el teorema fonamental de la seva tesi (llegida l'any 1936, cf. [20]) sobre el caràcter quasi-algebraicament tancat dels cossos de funcions en una variable sobre un cos algebraicament tancat. Aquest mateix resultat es retroba anys després en la tesi de S. Lang, llegida el 1951 i publicada el 1952, i que fou dirigida per E. Artin (cf. [11]).

Weyl, que prèviament havia fet la tesi a Göttingen sota la direcció de Hilbert, fou el successor d'aquest. Fou professor de la Universitat de Göttingen durant els anys 1930 al 1933. Després tornaria a coincidir amb Noether als EUA, quan Weyl era professor a l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton i Noether era professora del Bryn Mawr College de Pennsylvania.

Noether és una figura força propera, doncs dels matemàtics abans esmentats encara he tingut la sort de conèixer personalment Witt (a Barcelona), Deuring (a Regensburg) i Olga Taussky i Hasse (a Oberwolfach).

Hasse havia tingut dos directors de tesi: K. Hensel i E. Hecke. Del primer, que era el creador dels nombres p-àdics, recordo que li agradava rememorar que havia après a valorar la bellesa de les matemàtiques (en canvi, del segon l'espantaven les fórmules). En la seva tesi demostrà la validesa del principi local-global per a la classificació i la representació de nombres per formes quadràtiques definides sobre cossos de nombres. La seves recerques generalitzaven resultats previs, deguts a H. Minkowski, per a formes quadràtiques definides sobre el cos dels racionals (i obtinguts mitjançant congruències, sense l'ús dels nombres p-àdics).

Les cartes de Hasse a Noether s'han perdut, però no així les de Noether a Hasse. Les cartes del període 1925–1935 han estat editades recentment per P. Roquette (a qui Hasse dirigí la tesi) i per F. Lemmermeyer (a qui Roquette dirigí la tesi). Aquestes cartes, d'un alt contingut matemàtic i que posen de manifest la infatigable energia de Noether, es presenten en l'edició [12] acompanyades de comentaris molt precisos. En elles s'hi troben al·lusions de Noether a estudiants que feien estades a Götingen, com ara Herbrand o Weil.

E. Artin (1898–1962); H. Hasse (1898–1979)

R. Brauer (1901–1977)

B. van der Waerden (1903–1996)

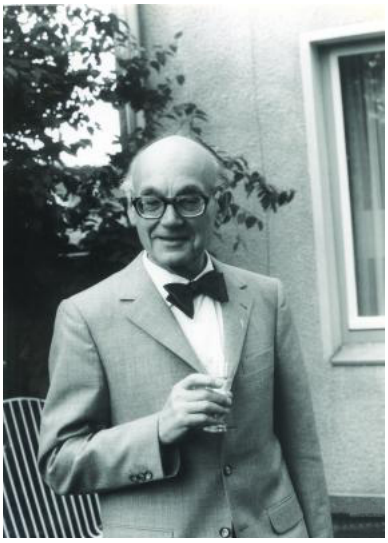
G. Köthe (1905–1989)

W. Krull (1899–1971)

O. Taussky (1906–1995)

A. Weil (1906–1998)

J. Herbrand (1908–1931)



M. Deuring (1907–1984)

E. Witt (1911–1991)

H. Weyl (1885–1955)

T. Takagi (1875–1960)

Índex

1. Resum de la producció de Noether

D'acord amb Hermann Weyl, en la producció de Noether s'hi distingeixen tres etapes:

En la primera etapa, del 1908 al 1919, el seu interès se centra en la teoria d'invariants, el problema invers de la teoria de Galois i el càlcul de variacions.

A aquesta etapa pertanyen els treballs següents:

- Noether, E.: Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Formen. *J. reine u. angew. Math.* 134 (1908), 23–90.

Aquesta extensa publicació conté la seva tesi. Gordan, el seu director, havia obtingut un sistema complet format per 54 invariants per a la forma quàrtica particular $X_1^3X_2 + X_2^3X_3 + X_3^3X_1$. Ella proporciona un sistema complet d'invariants per a qualsevol forma quàrtica en tres variables. Noether calcula sistemes complets d'invariants que contenen més de 300 fórmules. (Del seu director de tesi, Noether deia: *Er war ein Algorithmiker.*) Indirectament, és possible que el seu interès posterior per la recerca d'estructures algebraiques i per principis generals fos motivat per l'esforç de càlcul tan extraordinari que l'elaboració de la tesi li va reportar.

- Noether, E.: Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe. *Math. Ann.* 78 (1918), 221–229.

Aquest treball donà lloc a l'anomenat problema de Noether, en el context del problema invers de la teoria de Galois. Donat un grup finit G que opera en una extensió transcendent pura $k(X_1, \dots, X_n)/k$, es tracta de trobar condicions sobre G que permetin afirmar que l'extensió proporcionada pel cos d'invariants $k(X_1, \dots, X_n)^G/k$ és, també, transcendent pura. Noether demostrà que això és així per a $n \leq 4$. L'any 1969, R. G. Swan trobà un contraexemple per a $n = 47$ i G un grup cíclic d'aquest ordre. El problema de Noether és encara avui motiu d'una intensa recerca (cf. [10]).

- Noether, E.: Invariante Variationsprobleme. (Vorgelegt von F. Klein.) Nachr. v. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, 1918, 235–257.

Aquest treball fou presentat per ella a la Societat de Matemàtiques de Göttingen i per Klein, a la Societat de Ciències de Göttingen (que no la va acceptar mai entre els seus membres, per la seva condició de dona). Constitueix la contribució de Noether a la física. En el treball s'hi troba el famós teorema de Noether segons el qual tot sistema dinàmic invariant per l'acció d'un grup de Lie de n paràmetres admet n invariants, o quantitats conservades, en el decurs de la seva evolució. D'aquest teorema se n'han fet posteriorment múltiples versions i generalitzacions. En teoria de camps, el teorema descriu quina és la quantitat que es conserva quan es coneix el grup de simetries de l'equació en derivades parcials definidora del camp (cf. l'article de F. Marquès en aquest mateix volum).

En la segona etapa, del 1920 al 1926, es dedica a l'estudi dels anells commutatius i a la teoria d'ideals. En aquest període prepara també l'edició de l'obra de R. Dedekind. Els principals treballs són:

- Noether, E.: Idealtheorie in Ringbereichen. *Math. Ann.* 83 (1921), 24–66.

- Noether, E.: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie im algebraischer Zahl-und Funktionenkörpern. *Math. Ann.* 96 (1927), 26–61.

No en parlaré perquè han estat objecte de conferències anteriors dins d'aquest cicle (cf. l'article de S. Zarzuela en aquest mateix volum).

En la tercera etapa, del 1927 al 1935, Noether treballa en sistemes hipercomplexos i en el desenvolupament de la teoria de les representacions dels grups, com a un cas particular de la teoria de mòduls. En aquest període s'hi inscriuen els articles següents, que comentarem tot seguit.

- Noether, E. (amb R. Brauer): Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1927), 221–228.
- Noether, E.: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.
- Noether, E. (amb R. Brauer i H. Hasse): Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. für reine u. angew. Math.* 167 (1932), 399–404.
- Noether, E.: Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.
- Noether, E.: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. *Math. Ann.* 108 (1933), 411–419.

La seva producció fou editada íntegrament per l'editorial Springer, l'any 1983, sota la revisió de N. Jacobson [13]. L'obra aplega 43 treballs i, que jo conegui, es tracta de l'única recopilació que Springer ha fet de l'obra d'una matemàtica:

- Noether, E.: *Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers.* N. Jacobson (ed.) Springer-Verlag, 1983; p. viii + 777.

2. Àlgebra no commutativa

En el comentari següent de Gauss s'hi ha llegit un primer intent d'anar més enllà dels nombres complexos:

> Per què les relaciones entre coses que representen una multiplicitat de més de dues dimensions no poden proporcionar altres tipus de quantitats permisibles en aritmètica general?
>
> C. F. Gauss, *Werke* 2, p.169–178

Les multiplicitats de més de dues dimensions en les quals les operacions aritmètiques hi són permeses s'nomenaren, primerament, nombres hipercomplexos i, més endavant, àlgebres (de dimensió finita, primer, i no necessàriament finita, posteriorment). Comportaren però haver de treballar amb estructures no commutatives. Els inicis de l'àlgebra no commutativa foren lents, precisament per la dificultat de localitzar estructures no commutatives (a banda de les obtingudes mitjançant les àlgebres de matrius).

Històricament, el primer exemple d'estructura no commutativa se situa en la invenció per part de W. R. Hamilton, l'any 1843, dels quaternions:

$$\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Es tracta d'una àlgebra sobre el cos dels nombres reals $\mathbb{R}$, de dimensió 4, que, a més, és un cos.

Els cossos no necessàriament commutatius es coneixen en la literatura sota noms diferents: *Schiefkörper* (en alemany); *skew field* o bé *division ring* (en anglès) i *corps gauche* (en francès). En aquest treball els anomenarem *anells de divisió* i els representarem per D, reservant les lletres K, L, etc. per a designar, com és habitual, els cossos commutatius.

El terme *K-àlgebra* serà emprat per a designar les àlgebres A sobre un cos K, de dimensió finita, $[A : K] < \infty$, associatives i amb element unitat. Una K-àlgebra A serà dita *central* quan el seu centre $Z(A)$ coincideixi amb el cos K.

Recordem tanmateix que una K-àlgebra A és anomenada *simple* si no té ideals bilaterals no trivials. Una K-àlgebra A és *semisimple* si és isomorfa a una suma directa d'àlgebres simples.

Els primers exemples d'àlgebres simples són proporcionats per les àlgebres de matrius. Així, les K-àlgebres de matrius $M(n, K)$ són centrals i simples. Tota K-àlgebra de divisió D és una K-àlgebra simple i les àlgebres de matrius $M(n, D)$ són simples.

L'any 1870, B. Peirce presentà una memòria a la *National Academy of Sciences* de Washington titulada *Linear Associative Algebras* [15], que fou publicada amb caràcter pòstum l'any 1881. En aquest treball s'hi troben les nocions d'element nilpotent i d'element idempotent d'una àlgebra, així com també les descomposicions associades a un element idempotent central:

$$A = Ae \oplus A(1-e), \quad e^2 = e.$$

El conjunt $I = Ae$ constitueix un ideal per l'esquerra de A, que satisfà la identitat $Ie = I$; el conjunt $J = A(1-e)$ és un altre ideal per l'esquerra, per al qual $Je = 0$. A la mateixa memòria, Peirce investigà els possibles tipus d'àlgebres de dimensió ≤ 6. Posteriorment, el seu fill Ch. Peirce demostrà que tota $\mathbb{R}$-àlgebra de divisió D de dimensió ≤ 7 és isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ o bé a $\mathbb{H}$. L'any 1884, K. Weierstraß obtenia que tota $\mathbb{R}$-àlgebra commutativa de dimensió $n > 2$ té divisors de zero.

L'any 1878, G. F. Frobenius demostrà el rellevant resultat segons el qual tota $\mathbb{R}$-àlgebra de divisió i central D és isomorfa a $\mathbb{R}$ o bé a $\mathbb{H}$. Per tant, no és estrany que Hamilton hagués tingut tantes dificultats per construir un cos no commutatiu sobre $\mathbb{R}$, car el teorema de Frobenius posa de manifest que, d'aquests, només n'hi ha un.

Th. Molien, nascut a Riga, Letònia, entrà en contacte amb Klein quan aquest era encara professor a la Universitat de Leipzig (posteriorment, Molien esdevingué professor a la Universitat de Tomsk, a Sibèria). A la seva tesi, de l'any 1893, s'hi troba el concepte d'àlgebra simple (de fet, ell en diu primitiva: *ursprünglich*). Molien obté que tota $\mathbb{C}$-àlgebra simple és isomorfa a una àlgebra de matrius $M(n, \mathbb{C})$ [14]. Són remarcables les eines que s'utilitzen en aquest treball: formes bilineals, polaritzacions, formes traça i un equivalent a la representació regular. La tesi fou valorada com a antecedent dels treballs de W. Killing en àlgebres de Lie. Part dels resultats de Molien foren redescoberts per É. Cartan, l'any 1898 (cf. [21]).

Els teoremes d'estructura per a les K-àlgebres de dimensió finita arribarien, l'any 1908, de la mà de J. H. M. Wedderburn. En el treball [25], Wedderburn demostra que tota K-àlgebra de dimensió finita A s'escriu com $A \simeq \mathrm{Rad}(A) \oplus A_{ss}$, on A_{ss} és una K-àlgebra semisimple i $\mathrm{Rad}(A)$ denota el radical (de Jacobson) de A. Wedderburn obté que, per a tota K-àlgebra A, simple, existeix una K-àlgebra de divisió D tal que $A \simeq M(n, D)$. Per tant, aquest teorema fa palès que la recerca dels anells de divisió sobre un cos commutatiu és equivalent a la de les àlgebres simples sobre aquest cos. Dels resultats de Wedderburn se'n desprèn, així mateix, que tot cos finit és commutatiu. Posteriorment, Witt, a instàncies de Noether, donà una demostració directa de la commutativitat dels anells de divisió finits, independent dels resultats de Wedderburn, basada únicament en propietats dels polinomis ciclotòmics (cf. [1]) (tal com dèia Witt: "els fets senzills han de tenir demostracions senzilles").

Les recerques anteriors culminaren en l'anomenat teorema de Wedderburn-Artin, de l'any 1927, de classificació dels *anells* semisimples. Donats un anell semisimple per l'esquerra R i un sistema complet de R-mòduls per l'esquerra simples $\{V_i\}$, si es té que $R \simeq n_1V_1 \oplus \cdots \oplus n_rV_r$, aleshores,

$$R \simeq \prod_{i=1}^{r} M(n_i, D_i^o), \quad D_i \simeq \operatorname{End}_R(V_i),$$

on, en general, D^o denota l'anell de divisió oposat d'un anell de divisió D. Si R és simple, aleshores $r = 1$ i $R \simeq \operatorname{End}_D(V)$.

Prèviament a aquest resultat, però, hem de fer esment que es produïren els treballs de E. Dickson.

L'any 1908, Dickson obtingué que si D és una K-àlgebra de divisió central i si L és un subcòs commutatiu maximal, $K \subseteq L \subseteq D$, tal que $[L : K] = n$, aleshores $[D : K] = n^2$. En relació amb la construcció de possibles estructures no commutatives noves, Dickson compta amb dos treballs importants, del 1914 i del 1926, respectivament. En el treball [6] construeix les àlgebres cícliques, que generalitzen els quaternions. En el treball [7] introdueix els sistemes de factors.

Donada una extensió cíclica $L = K(z)$, de grau $[L : K] = n$ i de grup de Galois $G = \langle g \rangle$, i, donat un element $a \in K^*$, l'àlgebra cíclica $A = (L|K, g, a)$ es defineix segons

$$(L|K, g, a) := \langle L, u : \ u^n = a, \ zu = uz^g, \ z \in L \rangle_K.$$

Per a $z \in L$ i $g \in G$, hem denotat per z^g l'acció de g en z. De la definició es desprèn que l'àlgebra $(L|K, g, a)$ està generada pels elements de L i per un element auxiliar u, subjecte a determinades relacions. Se satisfà que $K \subseteq L \subseteq A$ i L esdevé un subcòs commutatiu maximal de A. A més, $(L|K, g, a)$ és un anell de divisió si, i només si, $a^i, 0 < i < n$, no és norma en $L|K$. Alhora, $(L|K, g, a)$ és isomorfa a l'àlgebra de matrius $M(n, K)$ si, i només si, $a \in N_{L|K}(L^*)$, és a dir, l'element a de partida és una norma de l'extensió cíclica. Notem que, en partir d'extensions quadràtiques d'un cos K, reobtenim com a casos particulars les àlgebres de quaternions sobre aquest cos: $\left(\frac{a,b}{K}\right)$, $i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji$, alhora que un criteri per a decidir si aquestes són o no anells de divisió.

Al seu torn, les àlgebres cícliques es generalitzaren en les àlgebres producte creuat. Donada una extensió de Galois $L|K$, de grup de Galois $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ i de grau $[L : K] = n$, es defineix l'àlgebra producte creuat $L \cdot G$ segons

$$L \cdot G := \langle \sum_{g \in G} z_g\, u_g : \; z\, u_g = u_g\, z^g; \; u_g\, u_h = u_{gh}\, a_{g,h}, \; a_{g,h} \in L^* \rangle,$$

on z, z_g denoten elements de L i u_g són indeterminades. En aquest cas, per a garantir l'associativitat del producte cal que se satisfacin les identitats

$$a_{g,hk}\, a_{h,k} = a_{gh,k}\, a_{g,h}^k, \text{ per a tot } g, h, k \in G.$$

Els elements corresponents, $\{a_{g,h}\}$, s'anomenen un sistema de factors definidor de l'àlgebra. La K-àlgebra que en resulta és simple i central, i de grau $[L \cdot G : K] = n^2$.

R. Brauer tingué la idea brillant de classificar i organitzar les K-àlgebres simples i centrals en forma de grup. Donades dues K-àlgebres simples i centrals, es defineix, d'acord amb Brauer,

$$A \sim B \Longleftrightarrow A \simeq M_n(D), \; B \simeq M_m(D).$$

Donada una K-àlgebra simple i central A, denotarem per $[A]$ la classe d'equivalència així definida i per $\mathrm{Br}(K)$ el conjunt de totes les classes. El producte tensorial dota aquest conjunt d'una estructura de grup abelià, atès que se satisfan les propietats:

$$[A] \otimes [B] := [A \otimes_K B] \text{ és un producte ben definit en } \mathrm{Br}(K),$$

$$[A] \otimes [B] = [B] \otimes [A],$$

$$[A] \otimes [K] = [A],$$

$$[A] \otimes [A^o] = [K].$$

En aquest context, donada una K-àlgebra simple i central A, una extensió finita L de K és un cos neutralitzador de A si $A \otimes_K L$ és isomorfa a una àlgebra de matrius sobre L. Se satisfà que tot subcòs commutatiu maximal $L \subseteq A$ és un subcòs neutralitzador de A. A més, tot cos neutralitzador L de A és subcòs maximal d'una K-àlgebra simple i central B tal que $[B] = [A]$.

La manca d'estructures no commutatives constatada inicialment es pot resumir en l'estructura dels grups de Brauer dels cossos considerants fins aleshores. Dels teoremes de Molien, Wedderburn i Frobenius se'n desprèn que

$$\mathrm{Br}(C) = (0) \text{ per a tot cos } C \text{ algebraicament tancat,}$$

$$\mathrm{Br}(\mathbb{F}) = (0) \text{ per a tot cos finit } \mathbb{F},$$

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ atès que } \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq M(4, \mathbb{R}).$$

La recerca de cossos susceptibles de tenir un grup de Brauer més gran es pot dir que s'inicià amb els treballs de Brauer, Hasse i Noether. Tal com veurem, d'aquests treballs en resultaren la determinació del grup de Brauer $\mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$ dels cossos $\mathfrak{p}$-àdics, i del grup de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ d'un cos de nombres K qualsevol. En ambdós casos els grups de Brauer són infinits. Els resultats corresponents, d'obtenció gens fàcil, es provaren al mateix temps que alguns teoremes de la teoria de cossos de classes.

3. La teoria de cossos de classes

La teoria de cossos de classes descriu les extensions abelianes dels cossos de nombres. Les seves fites principals són:

(i) Relacionar les extensions abelianes dels cossos de nombres amb els seus grups de classes d'ideals.
(ii) Obtenir teoremes de densitat per als ideals primers dels anells d'enters dels cossos de nombres.
(iii) Determinar les lleis de ramificació en les extensions abelianes.
(iv) Establir lleis generals de reciprocitat, vàlides per a qualsevol extensió abeliana de cossos de nombres.

El seu desenvolupament és degut a C. F. Gauss, L. Dirichlet, E. E. Kummer, L. Kronecker, H. Weber, D. Hilbert, Ph. Furtwängler, R. Fueter, T. Takagi, N. Chebotarev, E. Artin, H. Hasse, C. Chevalley, J. Tate i J-P. Serre, entre d'altres.

A partir de resultats deguts a Gauss i Dirichlet, es demostra que tota extensió quadràtica de $\mathbb{Q}$ és ciclotòmica; és a dir, està continguda en un cos $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ d'arrels m-èsimes de la unitat.

Kronecker i Weber generalitzaren el resultat anterior en adonar-se que tota extensió abeliana de $\mathbb{Q}$ és ciclotòmica. Aquest resultat, conegut amb el nom de teorema de Kronecker-Weber, fou enunciat per Kronecker l'any 1853, donant-ne una demostració incompleta. L'any 1886, Weber en proporcionà una altra demostració, tampoc no exempta de crítiques. La primera demostració acceptada del teorema de Kronecker-Weber és de l'any 1896, deguda a Hilbert. Hilbert demostrà el teorema per mitjà de la seva teoria de la ramificació superior.

L'any 1829 es publicaren els treballs de N. Abel relatius a la construcció d'extensions abelianes de $\mathbb{Q}(i)$.

Donat un cos K de nombres, denotarem per $\mathcal{O}_K$ el seu anell d'enters; per $I(K)$, el grup dels seus ideals fraccionaris; per $P(K)$, el subgrup format pels ideals fraccionaris principals; i per $\mathrm{Cl}(K) := I(K)/P(K)$, el grup de classes d'ideals.

L'any 1880, Kronecker posà de manifest que, a diferència del cos dels racionals, els cossos quadràtics imaginaris admeten extensions no ramificades no trivials. Aquestes s'obtenen per adjunció de valors especials de la funció modular el·líptica j. Kronecker observà que, donat un cos K quadràtic imaginari, el grup de Galois de $K(j(\tau))|K$ és isomorf al grup de classes d'ideals $\mathrm{Cl}(K)$ quan s'avalua la funció j en un zero τ d'una forma quadràtica binària de discriminant D igual al discriminant del cos K. L'extensió $K(j(\tau))|K$ és no ramificada i cada ideal de K esdevé principal en $K(j(\tau))$. Els valors $j(\tau)$ són els anomenats clàssicament mòduls singulars.

Weber considerà grups de classes d'ideals més generals que $\mathrm{Cl}(K)$, a fi de tenir en compte la possible ramificació de les extensions. Segons Weber, un mòdul $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_f \mathfrak{m}_\infty$ d'un cos de nombres K és un producte d'un ideal enter no nul $\mathfrak{m}_f$ de $\mathcal{O}_K$ per un producte formal $\mathfrak{m}_\infty$ d'un nombre de places reals de K afectades de l'exponent 1. Weber defineix quocients de la forma $I_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$, on $I_\mathfrak{m}$ és el grup dels ideals fraccionaris de K que són coprimers amb $\mathfrak{m}_f$ i $H_\mathfrak{m}$ és el subgrup dels ideals principals generats pels elements $a \in K$ tals que $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Weber demostrà que, donat un mòdul $\mathfrak{m}$, si per a una extensió de Galois $L|K$ se satisfà que $\mathrm{Spl}(L|K) \subseteq H_\mathfrak{m}$, aleshores

$$[I_\mathfrak{m} : H_\mathfrak{m}] \leq [L : K].$$

Si $\mathrm{Spl}(L|K) = H_\mathfrak{m}$, aleshores

$$[I_\mathfrak{m} : H_\mathfrak{m}] = [L : K]$$

i cada classe lateral de $I_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ conté infinits ideals primers. Aquí hem denotat per $\mathrm{Spl}(L|K)$ el conjunt dels ideals de K que descomponen completament en L. Weber estava convençut que, per a cada grup de classes d'ideals $I_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$, existia una extensió abeliana L/K, no ramificada fora de $\mathfrak{m}$, per a la qual $I_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m} \simeq \mathrm{Gal}(L|K)$.

Els resultats de Weber conduïren Hilbert a conjecturar, l'any 1898, que, per a cada cos de nombres K, hauria d'existir una extensió finita $K'|K$, única, tal que

(1) $K'|K$ és de Galois i $\mathrm{Gal}(K'|K) \simeq \mathrm{Cl}(K)$.

(2) $K'|K$ és no ramificada.

(3) Per a cada ideal primer $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, el seu grau residual $f_\mathfrak{p}$ coincideix amb l'ordre de $\mathfrak{p}$ en $\mathrm{Cl}(K)$.

(4) Tot ideal de $\mathcal{O}_K$ esdevé principal en $\mathcal{O}_{K'}$.

El cos K', l'existència del qual es conjecturava, fou denominat el cos de classes de Hilbert de K. En la demostració de la seva existència hi treballaren Fueter i Takagi.

Takagi havia visitat Göttingen durant els anys 1898 al 1901. Associat a un mòdul $\mathfrak{m}$ d'un cos K de nombres i a una extensió finita $L|K$, Takagi defineix un grup d'ideals

$$H_\mathfrak{m}(L|K) := P_\mathfrak{m} N_\mathfrak{m}(L|K).$$

Segons Takagi, $P_{\mathfrak{m}}$ és el grup dels ideals fraccionaris principals (α/β), on α, β són enters no nuls de K tals que

(i) α i β són coprimers amb $\mathfrak{m}$.
(ii) $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}_f}$.
(iii) $v(\alpha/\beta) > 0$ per a totes les immersions reals $v|\mathfrak{m}_\infty$.

El grup nòrmic es defineix segons

$$N_{\mathfrak{m}}(L|K) = \{N_{L|K}(\mathfrak{a}) : \mathfrak{a} \text{ coprimer amb } \mathfrak{m}_f\}.$$

D'acord amb Takagi, una extensió abeliana de cossos de nombres $L|K$ és un cos de classes mòdul $\mathfrak{m}$ quan

$$[I_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}(L|K)] = [L : K].$$

En aquest cas, el mòdul $\mathfrak{m}$ es diu que és admissible per a l'extensió $L|K$. Donada una extensió abeliana $L|K$, el mòdul admissible més petit (segons la relació de divisibilitat), $\mathfrak{f}_{L|K}$, s'anomena el conductor de l'extensió.

El 1920, Takagi demostrà els resultats següents, per a tot cos K de nombres:

(1) (Existència). Per a cada grup d'ideals H tal que $P_{\mathfrak{m}} \subseteq H \subseteq I(K)$, existeix un cos de classes L sobre K tal que Gal(L|K) $\simeq I_{\mathfrak{m}}/H$.

(2) (Completitud) Tota extensió abeliana de K és un cos de classes.

(3) (Conductor) Les places de K que divideixen el conductor $\mathfrak{f}_{L|K}$ d'una extensió abeliana son les ramificades en $L|K$.

(4) (Llei de descomposició) Si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, el grau residual $f_{\mathfrak{p}}(L|K)$ coincideix amb l'ordre de $\mathfrak{p}$ en $I_{\mathfrak{m}}/H$.

Takagi obtingué els resultats anteriors amb posterioritat al seu pas per Göttingen, treballant aïlladament en el seu país, en el decurs dels anys de la Primera Guerra Mundial.

Els resultats esmentats conformaren de mica en mica l'edifici de la teoria de cossos de classes. Un punt culminant d'aquesta teoria fou l'obtenció per part d'E. Artin, l'any 1927, de la llei de reciprocitat.

La llei de reciprocitat d'Artin explicita l'isomorfisme $\mathrm{Gal}(L|K) \simeq I_{\mathfrak{m}}/H$ obtingut per Takagi en el seu teorema d'existència. Concretament, donats una extensió abeliana $L|K$ de cossos de nombres i un mòdul $\mathfrak{m}$ de K, divisible per les places de K que ramifiquen en L, se satisfà que

$$\varphi : I_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{Gal}(L|K), \quad \text{on } \varphi(\mathfrak{p}) := \mathrm{Frob}(\mathfrak{p}, L|K).$$

L'anomenat element de Frobenius, $\mathrm{Frob}(\mathfrak{p}, L|K)$, només està definit en les places de K que no ramifiquen en L i és un generador específic del grup de descomposició $D_{\mathfrak{P}}(L|K)$, per a $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. (Precisament en les places no ramificades tots els grups de descomposició són cíclics.)

Les aportacions de Noether i de Hasse a la teoria de cossos de classes se centraren en l'obtenció de diversos principis locals-globals. Hasse demostrà la coneguda com a *Führerdiskriminantenproduktformel*:

$$\mathcal{D}(L|K) = \prod_{\chi} f_{\chi,\mathrm{fin}},$$

segons la qual el discriminant d'una extensió relativa de cossos de nombres s'expressa com a producte dels conductors finits associats als caràcters del grup de Galois de l'extensió.

Hasse edificà la teoria local de cossos de classes, però molts resultats de la teoria local es demostraren primerament a partir de resultats de la teoria global, provats amb anterioritat. Fou sota la influència de Noether que s'obtingueren les demostracions locals, primerament, i, a partir d'aquestes, els teoremes de la teoria global. En parlarem tot seguit perquè aquest procés es desenvolupà en paral·lel al del càlcul dels grups de Brauer dels cossos $\mathfrak{p}$-àdics i dels cossos de nombres. L'any 1931, Noether escrivia a Hasse:

> *Ich mache jetzt ein zahlentheoretisches Seminar: Klassenkörpertheorie im Kleinen, Artinsche Führer, Hauptidealsatz (Frl. Taussky ist ja hier), u. s. w.; es sollen die vorliegenden Beweise vorgetragen werden, aber mein persönliches Ziel ist die Sachen dabei hyperkomplex zu verstehen.*
> Estic fent un seminari de teoria de nombres: teoria local de cossos de classes, conductor d'Artin, teorema de l'ideal principal (la senyoreta Taussky ja és aquí), etc.; s'exposaran les demostracions que segueixen, però el meu objectiu personal és entendre aquestes qüestions en un sentit hipercomplex.
>
> 08.11.1931, E. Noether a H. Hasse

L'any 1954, Chevalley deduí la teoria global de cossos de classes a partir de la teoria local, d'una manera unificada. Per a tal fi introduí el grup d'ideles d'un cos de nombres. Aquest grup és, alhora, el grup multiplicatiu de l'anell de les adeles del cos de nombres. El tractament adèlic de la teoria de cossos de classes permet formular-ne els resultats també per a les extensions abelianes no finites dels cossos de nombres.

Les tècniques anteriors foren unificades els anys 1950–1960 amb el tractament cohomològic, tant de la teoria local com de la teoria global. Els resultats foren presentats sota la noció de formació de classes, essent les seves primeres presentacions les dels textos d'Artin-Tate [2] i de Serre [18].

4. Cursos de Noether a Göttingen

En comparar els cursos impartits per Noether a Göttingen amb les dates i els continguts de les seves publicacions es posa de manifest l'estret lligam que ella sabia establir entre docència i recerca. Així, veiem que l'hivern del 1924–1925 imparteix un curs sobre teoria de grups i nombres hipercomplexos; l'hivern del 1927–1928, un altre sobre sistemes hipercomplexos i teoria de la representació i, tot seguit, l'any 1929 publica el treball

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

Al mateix temps, l'estiu del 1928 imparteix un curs sobre àlgebra no commutativa, com a avançament de la publicació

- E. Noether. Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.

L'estiu del 1929 imparteix un curs sobre aritmètica no commutativa, en el qual hi desenvolupa la seva teoria de productes creuats (*verschränkte Produkte*). En aquest cas, els seus resultats no foren publicats per ella sinò que foren exposats (citant-ne la procedència) per Hasse a

- H. Hasse: Theory of cyclic algebras over an algebraic number field. *Trans. AMS* 34 (1932), 180–200.

i per Deuring, en el text pioner,

- M. Deuring: *Algebren.* Ergebnisse der Mathematik IV. Springer, 1935.

A l'hivern del 1929–1930, Noether impartí un curs sobre l'àlgebra dels sistemes hipercomplexos, que donà lloc a l'important text

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

5. Treballs de Noether en àlgebra no commutativa

En aquest apartat comentarem alguns dels treballs de Noether en àlgebra no commutativa.

- R. Brauer; E. Noether: Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. *Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1927), 221–228. (Vorgelegt von I. Schur.)

El treball de Brauer i Noether fa referència als graus dels cossos neutralitzadors minimals d'una àlgebra simple. Hi demostren que tots els cossos K_n cíclics sobre $\mathbb{Q}$, de grau 2^n i en els quals -1 és una suma de dos quadrats són cossos neutralitzadors minimals sobre $\mathbb{Q}$ del cos dels quaternions

$$\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right).$$

Demostren que si $2^n||(p-1)$, p primer, i el cos $K_n \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ és tal que $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^n$, aleshores K_n és un cos neutralitzador minimal del cos dels quaternions, cíclic de grau 2^n. Per tant, d'aquests n'hi ha infinits i el seu grau tendeix a infinit.

- E. Noether: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie. *Math. Z.* 30 (1929), 641–692.

Aquesta publicació conté l'aportació més significativa de Noether a l'estudi de les àlgebres i de les seves representacions. En ella, Noether retroba el teorema de Skolem (de l'any 1927) segons el qual tots els automorfismes de les àlgebres simples són interns. Per primera vegada, en aquest treball Noether dóna compte de fenòmens lligats a la inseparabilitat d'extensions del cos base. S'hi demostra la semisimplicitat de l'anell de grup $K[G]$, quan $\mathrm{car}(K) \nmid \#G$ (teorema de Maschke (1899)) i que el nombre de representacions absolutament irreductibles d'un grup finit G és igual al nombre de classes de conjugació de G.

A la història de les matemàtiques del Bourbaki [3], aquest treball és valorat en els termes següents:

> Krull (1926) havia fet el lligam entre el concepte de grup abelià amb operadors i representacions lineals de grups; punt de vista generalitzat a àlgebres i desenvolupat en detall per E. Noether en un treball fonamental de l'any 1929 que, per la importància de les idees introduïdes i per la claredat de l'exposició mereix figurar, al costat de la memòria de Steinitz sobre els cossos commutatius, com un dels pilars de l'àlgebra lineal moderna.
>
> N. Bourbaki: *Éléments d'histoire des mathématiques*

A fi de fer-nos càrrec de manera més precisa d'aquesta aportació de Noether, en detallem el contingut:

I Kapitel. Gruppentheoretischer Grundlagen

1. Gruppen mit Operatoren. 2. Die Isomorphiesätze. 3. Kompositionensreihen. 4. Direkte Produkte und Durchschnitte. 5. Vollständig reduzible Gruppen. 6. Moduln in bezug auf einen Körper. Hyperkomplexe Systeme. 7. Matrizes.

II Kapitel. Nichtkommutative Idealtheorie

8. Homomorphiesatz für Ringe. 9. Idempotente Elemente. Direkte Summenzerlegung in Rechtsideale. 10. Zerlegung in zweiseitige Ideale. 11. Das Zentrum. 12. Nilpotente Ideale. 13. Vollständige reduzible Ringe. 14. Zweiseitig einfache vollständig reduzible Ringe mit Einheitselement.

III Kapitel. Modul- und Darstellungstheorie

15. Darstellungen und Darstellungsmoduln. 16. Reduzible Darstellungen. 17. Direkte Summenzerlegung von Darstellungsmoduln bei Ringen mit Einheitselement. 18. Modul- und Darstellungstheorie volständig reduzibler Ringe. 19. Die einfachen Kompositionsfaktoren bei Moduln und Darstellungsmoduln.

IV Kapitel. Darstellungen von Gruppen und hyperkomplexen Systemen

20. Einordnung der hyperkomplexen Systeme. 21. Erweiterung des Grundkörpers. Die Darstellungen des Zentrums 22. Anwendung auf Abelsche Gruppen. 23. Determinante eines hyperkomplexen Systems. 24. Spuren und Charaktere. 25. Diskriminanten. 26. Einordnung des Gruppenrings.

Hasse havia provat que tota àlgebra de divisió central sobre un cos de nombres $\mathfrak{p}$-àdics és cíclica i Artin havia fet notar que aquest era un resultat que podia molt bé ser vàlid en el cas dels cossos de nombres. Noether i Hasse decidiren estudiar aquest problema a fi de, en cas de resoldre'l, enviar-lo al número especial del *Journal de Crelle* que es preparava amb motiu del 70è aniversari de Hensel. P. Roquette ha recopilat en un llibre [17] les dificultats que ambdós matemàtics tingueren en provar aquest resultat. Veient que se'ls hi acabava el termini per a presentar el treball, demanaren ajut a Brauer, qui atinà amb la ideal final de la prova. D'aquesta manera es gestà la publicació

- R. Brauer; H. Hasse; E. Noether: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. für reine u. angew. Math.* 167 (1932), 399–404.

Els seus autors inicien el treball amb les paraules següents:

> Finalment, els nostres afanys conjunts han aconseguit demostrar que se satisfà el teorema següent, el qual és important per a la teoria relativa a l'estructura de les àlgebres sobre els cossos de nombres algebraics, així com també per a qüestions de fonament.

Teorema principal. *Tota àlgebra de divisió normal sobre un cos de nombres algebraics és cíclica (o, com també es diu, de tipus Dickson).*

Observem que, a l'època, s'anomenaven normals les àlgebres que avui es designen amb el nom de centrals. La demostració original del teorema de Brauer-Hasse-Noether compta amb tres reduccions:

La reducció primera és deguda a Hasse. Consisteix a veure que, per a demostrar que tota àlgebra de divisió central sobre un cos de nombres és cíclica, basta provar el

Teorema 1: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, descompon sobre Ω:*

$$[A \otimes_\Omega \Omega_\mathfrak{p}] = [\Omega_\mathfrak{p}] \in \mathrm{Br}(\Omega_p), \text{ per a tot } \mathfrak{p} \Rightarrow [A] = [\Omega] \in \mathrm{Br}(\Omega).$$

La reducció segona és deguda a Brauer. Consisteix a veure que, per a demostrar el teorema 1, basta provar el

Teorema 2: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, i amb un cos neutralitzador resoluble sobre Ω, descompon sobre Ω.*

La reducció tercera és deguda a Noether i, també a Brauer, independentment. Consisteix a veure que, per a demostrar el teorema 2 basta provar el

Teorema 3: *Tota àlgebra A central simple sobre un cos de nombres Ω que descompongui localment per tot, i amb un cos neutralitzador de grau primer sobre Ω, descompon sobre Ω.*

D'aquest teorema Noether en proporciona dues demostracions diferents. Una es basa en resultats de Hasse i l'altra, en resultats de Hilbert i de Furtwängler.

El treball fou redactat per Hasse i en ell hi trobem el paràgraf següent:

> *Im Zusammenhang mit dem Normensatz bemerken wir weiter, daß der Satz I als dessen richtige Verallgemeinerung auf höhere (auch nichtabelsche) Fälle anzusehen ist, während ja die wörtliche Verallgemeinerung, wie H. Hasse zeigte, nicht allgemein richtig ist.*
> En connexió amb el teorema de la norma, remarquem a més que el teorema I s'ha d'interpretar com la formulació d'aquell teorema que és correcta en casos més generals (fins i tot no abelians), ja que, com va mostrar Hasse, la seva generalització literal en general no és correcta.

Aquest paràgraf recull una idea original de Noether (cf. *bemerken wir*). En el cas de les extensions cícliques es coneixia la validesa del principi local-global per a les normes, però aquest principi deixava de satisfer-se per a les normes d'extensions més generals, tal con Hasse havia posat de manifest amb exemples de normes locals en totes les places d'un cos de nombres per a una extensió donada, que no eren normes globals per a la dita extensió. En canvi, Noether insistí en el fet que la generalització del principi local-global nòrmic calia formular-la amb àlgebres, tal i com resultà ser cert, segons el teorema 1 anterior.

En el mateix treball s'hi troben moltes altres consideracions i resultats. Entre aquests, la resposta a un pregunta de Schur formulada l'any 1906:

Teorema. *Totes les representacions absolutament irreductibles d'un grup finit G d'ordre n són realitzables en el cos de les arrels n^h-èsimes de la unitat, sempre que h sigui prou gran.*

El teorema fou reproduït per Deuring en el seu llibre *Algebren* [4].

• E. Noether: Hyperkomplexe Systeme in ihren Bezeichnungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie. *Verhandl. Intern. Math.-Kongreß Zürich* 1(1932), 189–194.

El treball resumeix la seva intervenció en el Congrés Internacional de Zürich, com a conferenciant plenària. En aquest treball hi trobem el que Noether anomena "Principi de l'aplicació de la no commutativitat en la commutativitat":

> Per mitjà de la teoria d'àlgebres, s'intenten aconseguir expressions senzilles i invariants de fets coneguts sobre formes quadràtiques o sobre cossos cíclics; és a dir, fets tals que només depenen de propietats purament estructurals d'àlgebres. Un cop s'han demostrat aquestes expressions invariants, aleshores cau pel seu propi pes una transferència d'aquests fets a cossos galoisians qualssevol.

En aquesta exposició, Noether presenta un resum de les seves aportacions principals i d'aportacions de R. Brauer, H. Hasse, C. Chevalley i A. Speiser en el context de la teoria d'àlgebres.

És remarcable que Noether fou la primera matemàtica convidada a impartir una conferència plenària en un dels *International Congress of Mathematicians*. De ben segur hi deuria ajudar el fet que van der

Waerden, aleshores professor a Zürich, en fos un dels organitzadors. Fins a avui, no es pot dir que la presència femenina en aquests tipus d'actes hagi estat gaire lluïda, atesa la llista següent de conferenciants plenàries en congressos internacionals:

Conferenciants plenàries en els ICM-s:

1932 ICM Zürich: Emmy Noether,

1990 ICM Kyoto: Karen Uhlenbeck,

1994 ICM Zürich: Ingrid Daubechies; Marina Ratner.

Potser per a compensar una mica aquest desequilibri, alguns congressos internacionals han comptat amb les *Noether Lectures*, la impartició de les quals es reserva a matemàtiques. En aquest apartat, hem pogut localitzar les següents:

1994 AWM-E. Noether Lecture, ICM Zürich: Olga Ladyzhenskaya,

1998 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Berlin: Cathleen S. Morawetz,

2002 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Beijing: Hesheng Hu,

2006 AWM-E. Noether Lecture, ICM, Madrid: Ivonne Choquet-Bruhat.

- E. Noether: Nichtkommutative Algebren. *Math. Z.* 37 (1933), 514–541.

Aquest és un altre dels treballs cabdals de Noether en àlgebra no commutativa. Hi considera per primera vegada representacions lineals (per l'esquerra i per la dreta) d'àlgebres simples A en anells de matrius sobre cossos no commutatius D, D^0. Hi demostra teoremes d'estructura d'àlgebres simples i semisimples. Hi desenvolupa una teoria de Galois per a àlgebres simples i simplifica una demostració de Köthe segons la qual tota àlgebra simple admet un cos de descomposició minimal que és separable. A més, tots els resultats es discuteixen en qualsevol característica.

- E. Noether: Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper. *Math. Ann.* 108 (1933), 411–419.

Els resultats obtinguts en aquest treball foren reproduïts en el text de Deuring *Algebren* [4]. Es tracta de teoremes de Noether sobre sistemes de factors. Donada una extensió de Galois $L|K$ de cossos de nombres, Noether defineix el producte creuat del grup de classes d'ideals de L pel grup de Galois $G = \mathrm{Gal}(L|K)$

$$\mathrm{Cl}(L) \cdot G.$$

Expressa els productes creuats anteriors en termes de sistemes de factors, els classifica, i analitza els que proporcionen la classe trivial. Amb l'ús de sistemes de factors obté una demostració alternativa del principi local-global de Hasse per al grup de Brauer d'un cos de nombres.

Els resultats de Noether, Hasse i Brauer relatius al grup de Brauer d'un cos local i d'un cos global solen expressar-se avui de la manera següent (per comoditat ens limitarem únicament al cas dels cossos de nombres i dels seus completats).

Siguin K cos de nombres i $\mathcal{O}_K$ el seu anell d'enters. Donat un ideal primer $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, existeix un isomorfisme

$$\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $\mathfrak{p}$ és un primer real de K, existeix un isomorfisme

$$\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sim} \{0, \frac{1}{2}\} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $[A] \in \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}})$, l'element $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}[A]$ n'és l'invariant de Hasse.

El grup de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ es caracteritza per l'existència d'una successió exacta

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \oplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Br}(K_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

on $\mathrm{inv} := \sum \mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}$.

Des dels anys 1930, l'avenç més important que s'ha produït en l'estudi del grup de Brauer d'un cos és el teorema de Merkuryev-Suslin, de l'any 1982. El teorema descriu la n-torsió, $\mathrm{Br}(F)[n]$, del grup de Brauer d'un cos F qualsevol, quan aquest conté les arrels n-èsimes de la unitat, en termes del segon grup de la teoria K d'aquest cos.

Teorema. (Merkuryev-Suslin, 1982) *Sigui F un cos arbitrari que contingui una arrel primitiva n-èsima de la unitat ζ. Existeix un isomorfisme, dit de residus nòrmics,*

$$\begin{array}{rccc} R_{F,n}: & K_2(F)/nK_2(F) & \to & H^2(F, \mu_n^2) \simeq \mathrm{Br}(F)[n] \\ & \{a, b\} & \mapsto & [A_\zeta(a, b)] \end{array}$$

on $A_\zeta(a,b)$ *és la* F*-àlgebra (central, simple i cíclica) definida per*

$$A_\zeta(a,b) = \langle i, j : i^n = a, j^n = b, ij = \zeta ji \rangle.$$

El teorema anterior té moltes conseqüències. Per a més informació sobre aquestes i la seva demostració es pot consultar el llibre *Brauergruppen von Körpern* [9], d'Ina Kersten. (Kersten es doctorà amb E. Witt; és, per tant, una néta científica d'Emmy Noether. Des de 2003, Kersten és la Degana de la Facultat de Matemàtiques i Ciències de la Computació de la Universitat de Göttingen.)

Durant els anys 1950, Artin i alguns membres de la seva escola començaren la traducció de la teoria de cossos de classes en termes de cohomologia galoisiana. Recordem que Artin havia emigrat també a Amèrica i que dos dels seus deixebles foren S. Lang i J. Tate. Per parlar d'aquestes versions, començarem per esmentar uns resultats generals de cohomologia de grups. (Per $\widehat{H}^i$ denotem els grups de cohomologia modificats o de Tate, cf. [18]).

Teorema (Tate, 1952) *Siguin* G *un grup finit i* C *un* G*-mòdul. Suposem que per a tots els subgrups* H *de* G *se satisfan les condicions següents:*

(i) $H^1(H, C) = 0$.
(ii) $H^2(H, C)$ *és un grup cíclic d'ordre* $\#H$.

Aleshores, per a tot $r \in \mathbb{Z}$*, existeix un isomorfisme*

$$\widehat{H}^r(G, \mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{r+2}(G, C),$$

obtingut per cup producte amb la classe fonamental.

En una carta datada el 2 de juny de 1931, Noether comentava a Hasse l'arribada imminent de Herbrand, un jove doctor que en aquells moments estava treballant amb Artin. Prèviament, Herbrand havia presentat una tesi en lògica matemàtica.

> *Mitte Juni will auch Herbrand kommen, der jetz bei Artin ist.*
> A mig juny també vindrà Herbrand, que ara és amb Artin.
>
> 02.06.1931, E. Noether a H. Hasse

Després de la seva estada a Göttingen, de retorn a França, Herbrand feu una excursió als Alps, en el decurs de la qual hi trobà la mort en un accident de muntanya, quan comptava 23 anys. El 24 d'agost de 1931, Noether comentava a Hasse:

> *Mir geht der Tod von Herbrand nicht aus dem Sinn.*
>
> No em puc treure del cap la mort de Herbrand.
>
> 24.08.1931, E. Noether a H. Hasse

En teoria de nombres, Herbrand és conegut pel teorema de Herbrand-Ribet, relatiu a l'estructura galoisiana del grup de classes d'ideals del cos ciclotòmic $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, per a p un nombre primer. I, també, per l'anomenat quocient de Herbrand en cohomologia de grups:

Proposició. (Herbrand) *Siguin G un grup cíclic finit i M un G-mòdul amb cohomologia finita. Sigui*

$$h(M) := \frac{\#\widehat{H}^0(G,M)}{\#\widehat{H}^1(G,M)}.$$

Aleshores,

(i) *$h(M)$ és multiplicatiu respecte de successions exactes.*
(ii) *$h(M) = 1$ per a tot G-mòdul M finit.*

Quan els resultats de cohomologia de grups s'apliquen a grups de Galois, s'obtenen teoremes relatius a cohomologia galoisiana. El teorema següent proporciona una interpretació del teorema de la base normal en termes de grups de cohomologia de Tate, atès que aquest teorema ens diu que el grup additiu $(L,+)$ d'una extensió de Galois $L|K$, de grup de Galois G, és un G-mòdul induït:

Teorema. (Speiser, 1916) *Per a tota extensió de Galois $L|K$ se satisfà que*

$$\widehat{H}^n(\mathrm{Gal}(L|K), L) = 0, \quad \textit{per a tot } n \in \mathbb{Z}.$$

D'altra banda, donada una extensió de Galois $L|K$, el grup de Brauer relatiu

$$\mathrm{Br}(L|K) := \ker(\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)), \quad [A] \mapsto [A \otimes_K L],$$

admet la interpretació cohomològica següent:

$$\mathrm{Br}(L|K) \simeq H^2(\mathrm{Gal}(L|K), L^*).$$

A més, si $L|K$ és cíclica

$$\mathrm{Br}(L|K) \simeq K^*/N_{L|K}(L^*),$$

la qual cosa permet recuperar, en el cas cíclic, el principi nòrmic local-global.

Donat un cos de nombres L denotem per $\mathbb{A}_L$ el seu anell d'adeles, per $\mathbb{I}_L := \mathbb{A}_L^*$ el grup d'ideles corresponent i per $\mathbb{C}_L := \mathbb{I}_L/L^*$ el grup de classes d'ideles. Aleshores, el teorema 90 de Hilbert i la generalització d'aquest deguda a Noether es reinterpreten com

Teorema. (Noether) *Per a tota extensió de Galois $L|K$ se satisfà que*

(i) $H^1(\mathrm{Gal}(L|K), L^*) = 0$.
(ii) $H^1(G, \mathbb{C}_L) = 0$*, si L i K són cossos de nombres.*

Finalment, el teorema de Tate abans esmentat i la determinació de la cohomologia de les classes d'ideles dels cossos de nombres, permeten deduir la llei de reciprocitat d'Artin:

Teorema. (Artin-Tate, 1961) *Siguin $L|K$ una extensió de Galois de cossos de nombres; $G = \mathrm{Gal}(L|K)$. Aleshores,*

(i) $H^1(G, \mathbb{C}_L) = 0$.
(ii) $H^2(G, \mathbb{C}_L)$ *és un grup cíclic d'ordre $\#G$.*
(iii) *Si L/K és abeliana, existeix un isomorfisme*

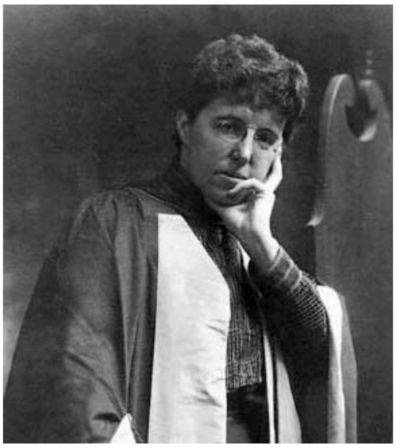
$$\phi : \mathbb{C}_K/N_{L|K}(\mathbb{C}_L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L|K)$$

els components locals del qual són donats pels símbols d'Artin.

6. L'estada a Bryn Mawr

Charlotte A. Scott havia estat la primera doctora anglesa en matemàtiques. Es traslladà als EUA on fundà els estudis de matemàtiques en el Bryn Mawr College de Pennsylvania, dedicat a l'educació de les noies. Scott, que era geòmetra, compta amb una extensa producció matemàtica.

Emmy Noether aconseguí una plaça a Bryn Mawr l'any 1933, dos anys després que Scott hagués mort. En aquells moments, a Bryn Mawr s'hi trobava Olga Taussky. El mateix any, Weyl també havia emigrat als EUA, era professor a Princeton i tenia a Brauer com a ajudant. Com que Princeton està relativament a prop de Bryn Mawr i comunicat per tren, convidà Emmy Noether a impartir cursos d'àlgebra a l'Institut, la qual cosa ella feia setmanalment.



Charlotte A. Scott (1858–1931)

Laboratori de Bryn Mawr

Per les seves cartes a Hasse, coneixem que, a Bryn Mawr, Noether dóna classe a tres noies. Els explica el primer volum del text d'àlgebra de van der Waerden [22], els primers capítols del text de teoria algebraica de nombres de Hecke [8], i es mostra molt satisfeta per l'interès de les seves alumnes per resoldre problemes. També dirigeix la tesi a una estudiant: Ruth Stauffer.

El 7 d'abril de l'any 1935, Noether escrivia a Hasse

> Lieber Herr Hasse,
>
> Vielen Dank für Ihre Separatensendung –ich bewundere immer wieder wieviel Sie schaffen– und für die Abschrift des Briefes an Albert [...]
>
> Brauer läßt darauf aufmerksam machen, daß der Zusammenhang zwischen quadratischen Formen und Algebren (S.18) inkl. des Beweises der Produktarstellung $H = \prod_{i \le k}(a_i, a_k)$ (Artin) den Physikern

wohlbekannt ist: Dirac has das benutz und in einer Note von Weyl und ihm (als Assitenten) [...] wird es in der Theorie der Spinoren benutz. Im Spezialfall der Summe von Quadraten soll es schon in dem Artikel von Cartan über hyperkomplexe Systeme in der fraonzösischen Enzyklopädie stehen.

Daß das Zerfallen der Faktorensysteme im multipl[ikativen] Fall als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Erweiterung bekannt ist, weiß Witt wohl? Das ist ja das Resultat von Brauer, das Sie Jahresber[icht] 44 erwähnen. [...]

Waren Sie in Helsinki und was machen Sie im Sommer? Ich weiß nicht ob ich dieses Jahr wieder komme; wenn ja wird es Ende Juni. Ich muß beim Schlußfeier besagte Doktorandin [Ruth Stauffer] feierlich zum Doktorhut (Hood eine Art Kapuze) vorschlagen; aufgesetzt bekommt sie den vor der Präsidentin.

Herzliche Grüße, Ihre Emmy Noether

07.04.1935, Noether a Hasse

Benvolgut Sr. Hasse,

Moltes gràcies per enviar-me els seus extrets –com sempre m'admira el molt que treballa– i per la còpia de la carta a Albert [...]

Sobre aquest punt, Brauer es permet remarcar que la relació entre formes quadràtiques i àlgebres (p. 18) inclosa en la demostració de la descomposició en producte $H = \prod_{i \leq k}(a_i, a_k)$ (Artin) és ben coneguda pels físics: Dirac l'ha utilitzada i serà emprada en la teoria d'espinors en una nota de Weyl i seva (com a ajudant). En el cas especial de les sumes de quadrats, ja es deu trobar en l'article de Cartan sobre sistemes hipercomplexos de l'Enciclopèdia francesa.

Ho sap Witt que és conegut que, en el cas multiplicatiu, la descomposició dels sistemes de factors és condició necessària i suficient per a l'existència d'extensions? Aquest és el resultat de Brauer que vostè esmenta en el seu informe anual 44 [...]

[segueixen uns resultats sobre bases normals explícites de la seva alumna de doctorat]

Va anar a Helsinki i què farà a l'estiu? Jo no sé si aquest any tornaré; en tot cas, a finals de juny. Penso que hauré d'estar present en la festa de graduació de l'esmentada doctoranda [Ruth Stauffer] en què la Presidenta li imposa una mena de caputxa.

Cordialment, Emmy Noether

07.04.1935, Noether a Hasse

Al cap d'uns dies, Hasse s'assabentava que Noether havia mort, concretament el 14 d'abril de l'any 1935, arran d'una intervenció quirúrgica a l'hospital de Bryn Mawr.

Witt, Weyl, Artin, Noether, Tsen, *et.al.*, l'estiu de l'any 1932

A la Universitat de Göttingen i des del curs 2001/2002 funciona una càtedra de matemàtiques per a professores visitants, que porta el nom d'Emmy Noether:

> *In honour of the great mathematician Emmy Noether the Faculty of Mathematics of the University of Göttingen has created a visiting professorship named after the scientist, who studied, taught and researched in Göttingen from 1915 until 1933. Once a year the Faculty awards the Emmy Noether professorship to an outstandig female mathematician who will visit Göttingen for 3 to 4 weeks to present a current field of research in talks and seminars.*

Referències

[1] Artin, E.: *Geometric Algebra.* Interscience Publishers, Inc., 1957.
[2] Artin, E.; Tate, J.: *Class field theory.* Benjamin, 1961.
[3] Bourbaki, N: *Éléments d'histoire des mathématiques.* Paris, Hermann, 1969.

[4] Deuring, M.: *Algebren.* Zweite, korrigierte Auflage. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 41. Springer-Verlag, Berlin-New York 1968, viii+143 pp. (Primera edició: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 4. Springer, 1935.)

[5] Dick, A.: *Emmy Noether: 1882–1935.* Elem. Math. Beiheft No. 13 (1970) Birkhäuser Verlag, Basel 1970, 72 pp.

[6] Dickson, E.: Linear Algebras and Abelian Extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 15 (1914), 31–46.

[7] Dickson, E.: New division algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 28 (1926), 207–234.

[8] Hecke, H.: *Lectures on the theory of algebraic numbers.* Translated from the German by George U. Brauer, Jay R. Goldman and R. Kotzen. Graduate Texts in Mathematics, 77. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. xii+239 pp. ISBN: 0-387-90595-2.

[9] Kersten, I.: *Brauergruppen von Körpern.* Aspects of Mathematics, D6. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990. viii+176 pp. ISBN: 3-528-06380-7.

[10] Kersten, I.: Noether's problem and normalization. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 100 (1998), no. 1, 3–22.

[11] Lang, S.: *On quasi algebraic closure.* Ann. of Math. 55 (1952), 373–390.

[12] Lemmermeyer, F.; Roquette, P.: *Helmut Hasse und Emmy Noether: Die Korrespondenz 1925–1935.* Edited and with commentary, and an introduction in English, by Franz Lemmermeyer and Peter Roquette. Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2006. 301 pp. ISBN: 3-938616-35-0.

[13] Noether, E.: *Gesammelte Abhandlungen.* [Collected papers]. Edited and with an introduction by Nathan Jacobson. With an introductory address by P. S. Alexandrov. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. viii+777 pp.

[14] Molin, Th.: Über Systeme höherer komplexer Zahlen. *Math. Ann.* 41 (1893), 83–156.

[15] Peirce, B.: Linear Associative Algebras. *Amer. J. Math.* 4 (1881), 97–215.

[16] Reid, C.: *Hilbert.* With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl. Springer-Verlag, New York-Berlin 1970 xi+290 pp.

[17] Roquette, P.: *The Brauer-Hasse-Noether theorem in historical perspective.* Schriften der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Publications of the Mathematics and Natural Sciences Section of Heidelberg Academy of Sciences, 15. Springer-Verlag, Berlin, 2005. vi+92 pp. ISBN: 3-540-23005-X.

[18] Serre, J-P.: *Corps locaux.* Hermann, 1968.

[19] Teicher, M.: *On Emmy Noether. The heritage of Emmy Noether* (Ramat-Gan, 1996), 1–3, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[20] Tsen, C.: Zur Stufentheorie der Quasi-algebraisch-Abgeschlossenheit kommutativer Körper. *J. Chinese Math. Soc.* 171 (1936), 81–92.

[21] van der Waerden, B. L.: *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* Springer-Verlag, Berlin, 1985. xi+271 pp. ISBN: 3-540-13610-X.

[22] van der Waerden, B. L.: *Algebra.* Vol. I. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the seventh German edition by Fred Blum and John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xiv+265 pp.

[23] van der Waerden, B. L.: *Algebra.* Vol. II. Based in part on lectures by E. Artin and E. Noether. Translated from the fifth German edition by John R. Schulenberger. Springer-Verlag, New York, 1991. xii+284 pp.

[24] van der Waerden, B. L.: *Meine Göttinger Lehrjahre.* With an epilogue by Peter Roquette. Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 1997, no. 2, 20–27.

[25] Wedderburn, J. H. M.: On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* 6 (1908), 77–118.