DE LA MECÀNICA CELESTE ALS SISTEMES DINÀMICS: UN CAMí D'ANAR I TORNAR

CARLES SIMÓ

RESUM. La mecànica celeste estudia el moviment dels astres i, en general, tot tema relacionat amb el problema dels N cossos i les seves aplicacions a la ciència espacial. Podem considerar que el seu origen remot és el coneixement que els astrònoms babilonis i xinesos tenien del moviment dels astres.

Generalitzant, hom pot dir, en un sentit ampli, que els sistemes dinàmics estudien "tot allò que es mou", és a dir, tots els fenòmens en els que hi ha una magnitud que evoluciona amb el temps. L'estudi es fa tant dels aspectes quantitatius com qualitatius, analítics com numèrics, teòrics com aplicats.

En l'actualitat els sistemes dinàmics són, possiblement, la branca de les matemàtiques amb més interaccions amb d'altres branques i amb més possibilitats d'aplicació.

En aquest article s'exposen algunes idees bàsiques dels sistemes dinàmics, centrades en veure molts problemes com qüestions geomètriques en espais convenients. Finalment es presenta un problema elemental en sistemes dinàmics que s'ha pogut resoldre emprant eines de mecànica celeste.

INTRODUCCIÓ

La mecànica celeste estudia el moviment dels astres y, en general, tot tema relacionat amb el problema d' N cossos y les seves aplicacions a la ciència espacial. Moltes de les qüestions de la mecànica celeste tenen un caràcter conservatiu. Malgrat això, la naturalesa ens ofereix proves constants de la presència d'efectes dissipatius. Per a estudiar ambdós tipus de sistemes utilitzem la teoria dels sistemes dinàmics.

Els sistemes dinàmics estudien els models de l'evolució dels fenòmens naturals i, per extensió, de qualsevol sistema, natural o artificial, concret o abstracte, que evolucioni amb el temps, així com els canvis que es produeixen en aquesta evolució quan varien els paràmetres del sistema. Són útils en tots els camps de la ciència i de la tècnica.

Una idea bàsica de la teoria dels sistemes dinàmics és la representació de l'evolució dels sistemes en un cert espai d'estats o espai de fases. O, millor encara, en un espai que descrigui l'estat i els paràmetres del sistema simultàniament. La comprensió de les possibles evolucions del sistema i el fet d'entendre si el seu comportament serà regular o caòtic es basa en el coneixement de certs objectes geomètrics en aquest espai.

En l'estudi dels sistemes dinàmics s'utilitzen eines de tots els dominis de la matemàtica.

En aquest article es presenten les línies aquí exposades que, en cert sentit, són un reflex de la meva evolució personal com a investigador.

La mecànica celeste

La mecànica celeste estudia el moviment dels astres i, en general, tot tema relacionat amb el problema d'N cossos i les seves aplicacions a la ciència espacial. Podem considerar que el seu origen remot és el coneixement que els astrònoms babilonis i xinesos tenien del moviment dels astres.

Les seves lleis fonamentals són les lleis de Newton que, en el cas del problema d'N cossos amb masses m_i , $i = 1, \ldots, N$ i posicions en l'espai r_i, vénen donades per

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} G m_j \frac{r_j - r_i}{d_{i,j}^3}. \tag{1}$$

on G representa la constant de gravitació i $d_{i,j}$ la distància del cos de massa m_i al cos de massa m_j. És a dir, s'expressen les acceleracions que actuen sobre els diferents cossos en funció de la seva posició relativa. és també útil introduir les velocitats dels diferents cossos, v_i. Llavors, la llei de Newton s'expressa com

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} &= \textstyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} G m_j \frac{r_j - r_i}{d_{i,j}^3}. \end{aligned}$$

Alguns dels principals problemes de la Mecànica Celest son:

Prediccions aproximades de posicions (teoria de pertorbacions, com la donada per les equacions de Gauss). Per exemple, per a $N = 2$ les solucions de (1) són elementals, i es denominen solucions keplerianes. Aquest no és el cas per a $N = 3$. Així, moguts per la necessitat de predir el moviment dels astres, es considera que el seu moviment és una pertorbació del moviment keplerià. En efecte, l'acció dominant sobre un planeta és el Sol, i els efectes dels altres planetes són molt menors. Sobre la Lluna l'efecte dominant és el de la Terra, i es considera com a pertorbació la diferència dels efectes del Sol sobre la Terra i sobre la Lluna. Es tracta, per tant, d'expressar la solució mitjançant desenvolupaments en un o varis petits paràmetres, com són la relació de masses entre Júpiter i el Sol ($\approx 1/1000$) o la relació de les distàncies de la Terra a la Lluna i el Sol ($\approx 1/400$).

Topologia de l'espai de fases (o espai de posicions i velocitats, o espai d'estats). És a dir, interessar-se pels aspectes més qualitatius, intentant descriure quin tipus d'òrbites es poden trobar, enlloc de buscar l'expressió de les solucions.

El problema de les col·lisions i, en general, de les singularitats de les solucions. I també, els passos prop d'una col·lisió. Es diu que té lloc una col·lisió en un instant de temps $t = t^*$, si almenys dos cossos tendeixen a la mateixa posició quan t tendeix a aquest instant de temps. Suposem que això succeeix per una solució φ. De (1) és clar que les equacions no estan definides per a un temps t més enllà de t^*, però un es podria preguntar si hi ha alguna manera de continuar la solució φ a través de la col·lisió, és a dir, si existeix o no una altra solució ϕ, acabant en la mateixa col·lisió quan t decreix cap a t^* tal que si estenem la solució φ per ϕ un recupera continuïtat respecte condicions inicials.

Configuracions centrals i punts d'equilibri relatiu. Les primeres son solucions del tipus $r_i(t) = \phi(t)a_i$, on ϕ es una funció escalar, mentre que els darrers són punts fixos del problema d'N cossos en un sistema d'eixos giratoris al voltant del centre de masses. Determinar-les per un N arbitrari és una qüestió oberta, inclús per al cas més senzill en què les masses siguin totes iguals. Es tracta d'un problema de geometria algebraica, ja que consisteix en determinar el nombre de solucions d'un sistema d'equacions.

Solucions periòdiques. Són aquelles en què la solució torna al punt de partida al cap d'un cert interval de temps T, que anomenem període. Per exemple, les òrbites halo i les anomenades coreografies, solucions periòdiques del problema d'N cossos per a masses iguals, en què tots els cossos es mouen al llarg de la mateixa corba del pla, en una dansa en la què es van perseguint, únicament sota l'acció de la gravitació. Existeix una infinitat d'aquestes solucions, fins i tot per al problema de 3 cossos.

Solucions quasiperiòdiques. Una funció periòdica $f(t)$ compleix $f(t+T) = f(t)$ per a un cert $T > 0$. Si sumem dues funcions periòdiques de períodes T_1 i T_2 incommensurables (és a dir, T_2/T_1 no és un nombre racional), tenim el cas més simple de funció quasiperiòdica. Per exemple $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$. Una solució quasiperiòdica es mou sobre un tor. Exemples de solucions quasiperiòdiques poden ser el moviment aproximat dels planetes gegants.

Les solucions estables i les caòtiques, tenint en compte els efectes de les **ressonàncies** i de les diferents escales de temps. Les solucions regulars tenen una inestabilitat local feble, és a dir, les òrbites properes poden divergir però només a una escala que és lineal (o com a molt polinomial) respecte el temps. Per contra, les solucions irregulars o caòtiques es caracteritzen per una divergència local exponencial.

Els mecanismes d'escapament i captura. En molts problemes d' N cossos és interessant de localitzar les regions de captura i escapament, per exemple un asteroide o un cometa pot ser capturat (o capturat per un cert temps) per un planeta, o bé sistemes binaris d'estrelles poden capturar o expulsar una tercera estrella. Les fronteres de captura i escapament estan relacionades amb les varietats invariants (estables i inestables) dels diferents objectes invariants.

Entre les nombroses aplicacions de la mecànica celeste tenim, per exemple, l'estudi del moviment dels asteroides i cometes; l'estudi dels asteroides que passen prop de la Terra (NEO); la detecció i anàlisi dels sistemes planetaris externs; el moviment dels satèl·lits artificials; el disseny de missions espacials allunyades de la Terra, etc.

1. Els sistemes dinàmics

1.1. **Una breu descripció.** Generalitzant, hom pot dir, en un sentit ampli, que els sistemes dinàmics estudien "tot allò que es mou", és a dir, tots els fenòmens en els que hi ha una magnitud que evoluciona en el temps. Molts dels fenòmens estudiats per les ciències experimentals o usats en la tecnologia es basen en la representació de l'estat del sistema en un cert instant de temps per mitjà de diverses variables o magnituds, com ara la posició, velocitat, concentració d'una certa substància, temperatura, etc. És per això que els sistemes dinàmics esdevenen una branca important de la matemàtica i de la ciència.

Hom considera Poincaré com el pare dels sistemes dinàmics. Ell va ser el primer en comprendre que, donada la impossibilitat de trobar explícitament una solució d'una equació diferencial, era precís canviar l'estratègia o el punt de vista: enlloc d'estudiar **quantitativament** cada solució es pot estudiar **qualitativament** totes les solucions alhora (o si més no moltes d'elles). No obstant, com passa per exemple en la topologia, aquest punt de vista sovint no proporciona tota la informació o, millor dit, porta a resultats molt generals. De fet, hom pot pensar que les matemàtiques es troben encara en un estat primitiu al no disposar de mètodes generals per resoldre amb detall problemes concrets (per exemple, en geometria algebraica no es pot saber quantes solucions té un sistema polinomial donat de, diguem, deu equacions, deu incògnites i grau no gaire gran). Així doncs, encara hi ha molta feina a fer.

A més de la dicotomia plantejada per Poincaré, un altre aspecte característic dels sistemes dinàmics és l'estudi de la dependència paramètrica del sistema. Així, a més de **l'espai d'estats** $\mathscr{E}$, trobem l'**espai de paràmetres** $\mathscr{P}$. Cal remarcar que sovint els papers d'aquests espais s'intercanvien o bé es consideren de forma conjunta (fet al qual es pot fer referència a la "democràcia d'estats"). Per exemple, hi ha una correspondència entre estudiar totes les solucions d'una equació havent fixat el valor del paràmetre i entre la solució que correspon a una determinada condició inicial en una família paramètrica d'equacions.

Per tot això, a la pràctica és molt convenient estudiar-los de forma conjunta $\mathscr{E} \times \mathscr{P}$.

Cal destacar també la importància de saber combinar les **eines analítiques** amb les **eines numèriques** per tal d'obtenir el màxim profit d'aquestes. Un punt clau on cal fer servir ambdues tècniques és en l'estudi dels **objectes geomètrics invariants** i de les seves propietats. Aquests objectes estan formats per **solucions** que constitueixen **l'esquelet** del sistema a $\mathscr{E}$ o a $\mathscr{E} \times \mathscr{P}$ i organitzen la dinàmica entorn d'ells.

Finalment, cal considerar la **rellevància** dels diferents fenòmens en els camps **teòric** i **aplicat**. Hom hauria de considerar l'interés o la importància del resultats amb els que treballa. Per exemple, la inestabilitat del Sistema Solar després de temps molt superiors a l'edat de l'Univers no sembla un fet gaire preocupant.

Les equacions que regeixen la **dinàmica** sovint es troben entre els tipus següents:

$$\frac{dw(t)}{dt} = F(t, w(t)) \quad \text{(EDO)}$$

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = F(t, x, w, \frac{\partial w}{\partial x}) \quad \text{(EDP)}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = F(w(t)) \quad \text{(EDOA)}$$

però també podem trobar altres situacions comunes, com per exemple sistemes discrets $w \mapsto F(w)$, models estocàstics, sistemes amb alguna estructura especial (com els sistemes conservatius, dissipatius, ...). Finalment, alguns algorismes numèrics (qualsevol esquema iteratiu) també es poden considerar com a sistemes dinàmics.

1.2. **Alguns del seus problemes.** Intentarem a continuació descriure els passos fonamentals a seguir per "entendre" un sistema dinàmic.

- En primer lloc, cal identificar els **objectes senzills** presents a l'espai d'estats, com per exemple punts fixos o d'equilibri, òrbites periòdiques i d'altres objectes invariants: esferes, tors, etc.

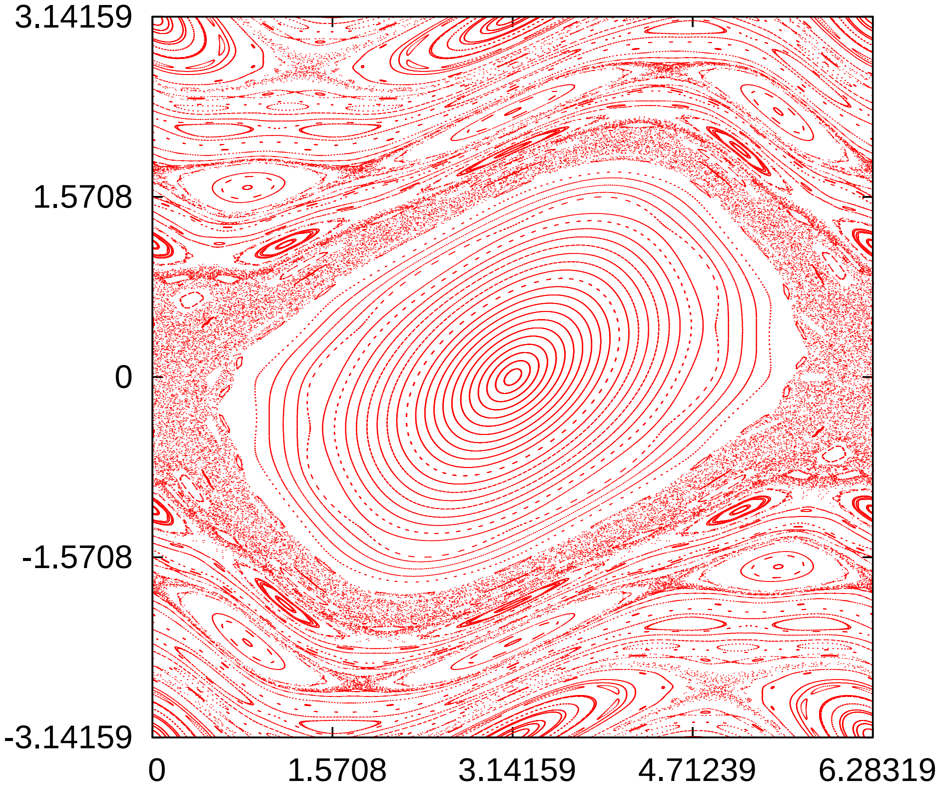
- A continuació, cal determinar l'estabilitat d'aquests objectes. Suposem, però, que un tal objecte és inestable i que per tant és possible escapar d'un entorn seu en un cert temps. Aleshores, és convenient detectar i caracteritzar la seva hiperbolicitat (varietats estables i/o inestables asociades a un tal objecte). És ben conegut que la intersecció d'aquestes varietats hiperbòliques dona lloc a les dinàmiques caòtiques i a la difusió.
- A més, cal trobar les possibles **connexions** entre les varietats estables i inestables, no només d'un mateix objecte (**òrbites homoclíniques**) sinó també provenint d'objectes diferents (**connexions heteroclíniques**).
- En cas de dependència paramètrica (sobretot si es tracta de paràmetres físics dels models), és molt interessant estudiar l'estabilitat o inestabilitat provocada per canvis de paràmetres, que es coneix com estudi de les **bifurcacions**. En aquest context trobem per exemple l'anomenada **estabilitat estructural** o la **persistència en mesura**.
- Finalment, cal recollir tota la informació anterior per "reconstruir" la descripció global de la dinàmica a $\mathscr{E} \times \mathscr{P}$. Sovint aquesta part és molt delicada i els mètodes numèrics juguen un paper molt important.

Per dur a terme amb èxit les tasques anteriors, a més dels mètodes analítics i teòrics, cal fer servir tota classe d'eines computacionals: mètodes numèrics, manipuladors simbòlics i recursos gràfics. Sovint, però, el problema que es pretén estudiar resulta massa complicat per tractar directament i és molt convenient recòrrer a **models paradigmàtics** o simplificats.

2. Un exemple

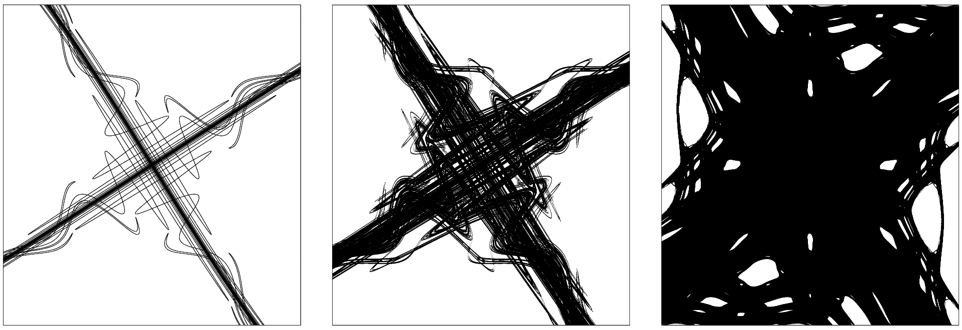
Considerem l'anomenada **aplicació standard**, una senzilla aplicació discreta i conservativa a $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y_1 \\ y + \varepsilon \sin(x) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$



La figura mostra òrbites a l'espai d'estats per $\varepsilon = 0.9$. Es veuen corbes invariants, de tipus rotacional o libracional (que donen lloc a illes d'estabilitat), i també zones caòtiques.

Qüestió: tenen àrea positiva les zones caòtiques?



La figura mostra diferents ampliacions de les varietats estable W^s i inestable W^u del punt fix hiperbòlic a $(x, y) = (0, 0)$, obtingudes usant també longituds creixents (mesurades a partir del punt fix).

Malgrat que la figura doni evidència que, efectivament, les zones caòtiques tenen àrea positiva, aquest fet no s'ha pogut demostrar fins ara.

Equivalentment, podem preguntar-nos si la clausura de W^u té àrea positiva o bé si el conjunt de punts amb exponent de Lyapunov positiu té àrea positiva.

Recordem que l'exponent de Lyapunov mesura la velocitat d'allunyament exponencial d'òrbites properes.

El problema esmentat s'anomena **conjectura de l'entropia mètrica positiva**. L'entropia mètrica és una mesura de la caoticitat d'un sistema.

Per a una aplicació F denotem la seva entropia mètrica per $h(F) \geq 0$.

3. Una proposta de M. Shub

M. Shub va proposar considerar una família paramètrica de sistemes $\{f_g,\, g \in G\}$, actuant sobre una varietat compacta $\mathcal{M}$, i essent G el grup de paràmetres en el que hi ha una mesura invariant ν (la mesura de Haar). Llavors podem considerar el promig

$$h_{\text{ave}} = \int_G h(f_g) d\nu(g).$$

D'altra banda podem considerar iteracions amb elements f_g a l'atzar

$$\dots f_{g_3} \circ f_{g_2} \circ f_{g_1},$$

on $g_1, g_2, g_3, \dots$ es trien a G d'acord amb ν. Aquesta iteració aleatòria també té una entropia que anomenem h_{ran}.

Si provéssim que $h_{\text{ran}} > 0$ i $h_{\text{ave}} \geq h_{\text{ran}}$, aleshores és clar que hauríem obtingut que $h(f_g) > 0$ per a un conjunt de g's de mesura positiva. Notem que les f_g poden dependre d'altres paràmetres.

S'ha demostrat $h_{\text{ave}} \geq h_{\text{ran}} > 0$ per a certs casos senzills: quan les aplicacions f_g són a la seva vegada matrius d'un cert grup (Dedieu-Shub) o bé per aplicacions del cercle que són un producte de Blaschke finit (Pujals-Robert-Shub).

En el cas d'aplicacions no lineals en dimensió 2 preservant àrea i afegint una petita quantitat de soroll aleatori s'ha demostrat per a l'aplicació standard (Carleson-Spencer, Einstein Chair Lectures CUNY) i per a una família d'aplicacions a $\mathbb{S}^2$ (Ledrappier-Shub-S-Wilkinson).

A partir d'ara ens centrarem en el problema per a les que podem anomenar aplicacions d'Arnold a $\mathbb{S}^1$ expansives:

$$f_{k,\alpha,\varepsilon} : x \mapsto kx + \alpha + \varepsilon \sin(2\pi x),$$

que, a més del paràmetre $\alpha \in \mathbb{S}^1$ (amb $\nu =$ Lebesgue), depenen de $k \in \mathbb{N}, k > 1, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

Podem preguntar si existeixen k, ε tals que

$$h_{\text{ave}}(f_{k,\cdot,\varepsilon}) \geq h_{\text{ran}}(f_{k,\cdot,\varepsilon}) > 0. \tag{2}$$

Fins i tot si això no és cert per a la família considerada, de cara al nostre objectiu podem, per exemple, afeblir la qüestió demanant

$$\max_{\alpha \in \mathbb{S}^1} \{h(f_{k,\alpha,\varepsilon})\} \geq h_{\text{ran}}(f_{k,\cdot,\varepsilon}) > 0. \tag{3}$$

Això ha estat demostrat recentment (de la Llave-Shub-Simó). Per a provar-ho és útil definir $e = -2\pi\varepsilon/k$ i cal obtenir la mesura invariant $\mu_{k,\alpha,\varepsilon}$ de l'aplicació $f_{k,\alpha,\varepsilon}$ a $\mathbb{S}^1$, que ha de satisfer l'equació funcional

$$\mu_{k,\alpha,\varepsilon}(y + \alpha) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\mu_{k,\alpha,\varepsilon}(x_j)}{1 - e\cos(2\pi x_j)}$$

on $x_j, j = 1, \ldots, k$ són les preimatges de $y + \alpha$ per l'aplicació. Concretament x_j és la única solució (a $\mathbb{R}^1$) de

$$kx + \alpha + \varepsilon \sin(2\pi x) = y + j + \alpha.$$

Definint $M_j = 2\pi \dfrac{y+j}{k}$, $E_j = 2\pi x_j$ l'equació anterior queda

$$E_j - e \sin E_j = M_j.$$

És a dir, la clàssica equació de Kepler del problema el·líptic de dos cossos. Com es pot veure en el *Theoria Motus*, Gauss va dedicar un notable esforç a la solució d'aquesta equació.

Interessa, però, una solució analítica:

$$E = M + 2 \sum_{s \geq 1} \frac{1}{s} J_s(se) \sin(sM),$$

on J_s són les funcions de Bessel de primera classe i ordre s:

$$J_s(u) = \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r (u/2)^{s+2r}}{r!(s+r)!}$$

per $u \geq 0$ i $J_{-s}(-u) = J_s(u)$.

Això explica perquè s'ha inclòs "un camí d'anar i tornar" al títol de l'article. Amb una certa quantitat de feina addicional es demostra que, encara que (2) no sigui cert, sí que es compleix (3). Naturalment, abans de fer la demostració, s'ha obtingut evidència numèrica del que hom volia demostrar.

Referències

[DS] Dedieu,J.P. and Shub,M., On random and mean exponents for unitarily invariant probability measures on GL(n, **C**), a "Geometric Methods in Dynamical Systems (II)-Volume in Honor of Jacob Palis", *Astérisque*, **287** (2003) 1–18, Soc. Math. de France.

[LSSW] Ledrappier,F., Shub,M., Simó,C. and Wilkinson,A., Random versus deterministic exponents in a rich family of diffeomorphisms, *Journal of Statistical Physics*, **113** (2003), 85–149.

[LlSS] de la Llave,R., Shub,M., Simó,C., Entropy estimates for a family of expanding maps of the circle, *Discrete and Continuous Dynamical Systems A*, (2007), per aparèixer.

[RPS] Robert,L., Pujals,E. and Shub,M., Expanding maps of the circle revisited: Positive Lyapunov exponents in a rich family, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **26** (2006), 1931–1937.

[S97] Simó,C,. An overview on some problems in Celestial Mechanics, curs d'estiu “Iniciación a los sistemas dinámicos”, El Escorial, 7-11 juliol, 1997. Veure `http://www-ma1.upc.es/escorial`.

[S98] Simó,C,. Effective Computations in Celestial Mechanics and Astrodynamics, a *Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications*, editors V.V. Rumyantsev i A.V. Karapetyan, CISM Courses and Lectures **387**, 55–102, Springer, 1998.

[VXX] Veure molts altres articles relacionats amb el tema del present article a `http://www.maia.ub.es/dsg/preprints.html`.