

CONJETURA DEL RANGO TORAL

VICENTE MUÑOZ

RESUMEN. La Conjetura del Rango Toral (CRT) es un interesante problema en topología que lleva abierto 20 años, y que tiene versiones e implicaciones en múltiples áreas de las matemáticas, tales como la geometría diferencial, la topología algebraica o el álgebra conmutativa. En estas breves notas, enunciaremos la CRT, repasaremos las definiciones que aparecen en el enunciado de la conjetura y veremos algunos de los métodos con los que se han estudiado casos particulares. Finalmente mencionaremos variaciones de la CRT en diversas áreas de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En este texto nos vamos a centrar en un “pequeño” problema de topología que lleva abierto 20 años. Fue propuesto por S. Halperin en 1987 (aparece en [Ha]), y dice lo siguiente.

CONJETURA DEL RANGO TORAL (CRT). *Sea $T^r \rightarrow E \rightarrow B$ un fibrado, siendo $T^r = S^1 \times \cdots \times S^1$ el toro r -dimensional y B un espacio compacto simplemente conexo. Entonces la dimensión de la cohomología del espacio total E satisface:*

$$\dim H^*(E) \geq 2^r.$$

Su formulación es de extrema sencillez. Los términos que aparecen son familiares a todo alumno de licenciatura con conocimientos básicos de geometría diferencial y topología algebraica (basta con conocer las nociones de fibrado y de cohomología). Dedicaremos unas páginas a explicar cada uno de los términos que aparecen en el enunciado de la CRT en detalle.

Quizá lo que hace más atractiva a la CRT es la cantidad de interrelaciones que tiene con varias áreas de las matemáticas, entre las cuales podemos destacar la topología algebraica, la geometría diferencial, el álgebra conmutativa, o la teoría de grupos y álgebras de Lie. Existen diversidad de formulaciones de la CRT, variaciones sobre la misma, con mayor o menor grado de generalidad. Eso sí, todas ellas tienen una formulación tan sencilla como la original. Esto permite a cada algebrista, géometa o topólogo, tener a su disposición su versión favorita de la CRT. ¡Y con la garantía de las numerosas implicaciones de su posible resolución! Nos entretendremos en explicar algunas variaciones de la conjetura, y en cómo se relacionan entre sí.

Curiosamente, la CRT es un problema al que no se ha prestado mucha atención, pasando bastante desapercibido. Quizá sea debido a una creencia ancestral de que si un problema tiene una formulación sencilla y no se resuelve fácilmente, entonces es extremadamente complicado. Es posible que sea necesaria la introducción de nuevas técnicas, o quizá el uso combinado de técnicas de varios campos, o puede que baste una simple y bella nueva idea. Mencionaremos algunas de las técnicas (que casi podemos calificar de “clásicas”) que se han usado en relación con la CRT.

Animamos a cualquier estudiante de doctorado en álgebra, geometría, o topología, a buscar algún camino para atacar la CRT. Todo investigador interesado en cualquiera de estas áreas debería tener presente una versión del enunciado de este problema. Por si acaso.

VARIETADES Y CW-COMPLEJOS

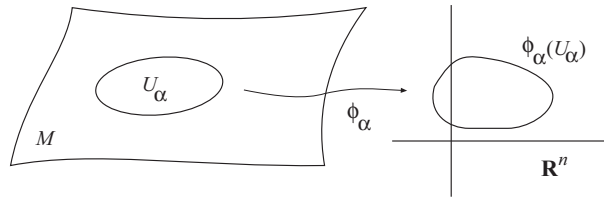
Comenzaremos por desgranar los distintos ingredientes geométricos y topológicos que aparecen en el enunciado de la Conjetura del Rango Toral, tal y como la hemos formulado en la Introducción.

Comenzaremos hablando de los espacios con los que se trata en geometría y en topología, que son las variedades diferenciables y los CW-complejos, respectivamente. Éstos poseen las propiedades básicas necesarias para trabajar con ellos.

Variedades diferenciables. En geometría (diferencial) se trabaja con variedades diferenciables: espacios que localmente (a pequeña escala) se parecen a \mathbb{R}^n (y por tanto, en ellos se puede derivar, integrar, y realizar todas aquellas operaciones de análisis matemático que realizamos en \mathbb{R}^n), pero que globalmente (a gran escala) pueden “retorcerse” de formas interesantes. Los espacios lisos (e.d. sin “esquinas”) que vienen a nuestra mente son de este tipo: curvas, superficies, nuestro universo, ...

La definición rigurosa sigue esta idea general (ver [Wa]): Una variedad diferenciable M , de dimensión n , es un espacio (topológico) con una colección de abiertos $U_\alpha \subset M$, tales que:

- (1) Los abiertos recubren M , es decir, $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$.
- (2) Existen homeomorfismos $U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$.



A ϕ_α se le llama carta local. Identifica el abierto U_α de M con un abierto de \mathbb{R}^n . Por tanto, las cartas locales nos permiten mirar a M a pequeña escala.

- (3) Si $U = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\phi_\alpha(U) \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} U \xrightarrow{\phi_\beta} \phi_\beta(U)$$

es un difeomorfismo (diferenciable y con inversa diferenciable). Esta es una propiedad de compatibilidad de las cartas locales (usando distintas cartas locales, ϕ_α, ϕ_β , tenemos las mismas propiedades geométricas en U). A veces se interpreta a $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ como una aplicación de pegado de dos cartas locales, y de esta forma M se construye pegando los abiertos U_α .

En general, las variedades diferenciables modelan los espacios geométricos que queremos estudiar. Por un lado, es deseable entender (para cada dimensión n), qué tipos de variedades existen. Esto da lugar a

uno de los problemas fundamentales de la geometría: la clasificación de variedades (cuántas variedades hay, cómo identificarlas, cómo saber cuándo dos de ellas son equivalentes). Por otro lado, queremos también entender, dada una variedad concreta, qué propiedades (geométricas) tiene. Esto nos lleva al estudio de las distintas estructuras geométricas (qué tipo de información local hemos de añadir a la variedad para poder efectuar diversas mediciones geométricas que nos den información más refinada de la variedad).

CW-complejos. La topología se encarga del estudio de los espacios topológicos y de las propiedades derivadas del uso de funciones continuas. Por tanto, podemos abarcar situaciones más generales: espacios con esquinas, espacios que no se parezcan localmente a \mathbb{R}^n , ..., pero obtendremos información menos refinada, al perder la posibilidad de derivar e integrar en el espacio en el que trabajamos.

Para esto, podemos trabajar con variedades topológicas: tienen la misma definición que las variedades diferenciables, pero en el punto (3) sólo pedimos que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sea un homeomorfismo (continua y con inversa continua). Si queremos estudiar un mayor número de espacios, podemos tratar con todos los espacios topológicos, pero en completa generalidad, éstos pueden tener propiedades muy extrañas que no permitirían llevar muy adelante un estudio profundo de sus propiedades geométricas.

Conviene por tanto, quedarse en un terreno intermedio, con espacios más generales que las variedades, pero menos que los espacios topológicos generaltes. Los CW-complejos, introducidos por J.H.C. Whitehead (ver [Ma]) son espacios que se pueden trocear en porciones similares a \mathbb{R}^n , pero las condiciones de pegado son más generales que las de las variedades.

Rigurosamente, un CW-complejo X (de dimensión n) se construye pegando celdas de diversas dimensiones. Una k -celda es una bola cerrada k -dimensional $D^k \subset \mathbb{R}^k$. Entonces

$$X = X^n \supset X^{n-1} \supset \dots \supset X^1 \supset X^0,$$

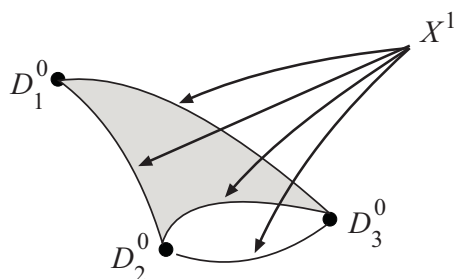
siendo X^0 un conjunto (discreto) de puntos, y

$$X^k = X^{k-1} \cup D_1^k \cup \dots \cup D_{r_k}^k,$$

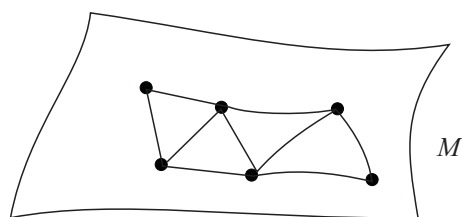
para $k = 1, \dots, n$, con D_i^k una k -celda pegada a X^{k-1} a lo largo de su borde, es decir, cumpliendo

$$\partial D_i^k \subset X^{k-1} \quad \text{e} \quad \text{int}(D_i^k) \cap X^{k-1} = \emptyset.$$

Se dice que X^k es el k -esqueleto de X (la parte de dimensión k de X). El CW-complejo queda troceado como X^0 más los conjuntos $\text{int}(D_i^k)$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, r_k$, todos ellos abiertos de \mathbb{R}^k . Los pegados no se hacen con homeomorfismos, con lo que se permiten espacios mucho más generales que las variedades topológicas. Por ejemplo, el siguiente CW-complejo tiene dimensión $n = 2$, tiene tres celdas de dimensión 0, cuatro de dimensión 1 y una de dimensión 2 (hemos señalado cuál es el 1-esqueleto). Obviamente no es una variedad.



Es interesante recalcar aquí, que si M es una variedad diferenciable, la podemos triangular. Una triangulación es un caso sencillo de estructura de CW-complejo.

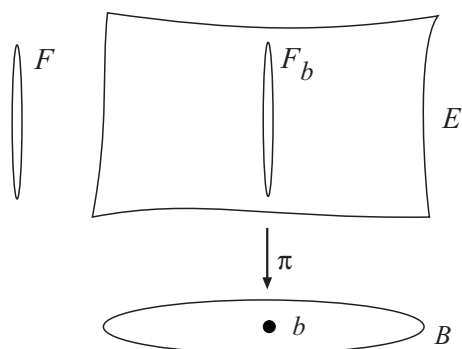


La estructura de CW-complejo permite un análisis de tipo combinatorio de un espacio. Si el CW-complejo es compacto, entonces tiene un número finito de celdas. Si codificamos convenientemente el pegado de celdas (como relaciones de incidencia), podemos extraer algunas propiedades de un CW-complejo con álgebra elemental.

FIBRADOS

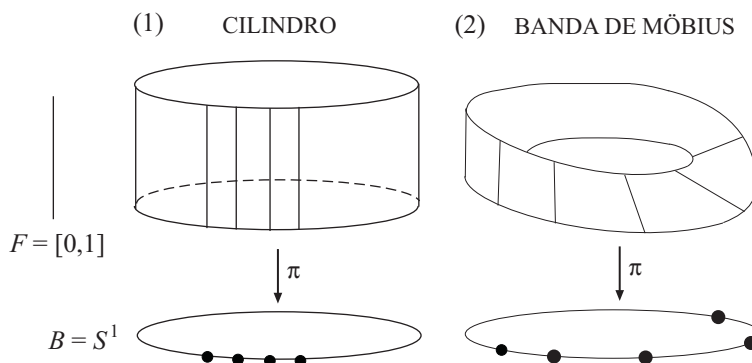
Un fibrado $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ consiste de tres espacios (variedades o CW-complejos, según el caso que queramos analizar) y dos aplicaciones (llamamos a F la fibra, a E el espacio total, y a B la base), cumpliendo:

- (1) $F_b := \pi^{-1}(b) \cong F, \forall b \in B$. A F_b se le llama la fibra sobre b . Claramente $E = \bigsqcup_{b \in B} F_b$, es decir, E es la reunión de las fibras.
- (2) Cada $b \in B$ está dentro de un entorno pequeño U tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$ (compatiblemente con la identificación en el punto (1)).

**Ejemplos:**

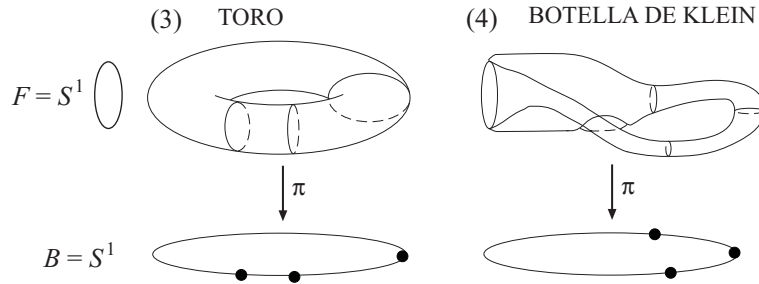
1. *Cilindro*. En este caso E es un cilindro ($E = S^1 \times [0, 1]$), π es la proyección de $S^1 \times [0, 1]$ sobre S^1 , con lo cual $F = [0, 1]$.

2. *Banda de Möbius*. De nuevo tenemos $B = S^1$ y $F = [0, 1]$, pero ahora el espacio total E es la banda de Möbius. Este fibrado no es equivalente al cilindro, ya que E no es el producto $B \times F$ en este caso.



3. *Toro.* $E = S^1 \times S^1$, π es la proyección sobre el segundo factor $B = S^1$ y $F = S^1$.

4. *Botella de Klein.* B y F son como en ejemplo anterior, pero E es la botella de Klein.

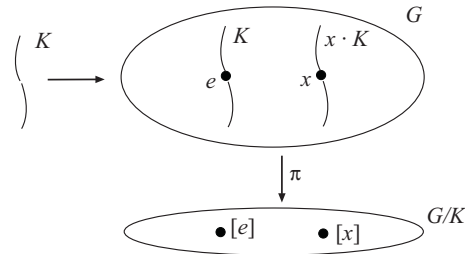


5. *Fibrado trivial.* El espacio total del fibrado trivial de base B y fibra F es $E = B \times F$, y $\pi : E \rightarrow B$ es la proyección del producto $B \times F$ sobre B . El cilindro y el toro son fibrados triviales.

6. *Cociente de grupos de Lie.* Si $K \subset G$ son dos grupos de Lie compactos, y $G/K = \{[x]_K : x \in G\}$, $[x]_K = x \cdot K$, entonces

$$K \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/K,$$

con $\pi(x) = [x]_K$, es un fibrado de fibra K .



Los fibrados que aparecen en la Conjetura del Rango Toral son bastante sencillos: la fibra es el toro r -dimensional, que por definición es

$$T^r = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1,$$

con r factores. La base B va a ser una variedad o CW-complejo compacto.

HOMOTOPÍA Y HOMOLOGÍA

El ingrediente final que nos falta para entender la formulación de la Conjetura del Rango Toral es la noción de homotopía y homología (ver [Ma] y [BT]). Los grupos de homotopía y los grupos de homología y cohomología sirven para contar los “agujeros” de un espacio topológico razonable (aquí “razonable” se refiere a muchos tipos de espacios, incluyendo los CW-complejos). Los agujeros de un espacio M son una propiedad de tipo global que nos da mucha información sobre M .

Grupos de Homotopía. Pondremos p_0 para denotar un punto distinguido de M , al que llamaremos *punto base*.

El k -ésimo grupo de homotopía de M , $\pi_k(M)$, viene definido por

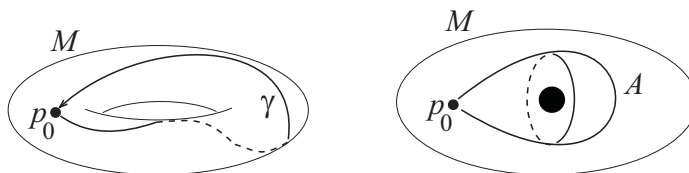
$$\pi_k(M) = \{\gamma : S^k \rightarrow M \mid \gamma(n) = p_0\} / \sim,$$

donde n representa un punto de S^k (por ejemplo el polo norte $n = (0, \dots, 0, 1)$) y donde \sim es la relación de equivalencia dada por $\gamma_0 \sim \gamma_1$ si γ_0 y γ_1 son aplicaciones homótopas (es decir, si $\exists \gamma_t$, $t \in [0, 1]$, interpolando entre γ_0 y γ_1).

Evidentemente, $\pi_k(M)$ es un invariante topológico de M (no varía si cambiamos M por un espacio homeomorfo). Lo que no es tan claro, pero es cierto, es que $\pi_k(M)$ es un grupo (además, abeliano para $k \geq 2$).

El grupo $\pi_1(M)$ (que en general es no abeliano) juega un papel distinguido. Se le denomina *grupo fundamental* de M . Si $\pi_1(M) = \{1\}$ (lo cual equivale a decir que todo lazo $\gamma : S^1 \rightarrow M$ se puede homotopar (contraer) al punto base) se dice que M es simplemente conexo.

En la siguiente figura, vemos dos elementos (no triviales) de los grupos de homotopía. El primero es un lazo $[\gamma] \in \pi_1(M)$, y el segundo es un elemento $A \in \pi_2(M)$.



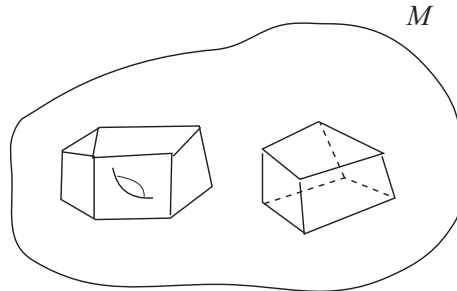
Homología. Los grupos de homología fueron introducidos por H. Poincaré. Son siempre grupos abelianos, por lo que es más fácil trabajar con ellos que con los grupos de homotopía. A cambio, contienen algo menos de información topológica sobre el espacio, pero la facilidad para calcularlos en ejemplos prácticos, y sus numerosas propiedades algebraicas, hacen de ellos una de las más poderosas herramientas en topología.

La definición concreta es como sigue:

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

es el grupo (abeliano) de las k -cadenas de M (son sumas finitas formales de k -cubos en M). Hay un *operador borde* $\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)$ que a cada k -cadena T le asocia su borde ∂T , que es una $(k - 1)$ -cadena. Introducimos:

- $Z_k(M) = \ker \partial =$ espacio de k -ciclos. $Z_k(M)$ consiste de las k -cadenas T que no tienen borde, $\partial T = 0$. Estas k -cadenas pueden rodear potenciales agujeros (ver figura).
- $B_k(M) = \text{im } \partial =$ espacio de k -bordes. Si un k -ciclo T no rodea un agujero dentro, entonces bordea una $(k + 1)$ -cadena en M , por tanto $T = \partial S$ para algún S .
- $H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M)$ es el k -ésimo grupo de homología de M . Consideramos los k -ciclos y aniquilamos aquéllos que no rodean agujeros. Por tanto, el cociente $H_k(M)$ controla los agujeros de M .

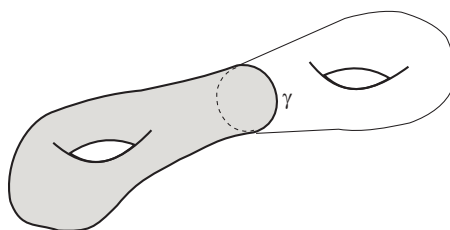


Si usamos coeficientes reales, es decir ponemos $n_i \in \mathbb{R}$ en la definición de $C_k(M)$, obtenemos los grupos de homología real $H_k(M, \mathbb{R})$. Es fácil ver que $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M) \otimes \mathbb{R}$, con lo que sólo perdemos la información de torsión de la homología.

Ejemplo: La esfera n -dimensional S^n sólo tiene un “agujero” en dimensión n . Concretamente,

$$H_k(S^n, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n, \\ 0, & k \neq 0, n. \end{cases}$$

En general $H_k(M)$ es más fácil de calcular que $\pi_k(M)$. Por ejemplo, $H_k(M) = 0$ para $k > n = \dim M$, mientras que a menudo $\pi_k(M) \neq 0$ para $k > n$. En la figura $\gamma \neq 0$ en $\pi_1(M)$, pero $\gamma = 0$ en $H_1(M)$ (el lazo no se contrae, pero sí bordea una 2-cadena).



Cohomología de De Rham. Ahora regresamos a las variedades diferenciables. La estructura global de las mismas puede ser analizada, en particular, con los invariantes topológicos que acabamos de introducir (homotopía y homología). Un sorprendente resultado de G. De Rham [BT] nos dice que podemos calcular la homología real con la información geométrico-diferencial de la variedad.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Sea

$$\Omega^k(M) = \left\{ \alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right\}$$

el espacio de las k -formas. La diferencial exterior d da lugar a un complejo

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

llamado complejo de De Rham. Su “cohomología” está dada por:

- $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$, espacio de k -formas cerradas,
- $B^k(M) = \text{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$, espacio de k -formas exactas.

- $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$, que se denomina *cohomología de De Rham* de M .

Teorema: $H^k(M) \cong H_k(M, \mathbb{R})^*$.

Propiedades:

- Los números $b_k(M) = \dim H^k(M)$ se llaman *números de Betti* de M . Si M es variedad compacta orientada, entonces $b_{n-k}(M) = b_k(M)$. Éste es un resultado conocido como dualidad de Poincaré.
- La característica de Euler-Poincaré de M se define como la suma alternada del número de celdas: $\chi(M) = \sum_k (-1)^k r_k$. Coincide como la suma alternada de los números de Betti: $\chi(M) = \sum_k (-1)^k b_k(M)$.

Homología del toro. Sea $T^r = S^1 \times \dots \times S^1$. Partiendo de que para el círculo S^1

$$H^0(S^1) \cong \mathbb{R} = \langle 1 \rangle,$$

$$H^1(S^1) \cong \mathbb{R} = \langle d\theta \rangle, \quad \theta \text{ coordenada angular},$$

obtenemos para T^r ,

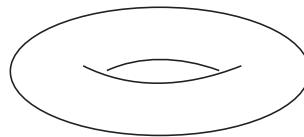
$$H^k(T^r) \cong \langle d\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge d\theta_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r \rangle.$$

Abreviadamente, $H^*(T^r) \simeq \bigwedge(e_1, \dots, e_r)$, $e_j = d\theta_j$. Por tanto,

$$\dim H^k(T^r) = \binom{r}{k}$$

y

$$\dim H^*(T^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} = 2^r.$$



$$T^2 = S^1 \times S^1$$

CONJETURA DEL RANGO TORAL

Recordemos el enunciado de la CRT. Si $T^r \rightarrow E \rightarrow B$ es un fibrado, con base B compacta y simplemente conexa, entonces

$$\dim H^*(E) \geq 2^r .$$

Observaciones:

- (1) En el enunciado original, suponíamos que E, B son variedades. Podemos formular igualmente la CRT suponiendo que E, B son CW-complejos. En este caso, podemos tomar como definición $H^k(E) = H_k(E, \mathbb{R})^*$, o bien usar la cohomología singular (ver [Ma]).
- (2) Como $\dim H^*(T^r) = 2^r$, la CRT predice que

$$\dim H^*(E) \geq \dim H^*(F) ,$$

donde $F = T^r$ es la fibra.

- (3) La conjetura es cierta para fibrados producto $E = B \times T^r$. En este caso,

$$\dim H^*(E) = \dim H^*(T^r) \cdot \dim H^*(B) = 2^r \cdot \dim H^*(B).$$

Vemos que hay una inclusión $H_*(T^r, \mathbb{R}) \hookrightarrow H_*(E, \mathbb{R})$, inducida por la inclusión $T^r \hookrightarrow E$, que justifica la desigualdad de la CRT, $\dim H^*(E) \geq \dim H^*(T^r)$.

- (4) En general, la homología de E no tiene por qué provenir de T^r , e.d. puede no darse una inclusión $H_*(T^r, \mathbb{R}) \hookrightarrow H_*(E, \mathbb{R})$. La predicción de la CRT es sobre la dimensión de estos espacios. Un ejemplo de este fenómeno es el fibrado

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^3 \times S^3 \rightarrow S^2 \times S^2 ,$$

consistente en el producto de dos fibrados de Hopf:

$$S^1 = U(1) \rightarrow S^3 = SU(2) \rightarrow S^2 = SU(2)/U(1).$$

- (5) Podemos plantear la CRT como una conjetura sobre la máxima dimensión del toro T^r que puede actuar en una variedad o CW-complejo E . Si $N = \dim H^*(E)$, se debe verificar que $2^r \leq N$, es decir,

$$r \leq \log_2 N .$$

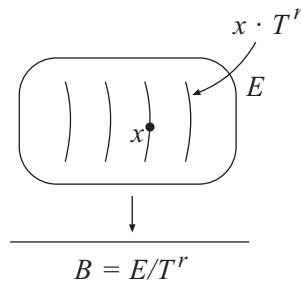
LA CRT DESDE DIVERSOS PUNTOS DE VISTA

La Conjetura de Rango Toral puede ser estudiada desde diversas áreas de las matemáticas. De hecho, se pueden formular conjeturas que están de algún modo u otro relacionadas con la CRT. Resolver cualquiera de ellas sería un gran hito. Las técnicas varían con la versión de la conjetura según el área. Uno puede escoger su versión favorita de la CRT, dependiendo de sus gustos y conocimientos.

A. Acciones de grupos en variedades. Una formulación de la CRT desde el punto de vista de la geometría diferencial es la siguiente:

CRT-A: Si una variedad compacta E simplemente conexa admite una acción libre de un r -toro T^r , entonces

$$\dim H^*(E) \geq 2^r .$$



Ejemplos.

- (1) Si G es un grupo de Lie compacto y simplemente conexo y $T^r \subset G$ es un toro maximal, entonces clásicamente se denomina a r el rango de G . En este caso, no es difícil probar que $H^*(G)$ es un álgebra exterior en r generadores. Por tanto, $\dim H^*(G) = 2^r$ y CRT es cierta.
- (2) Supongamos que $K \subset G$ es un subgrupo compacto de un grupo de Lie compacto. Tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T^s & \subset & T^r & \rightarrow & T^r/T^s = T^{r-s} \\ \cap & & \cap & & \cap \\ K & \subset & G & \rightarrow & G/K \end{array}$$

donde T^s y T^r son toros maximales de sus respectivos grupos de Lie. Entonces T^{r-s} actúa en la variedad $M = G/K$ (este tipo de variedades se llaman espacios homogéneos). La desigualdad

$$\dim H^*(G/K) \cdot \dim H^*(K) \geq \dim H^*(G),$$

da lugar a $2^s \cdot \dim H^*(M) \geq 2^r$, y por tanto $\dim H^*(M) \geq 2^{r-s}$. De nuevo, CRT cierta es cierta también para espacios homogéneos.

La conjetura CRT-A se puede atacar con herramientas de geometría diferencial. Por ejemplo, se pueden estudiar funciones de Morse en el espacio total E que tengan un comportamiento genérico a lo largo de las fibras. Para una fibra genérica F_b , el conjunto de puntos críticos $Crit_b$ de la restricción de tal función h a F_b , tiene al menos 2^r puntos. De hecho,

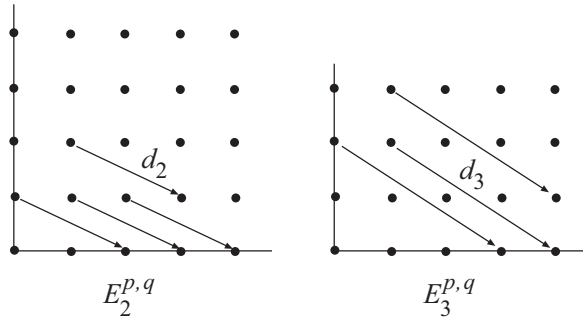
$$Crit := \bigcup_{b \in B} Crit_b$$

da un recubrimiento (ramificado) de grado al menos 2^r de B . Esta variedad $Crit \subset E$ podría servir para comprobar que h tiene al menos 2^r puntos críticos, y desde ahí intentar obtener $\dim H^*(E) \geq 2^r$.

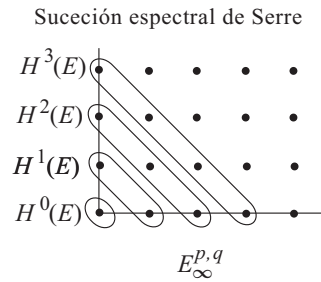
Otros caminos pueden recurrir a poner más estructura en el fibrado por toros (e.g. fibrados simplécticos), quizá probando la conjetura en casos particulares pero muy relevantes.

B. Sucesiones espectrales. Quizá una de las formas más directas de atacar la CRT sea a través del uso de las sucesiones espectrales. Todo fibrado $F \rightarrow E \rightarrow B$ (suponemos que B es simplemente conexa) produce una sucesión espectral, llamada sucesión espectral de Leray-Serre (ver [Mc] o [BT]). Básicamente, tal sucesión espectral se compone de:

- Páginas: $E_k^{**} =$ espacios vectoriales bi-graduados, $k \geq 0$.
- Información inicial: la segunda página es $E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F)$.
- Diferenciales en la páginas: $d_2 : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1}$,
 $d_3 : E_3^{p,q} \rightarrow E_3^{p+3,q-2}, \dots$
- Cada página se obtiene como la cohomología de la anterior:
 $E_k = H^*(E_{k-1}, d_{k-1})$.



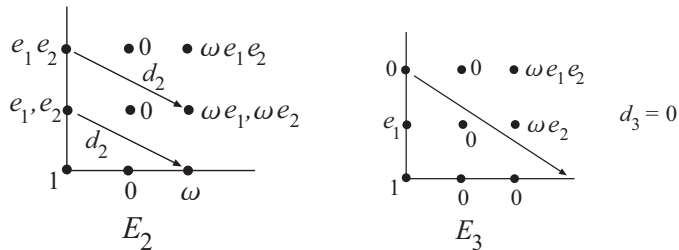
- Hay un límite: $E_\infty^{p,q} = E_k^{p,q}$, $k \gg 0$,
 y satisface que $\bigoplus_{k=p+q} E_\infty^{p,q} = H^k(E)$.



Ejemplo: Veamos cómo estudiar la CRT para una fibración del estilo $T^2 \rightarrow E \rightarrow S^2$. Tenemos que $H^*(T^2) = \langle e_1, e_2 \rangle$ y $H^*(S^2) = \langle 1, \omega \rangle$. Supongamos, por ejemplo, que tenemos la siguiente diferencial en E_2 (se pueden estudiar los distintos casos uno a uno, analizamos uno concreto),

$$\left. \begin{array}{l} d_2(e_1) = 0 \\ d_2(e_2) = \omega \end{array} \right\} \Rightarrow d_2(e_1 e_2) = d_2(e_1)e_2 - e_1 d_2(e_2) = -\omega e_1.$$

Luego $E_3 = H(E_2, d_2)$ queda:



Por tanto, $E_\infty = E_3 \Rightarrow \dim H^*(E) = 4$. La CRT es cierta en este caso.

Observación: Para $T^r \rightarrow E \rightarrow B$ siempre tenemos

$$\dim H^*(T^r) \cdot \dim H^*(B) \geq \dim H^*(E),$$

pero lo que buscamos es la desigualdad

$$\dim H^*(E) \geq 2^r.$$

En el ejemplo anterior, tenemos que $d_3 = d_4 = \dots = 0$, con lo que $E_\infty = E_3$. De hecho, éste es un caso muy interesante, por lo que lo formulamos como una conjetura aparte (más débil que la CRT). Sea $E_2 = H^*(B) \otimes \bigwedge(e_1, \dots, e_r)$. Como $e_j \in E_2^{0,1}$, existen elementos

$$y_j \in H^2(B) = E_2^{2,0}$$

tales que $d_2(e_j) = y_j$. Claramente, esto determina d_2 junto con el hecho de que $d_2|_{H^*(B)} = 0$.

CRT-B: Si $H^*(B)$ es un álgebra de dimensión finita, entonces

$$\dim H^*(H^*(B) \otimes \bigwedge(e_1, \dots, e_r), d_2) \geq 2^r.$$

C. Modelos minimales. La teoría de modelos minimales, introducida por D. Sullivan (ver [GM]), codifica la información homotópica (ignorando la torsión) de un CW-complejo simplemente conexo X en un álgebra diferencial graduada (A, d) , a la que se le denomina *modelo minimal* de X . Sus propiedades básicas son las siguientes:

- $A = \mathcal{A}(V_X) =$ álgebra generada por los espacios vectoriales $V_X^k = \langle x_{k,1}, \dots, x_{k,s_k} \rangle$, con la propiedad de ser “conmutativa graduada”:

$$x \cdot y = (-1)^{pq} y \cdot x, \quad x \in V_X^p, \quad y \in V_X^q.$$

- $V_X^k \cong (\pi_k(X) \otimes \mathbb{R})^*$.
- $d: A^n \rightarrow A^{n+1}$, diferencial con

$$dx_{k,\alpha} = \sum_{i,j < k} a_{ijk\alpha\beta\gamma} x_{i,\beta} x_{j,\gamma}.$$

- $H^*(A, d) = H^*(X)$.

Por tanto, el modelo minimal contiene toda la información de la homotopía salvo torsion, $\pi_k(X) \otimes \mathbb{R}$, y de la homología salvo torsion, $H^k(X) = H_k(X, \mathbb{R})^*$.

Ejemplos.

- (1) $X = S^{2n+1}$
 $A = \mathcal{A}(x_{2n+1}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x_{2n+1} = H^*(S^{2n+1}), d = 0.$
 $H^*(A, d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x_{2n+1} = H^*(S^{2n+1}).$
 Deducimos que $\pi_k(S^{2n+1})$ es torsión para todo $k \neq 2n + 1$,
 y que $\pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \otimes \mathbb{R}$ es de dimensión 1.

- (2) $X = S^{2n}$
 $A = \mathcal{A}(x_{2n}, y_{4n-1}) = \langle 1, x_{2n}, x_{2n}^2, \dots, y_{4n-1}, y_{4n-1}x_{2n}, y_{4n-1}x_{2n}^2, \dots \rangle,$
 $dy_{4n-1} = x_{2n}^2 \Rightarrow d(y_{4n-1}x_{2n}^i) = x_{2n}^{i+2}.$
 $H^*(A, d) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x_{2n} = H^*(S^{2n}).$
 Deducimos que $\pi_k(S^{2n})$ es torsión para todo $k \neq 2n, 4n - 1$,
 y que $\pi_{2n}(S^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ y $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ son de dimensión 1.

- (3) $X = T^r = S^1 \times \dots \times S^1$
 $A = \mathcal{A}(e_1, \dots, e_r), \quad e_i \in V_X^1, d = 0.$
 $H^*(A, d) = \bigwedge(e_1, \dots, e_r) = H^*(T^r).$

Modelos minimales y fibrados. Si $T^r \rightarrow E \rightarrow B$ es un fibrado con B simplemente conexo, entonces hay un “modelo minimal” para el fibrado. Éste consiste en un diagrama

$$(\mathcal{A}(V_B), d) \rightarrow (\mathcal{A}(V_B \oplus V_{T^r}), D) \rightarrow (\mathcal{A}(V_{T^r}), 0) = (\bigwedge(e_1, \dots, e_r), 0)$$

donde D es una diferencial con

- $Dx_{i,\alpha} = dx_{i,\alpha}, \quad x_{i,\alpha} \in V_B^i,$
- $De_j = y_j \in V_B^2,$
- $H^*(\mathcal{A}(V_B \oplus V_{T^r}), D) = H^*(E).$

Notemos que $\mathcal{A}(V_B \oplus V_{T^r}) = \mathcal{A}(V_B) \otimes \bigwedge(e_1, \dots, e_r)$. La versión de la CRT en la teoría de modelos minimales quedaría como sigue:

CRT-C: Si $\dim H(\mathcal{A}(V_B), d) < \infty$, entonces

$$\dim H^*(\mathcal{A}(V_B) \otimes \bigwedge(e_1, \dots, e_r), D) \geq 2^r.$$

Es fácil darse cuenta de las similitudes entre CRT-B y CRT-C, donde $H^*(B)$ se sustituye por $(\mathcal{A}(V_B), d)$ (ver [Mu]).

D. Álgebra homológica. Es natural convertir la CRT (al menos en su versión CRT-B) en un problema de álgebra homológica. Consideremos el anillo de polinomios $R = \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_r]$ en r variables. La aplicación

$$\begin{aligned} R &\rightarrow H^*(B), \\ Y_j &\mapsto y_j \end{aligned}$$

convierte a $M = H^*(B)$ en un R -módulo. La multiplicación viene definida como $Y_j \cdot \alpha = y_j \cdot \alpha$.

Por otro lado, $M' = \mathbb{R}$ es otro R -módulo. Basta con definir la multiplicación $Y_j \cdot \lambda = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Más algebraicamente, se escribe $M' = R/(Y_1, \dots, Y_r)$.

En álgebra homológica, se construyen unos funtores, denominados *funtores* $\text{Tor}_R(-, -)$, como funtores “derivados” del functor *producto tensorial* $-\otimes_R -$. La propiedad fundamental que cumplen es que asocian a cada par de R -módulos M_1 y M_2 una colección de R -módulos $\text{Tor}_R^k(M_1, M_2)$, que cumplen la propiedad de que si

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R -módulos, entonces hay una sucesión exacta larga, para cualquier M_4 ,

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{Tor}_R^2(M_1, M_4) \rightarrow \text{Tor}_R^2(M_2, M_4) \rightarrow \text{Tor}_R^2(M_3, M_4) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Tor}_R^1(M_1, M_4) \rightarrow \text{Tor}_R^1(M_2, M_4) \rightarrow \text{Tor}_R^1(M_3, M_4) \rightarrow \\ &\rightarrow M_1 \otimes_R M_4 \rightarrow M_2 \otimes_R M_4 \rightarrow M_3 \otimes_R M_4 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

El cálculo de $\text{Tor}_R^*(M, \mathbb{R})$ se realiza tomando una resolución libre de \mathbb{R} como R -módulos:

$$\bigwedge^r \otimes R \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^2 \otimes R \rightarrow \bigwedge^1 \otimes R \rightarrow R \rightarrow \mathbb{R},$$

donde hemos abreviado $\bigwedge^k = \bigwedge^k(e_1, \dots, e_r)$, y las aplicaciones consisten en $v \mapsto \sum_j Y_j \cdot i_{e_j} v$ (i_{e_j} denota “contracción con e_j ”). Después

hacemos $-\otimes_R M$ a la resolución y calculamos la cohomología:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_R^*(M, \mathbb{R}) &= H^*(M \otimes_R (\bigwedge^k (e_1, \dots, e_r) \otimes R)) \\ &= H^*(M \otimes \bigwedge^k (e_1, \dots, e_r), D), \end{aligned}$$

con la diferencial D dada por $De_j = y_j$.

Por tanto, la CRT (en su versión CRT-B) se convierte en

CRT-D: Si M es un R -módulo de dimensión finita, entonces

$$\dim \operatorname{Tor}_R^*(M, \mathbb{R}) \geq 2^r.$$

E. Álgebra conmutativa. Sea $R = \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_r]$ de nuevo el anillo de polinomios en r variables, y consideremos un R -módulo M de dimensión finita. La CRT-D dice que debe ocurrir que $\dim \operatorname{Tor}_R^*(M, \mathbb{R}) \geq 2^r$. Este grupo Tor puede calcularse realizando una resolución libre de M , de la forma

$$0 \rightarrow R^{n_r} \xrightarrow{f_r} \dots \xrightarrow{f_2} R^{n_1} \xrightarrow{f_1} R^{n_0} \xrightarrow{f_0} M.$$

Por el teorema de las sizigias de D. Hilbert (ver [Ei]), el número de módulos libres de la resolución es exactamente $r + 1$. Si M es un módulo graduado (como ocurre en general en la CRT), las aplicaciones f_k tienen como entradas polinomios homogéneos. La resolución es minimal cuando ningún f_k tiene término constante. En este caso, los números n_k se denominan (en álgebra conmutativa) *números de Betti* del R -módulo M (es sugerente el uso de esta expresión, dado que los n_k coinciden con los números de Betti de E en la CRT original).

Para calcular $\operatorname{Tor}_R^*(M, \mathbb{R})$, tensorizamos la resolución de M por $-\otimes_R \mathbb{R}$ y calculamos cohomología. Como f_k no tiene término constante, nos queda

$$\operatorname{Tor}_R^k(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n_k}.$$

CRT-E: Si M es un R -módulo de dimensión finita, y n_k son los números de Betti (de una resolución minimal de M), entonces

$$\sum_{k=0}^r n_k \geq 2^r.$$

Ésta es una famosa conjetura de álgebra conmutativa, propuesta en 1977 por D. A. Buchsbaum y D. Eisenbud (ver [BE]).

F. Álgebras de Lie. Hay otra versión de la CRT específica para álgebras de Lie. Surge a partir de la versión relativa a modelos minimales, aplicada a los modelos minimales de las nilvariedades. Las nilvariedades son cocientes de grupos de Lie nilpotentes G por subgrupos discretos $\Gamma \subset G$ tales que $M = G/\Gamma$ es una variedad compacta. Un grupo es nilpotente si, haciendo conmutadores de elementos repetidamente, siempre acabamos obteniendo el elemento neutro. Todo grupo de Lie nilpotente G es difeomorfo a \mathbb{R}^n . Por tanto, una nilvariedad nunca es simplemente conexa. De hecho, la teoría de espacios recubridores [Ma] dice que

$$\pi_1(M) = \Gamma,$$

y que $\pi_k(M) = 0, \forall k \geq 2$. Sin embargo, la teoría de modelos minimales también funciona para espacios con grupo fundamental nilpotente, tales como las nilvariedades.

Sea $M = G/\Gamma$ una nilvariedad, y sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . A tal álgebra de Lie se la llama nilpotente (si hacemos corchetes de Lie repetidamente, siempre acabamos obteniendo el 0). Esto nos permite elegir una base

$$\mathfrak{g} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{R}},$$

ordenada de tal forma que los corchetes verifiquen

$$[e_i, e_j] = \sum_{k>i,j} a_{ijk} e_k.$$

El modelo minimal de M tiene generadores

$$\begin{cases} V^1 = (\pi_1(M) \otimes \mathbb{R})^* = \mathfrak{g}^* = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle_{\mathbb{R}}, \\ V^k = 0, \forall k \geq 2. \end{cases}$$

Por tanto

$$\mathcal{A}_M = \bigwedge(\mathfrak{g}^*),$$

con diferencial dada por $de_k^* = \sum_{i,j<k} a_{ijk} e_i^* e_j^*$. La cohomología $H^*(M) = H^*(\bigwedge(\mathfrak{g}^*), d)$ se conoce, en teoría de álgebras de Lie, con el nombre de cohomología del álgebra de Lie \mathfrak{g} (y se suele denotar por $H^*(\mathfrak{g})$).

En la versión CRT-A aplicada a M , necesitamos un toro que actúe en M . En nuestro caso, esto se traduce por un subgrupo $H = \mathbb{R}^r \subset G$ tal que

$$T^r = \mathbb{R}^r / \mathbb{Z}^r = H / (\Gamma \cap H) \hookrightarrow G / \Gamma .$$

Para ello, H debe estar contenido en el centro del grupo G . Y si elegimos H maximal, $H = Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$.

A nivel de álgebras de Lie, el álgebra de Lie de H deberá ser el centro de \mathfrak{g} , e.d.

$$\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Nos queda nuestra última versión de la CRT:

CRT-F: Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente, con centro Z de dimensión $r = \dim Z$. Entonces

$$\dim H^*(\mathfrak{g}) \geq 2^r .$$

REFERENCIAS

- [BE] Buchsbaum D., Eisenbud, D. Algebra structures for finite free resolutions and some structure theorems for ideals of codimension 3, *American J. of Math.* 99 (1977), 447–485.
- [BT] Bott, R., Tu, L. W. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 82, Springer Verlag, 1982.
- [Ei] Eisenbud, D. *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150, Springer-Verlag, 1995.
- [GM] Griffiths, P. A., Morgan, J. W. *Rational homotopy theory and differential forms*. Progress in Mathematics, 16, Birkhäuser, 1981.
- [Ha] Halperin S. Le complexe de Koszul en algèbre et topologie, *Ann. Inst. Fourier* 37 (1987), 77–97.
- [Ma] Massey, W. S. *A basic course in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 127, Springer-Verlag, 1991.
- [Mc] McCleary, J. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58, 2nd Edition, Cambridge University, 2001.
- [Mu] Muñoz, V. Torus rational fibrations, *J. Pure and Applied Algebra* 140 (1999), 251–259.
- [Wa] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag, 1983

