# APROXIMACIÓ HEURÍSTICA, HISTÒRICA, DOCENT I PERSONAL AL TEOREMA FONAMENTAL DE L'ÀLGEBRA

JOSEP PLA I CARRERA*

RESUM. En aquest article considerem diverses perspectives sobre el teorema fonamental de l'àlgebra: s'analitza la seva rellevància heurística, es recorden les seves anticipacions en el segle XVII; es resumeixen les primeres demostracions (d'Alembert, Euler i Laplace) i les opinions crítiques de Gauss sobre les mateixes; es presenten els trets principals de les demostracions de Gauss (1797, 1815 i 1816); i, finalment, s'inclouen unes anotacions sobre la pròpia experiència docent i professional, en el benentès que pot resultar interessant de compartir-les encara que provinguin d'algú primordialment interessada per la història de les matemàtiques i per la lògica matemàtica.

ABSTRACT. In this paper a few perspectives on the fundamental theorem of algebra are considered: first, its heuristic relevance is analyzed; second, its historical advancements in the seventeenth century are reminded; third, the first proofs (d'Alembert, Euler and Laplace), and of Gauss' critical opinions on them, are summarized; fourth, the chief features of Gauss' proofs (1797, 1815 and 1816) are outlined; and finally, a record of my own experience in the course of my teaching and professional life is included, on the understanding that it may be interesting to share personal experiences as a learner and as a teacher of Mathematics, even if they spring from one focused mainly in the history of mathematics and in mathematical logic.

* Voldria agrair a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC, i a la Comissió Gauss, la invitació a participar en el cicle de conferències dedicades a la memòria de l'insigne matemàtic Carl Friedrich Gauss [†1855], en ocasió del cent cinquantè aniversari de la seva mort, permetent-me així aprofundir un tema que sempre m'ha agradat i interessat: el *teorema fonamental de l'àlgebra*.

## 1. Introducció. Consideracions heurístiques del TFA

El teorema fonamental de l'àlgebra [TFA] és un teorema que, considerat des del vessant històric,[1] epistemològic i heurístic,[2] i matemàtic,[3] té un interès innegable, que sempre ha despertat el meva admiració.[4]

En el context de l'àlgebra de polinomis anterior al 1572 només era possible establir:

**Teorema 1.1.** *Siguin $P(X)$ un polinomi real de grau $n$, és a dir,*

$$P(X) = a_n\, X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0, \tag{1.1}$$

*i*

$$a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0 = 0 \tag{1.2}$$

*l'equació polinòmica associada, on $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$.*

*Un nombre real $\alpha$ és una arrel de l'equació polinòmica* (1.2)*, és a dir,*

$$a_n\, \alpha^n + a_{n-1}\, \alpha^{n-1} + \cdots + a_1\, \alpha + a_0 = 0, \tag{1.3}$$

*si, i només si,*

$$P(X) = (X - \alpha)\big(b_{n-1}\, X^{n-1} + b_{n-2}\, X^{n-2} + \ldots + b_1\, X + b_0\big), \tag{1.4}$$

*on $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$.* ■

Aquest teorema és, d'alguna manera, una conseqüència immediata del que actualment anomenem la *regla de Ruffini*, una regla que ja era coneguda pels algebristes del segle XVI.[5] Estableix que, donats nombres reals $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, és fàcil generar polinomis que els tinguin com a

[1] D'entre els articles de caire històric —n'aniré citant al llarg de l'exposició— vull fer èmfasi, ja des d'ara mateix, de l'article genèric de Gino Loria [1862-1954] [Lor91].

[2] Una anàlisi heurística excel·lent l'ofereix Christian Gilain [Gil91].

[3] Actualment disposem del text [FR97], molt aconsellable tant per la claredat expositiva com per la multiplicitat d'aproximacions que fa del TFA.

[4] En ocasió de l'homenatge pòstum que la comunitat universitària catalana va dedicar al professor de la UAB i especialista en àlgebra, Pere Menal i Brufal [Lleida, 1951-Lleida, 4 d'abril de 1991], vaig fer una anàlisi dels aspectes històrics del TFA, abans de Carl Friedrich Gauss [Pla92].

[5] I, de fet, pels matemàtics de l'Islam i pels algebristes del Renaixement.

arrels i, recíprocament, tota arrel real $\alpha$ permet generar el polinomi a partir d'un polinomi un grau més baix.[6]

Tot això fa que l'única cosa que realment podien afirmar amb certesa era

**Teorema 1.2.** *Tota equació polinòmica real de grau $n$ té, com a molt, $n$ arrels reals.*

Tanmateix, amb l'aparició, el 1572, dels nombres complexos, a l'*Algebra* de Rafael Bombelli [1526-1573],[7] per poder garantir que les *fórmules de Tartaglia-Cardano* de la resolució de la cúbica són útils també quan la cúbica és *irreductible* —en el sentit que $\Delta < 0$—,[8] la situació canvia perquè queda eixamplat l'àmbit numèric on es poden buscar *possibles arrels* dels polinomis amb coeficients reals.

Si acceptem i entenem els nombres complexos, com féu Albert Girard [1595-1632], com a nombres —o ens numèrics— susceptibles de ser possibles arrels de polinomis amb els coeficients reals, aleshores hom es pot plantejar la generalització d'allò que s'esdevé en les equacions polinòmiques cúbiques i quàrtiques:

**Teorema 1.3.** *Tota equació polinòmica real de grau $n$ té, com a molt, $n$ arrels reals o complexes.*[9]

---

[6] Paradigmàticament, vegeu la *Géométrie* de René Descartes [1596-1650] [Des37, traducció catalana de 1999, pàgines 102–108]. No hi ha cap dubte que s'adonà de la validesa de la *regla dels signes* [Des37, traducció catalana de 1999, pàgina 103] tot observant que, a (1.4), si $\alpha > 0$, el nombre de *variacions de signe* dels coeficients $a_i, i = 0, \dots, n$, és, almenys, una unitat superior al nombre de *variacions de signe* dels coeficients $b_j, j = 0, \dots, n-1$. És, doncs, una conseqüència relativament immediata de la regla de Ruffini o, en tot cas, l'aplicació d'aquesta regla en palesa la validesa.

Tampoc no hi ha dubte que Albert Girard parteix d'aquest fet com a eina bàsica, tant per establir la validesa del TFA, com del que ell anomena *factions*, és a dir, les *funcions simètriques elementals* [Rem0b, pàgines 99–100], i [Pla92, pàgina 884].

[7] Vegeu [Bom92, pàgines 110, 169], o bé [Bom96, pàgines 133, 140–141].

[8] Vegeu [Pla92, pàgines 880–881].

[9] Vegeu [Gil91, pàgines 100, i 123, nota 23].

Amb el pas del temps, els matemàtics s'anirien familiaritzant amb els nombres complexos —sobretot després de les aportacions d'Isaac Newton [1642-1727] i Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716]— i s'adonarien, encara que no pas de forma immediata,[10] que cada arrel complexa d'una equació polinòmica real comporta l'existència de l'arrel conjugada.[11] Aquesta observació permetia d'establir el teorema de factorització següent —que, d'alguna manera, estén el de Ruffini:

**Teorema 1.4.**

(a) *Si* $\alpha$ *és una arrel real de l'equació polinòmica* (1.2), *aleshores* $(X-\alpha)$ *divideix el polinomi real* $P(X)$.

(b) *Si* $z$ *és una arrel complexa de l'equació polinòmica* (1.2), *aleshores l'expressió quadràtica real* $X^2 - 2Re(z)\,X + \big(Re(z)^2 + Im(z)^2\big)$ *divideix el polinomi real* $P(X)$.

*A més, en ambdós casos, el quocient* $Q(X)$ *és un polinomi real.*

Aquestes aproximacions no garanteixen, però, en absolut, que *totes* les arrels de l'equació polinòmica (1.2) hagin de ser necessàriament reals o complexes.[12]

**Pregunta 1** *Amb els nombres complexos s'exhaureix l'àmbit dels ens matemàtics numèrics necessaris per poder resoldre completament les equacions polinòmiques reals de grau arbitrari, com ara* (1.2)*, o bé calen encara d'altres ens nous, encara no ideats?*[13]

[10] Com recorda Carl B. Boyer, "Leibniz no fou capaç de demostrar la conjectura segons la qual, si $f(z)$ és un polinomi real, aleshores $f(x+iy) + f(x-iy)$ també és real" [Boy68, edició castellana de 1986, pàgina 510]. La conjectura de Leibniz es troba a [Ger50, VII, pàgina 550].

[11] Vegeu [d'A45, proposició 2], a [Gil91, pàgina 136].

[12] Tanmateix, això generalitzaria el que s'esdevé en les equacions polinòmiques cúbiques i quàrtiques reals i fora realment molt desitjable.

[13] L'article de Gilain analitza els textos dels qui, a començaments dels segle XVII, conjecturaven ja la validesa d'aquesta afirmació i els d'aquells que, en canvi, sostenien la necessitat d'ampliar els cossos numèrics a fi d'aconseguir totes les arrels.

Deixeu-me citar les paraules de Descartes: "Ni les arrels vertaderes, ni les falses, han de ser necessàriament reals. A vegades són imaginàries. És a dir, en cada equació podem "imaginar" tot el que acabem de dir. Però pot passar que no hi hagi cap "quantitat" que correspongui a les arrels que hom imagina" [Des37, edició catalana de 1990, pàgina 113]. Hi ha autors que argumenten que el nom d'"arrel

Al segle XVII, la resposta no és gens trivial —i molt menys si atenem la naturalesa d'"aquests híbrids que recorden els amfibis, a mig camí entre l'existència i la no-existència, i que anomenem arrels imaginàries".[14]

Els més agoserats —els pioners— enuncien sense embuts la validesa del teorema següent:

**Teorema 1.5.** **(Teorema de factorització lineal)** [TFL] *Tot polinomi real $P(X)$, com ara* (1.1)*, té $n$ arrels en un cert domini numèric.*[15]

Aleshores la pregunta és ben simple:

**Pregunta 2** *El domini numèric, on cal buscar les arrels de l'equació polinòmica* (1.2)*, és necessàriament el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos?*

La resposta afirmativa a aquesta pregunta és, de fet, com ja he dit, el *teorema fonamental de l'àlgebra* [TFA]. En canvi, acceptar que el domini numèric de factorització del polinomi (1.1) *existeix* és, com també ja he dit, el *teorema de factorització lineal* [TFL].

En aquest article evitaré d'estendre'm més en aquesta qüestió, tornant'hi, en tot cas, si ho crec oportú, o quan, en cada una de les demostracions concretes, sigui necessari.[16]

---

imaginària" prové de les paraules "qu'on peut toujours en imaginer" d'aquest text cartesià.

[14][Lei02, pàgina 357]: "Cal dir, en veritat, que la Naturalesa, mare de les diversitats universals, o millor dit encara l'Esperit diví, són molt gelosos de la varietat meravellosa per permetre que totes les coses puguin dependre d'un model únic. Per aquesta raó han inventat aquest expedient elegant i admirable, aquest miracle de l'anàlisi, un prodigi del món de les idees, aquests híbrids que recorden els amfibis, a mig camí entre l'existència i la no-existència, i que anomenem arrels imaginàries". Vegeu també la defensa que Leibniz fa de la necessitat d'usar els nombres complexos [Ger50, VII, pàgina 74].

[15]No ens ha de sorprendre aquesta actitud respecte de l'àmbit de les possibles arrels d'un polinomi real, si tenim en compte el recel amb què eren acceptats —i mal compresos— els nombres complexos. De fet, si se'ls podia acceptar, no hi havia, de fet, cap raó formal per no poder acceptar d'altres ens numèrics abstractes. En principi, l'*existència de la unitat imaginària $i$* només garanteix l'existència de solució de l'equació, molt particular, $X^2 + 1 = 0$ i, de retruc, d'arrels per a totes les equacions de segon grau.

[16]L'article de Gilain, tantes vegades esmentat, fa una anàlisi molt lúcida de l'evolució del teorema des dels inicis —prehistòria— fins a Gauss, posant de manifest

Un cop passada aquesta primera etapa, l'interès pel TFA reneix en el context del càlcul diferencial i integral tal com l'entenen i desenvolupen Gottfried W. Leibniz i Johann Bernoulli [1667-1748].[17]

Per a aquests dos autors la integral (indefinida) d'una funció $f(x)$ és una altra funció $F(x)$ que té, com a derivada, la funció $f(x)$. Amb símbols,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \text{ si, i només si, } F'(x) = f(x).$$

Amb aquesta concepció de les integrals, *integrar equival a trobar primitives*. La qüestió és simple quan la funció $f(x)$ és una funció polinòmica real, perquè aleshores la primitiva $F(x)$ és simplement una funció polinòmica real un grau superior, molt fàcilment determinable.

Ara bé, quan van intentar la determinació de primitives de les *funcions racionals* —és a dir, a les funcions de la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

on $f(x)$ i $g(x)$ són funcions polinòmiques reals—, es van adonar que, per poder-ho resoldre completament, calia conèixer la resposta a la

**Pregunta 3** *És possible descompondre la funció polinòmica real $g(x)$ en factors reals lineals o quadràtics?*[18]

La raó d'aquest fet és que les integrals

quins autors formulen el TFA i quins el TFL. Malgrat les reticències que hom pugui tenir sobre

(1) què és el que realment creien els autors respectius,
(2) què el que la prudència els obligava a escriure sobre si, realment, el domini final de resolució de les equacions polinòmiques reals era, de fet, $\mathbb{C}$, i
(3) fins a quin punt, en l'article, hi ha una projecció de resultats i distincions conceptuals aconseguits molt de temps després d'haver-se formulat les esmentades opinions,

l'estudi que Gilain ofereix és molt viu, actual, rigorós, documentat i seriós. I diria que és de lectura, sinó obligatòria, sí recomenable per a tots els que estiguin interessats en la qüestió.

En aquest aspecte, [Pla92] és molt més succint.

[17] Per a més detalls, vegeu [Gil91, pàgines 97–101], o [Pla92, pàgines 887–893].

[18] O bé, en factors lineals reals o complexos.

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} \text{ i } \int \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$$

tenen primitives ben conegudes i fàcils de calcular.[19]

Sorgia, doncs, la qüestió suara plantejada sobre la factorització lineal i/o quadràtica de les funcions polinòmiques.[20] Així el TFA es desplaçava al món de l'*anàlisi real*, en el benentès que n'esdevenia una eina auxiliar. Amb això no vull pas dir que el TFA esdevingui un teorema propi de l'anàlisi, en absolut. Només vull indicar que esdevé una eina algèbrica auxiliar prèvia i indispensable per poder resoldre un problema d'integració. Això no obstant, en submergir els polinomis en el món de les funcions reals de variable real, s'obria la porta a la consideració de demostracions del TFA analítiques, no algèbriques.[21]

Per això no ens ha d'estranyar, gens ni mica, que el primer intent de demostració del TFA aparegui en un article de Jean le Rond d'Alembert [1717-1783], titulat *Recherches sur le calcul integral* [1746]. L'altre impuls que posà de manifest la necessitat de disposar d'una demostració del TFA fou un resultat d'Euler de 1743 que fa referència, en la línia anterior, a la resolució completa —en el sentit d'integració— de les *equacions diferencials lineals amb coeficients constants*:

$$Ny^{(n)} + My^{(n-1)} + \cdots + Cy'' + By' + Ay = 0, \tag{1.5}$$

on $A, B, C, \ldots, M, N$, són nombres reals fixos.

D'acord amb el treball de Leonhard Euler [1707-1783],[22] tot rau a determinar les arrels reals o complexes, simples o múltiples, de l'equació

[19] Com sabem prou bé, són, en paraules de G. W. Leibniz i Jh. Bernoulli, funcions vinculades, respectivament, a la quadratura de la hipèrbola i a la del cercle i, en termes d'avui, logaritmes i arctangents. Aquest és, de fet, el contingut dels treballs [Lei02] i [Ber02].

[20] Inicialment, les opinions no són pas unànimes. Tot rau en el dubte plantejat per Leibniz sobre la impossibilitat de descompondre, en factors lineals o quadràtics, els polinomis $x^4 + a^4, x^8 + a^8$, etc. Vegeu, per exemple, [Gil91, pàgines 99–105], o [Pla92, pàgines 890–891].

[21] I encara més. Si considerem el problema submergit dins l'anàlisi complexa, quelcom força raonable atès que, de fet, cerquem arrels complexes, la porta encara s'obria molt més.

[22] Vegeu [Eul43].

polinòmica real

$$N x^n + M x^{n-1} + \cdots + C x^2 + B x + A = 0, \tag{1.6}$$

atès que la solució general de (1.5) és la suma de les solucions parcials $y = e^{\alpha x}$, on $\alpha$ és una arrel de (1.6). Tanmateix l'aspecte final d'aquesta suma, com a funció real, depèn del fet que l'arrel $\alpha$ sigui real (simple o múltiple) o complexa (simple o múltiple).

El resultat final depèn, doncs, en definitiva, de la validesa del TFA, un teorema que Euler defensà aferrissadament davant les opinions contràries a la seva validesa plantejades per Christian Goldbach [1690-1764] i Daniel Bernoulli [1700-1782].[23] Conscient, doncs, de la necessitat de disposar d'una demostració, n'ofereix una, en l'àmbit de l'àlgebra, l'any 1749, a "Recherches sur les racines imaginaires des equations".

Aquesta necessitat de disposar d'una demostració del TFA no passà desapercebuda a Pierre Simon Laplace [1749-1823] quan elaborà les *Leçons de mathématiques donnés a l'École Normal en 1795*, on n'ofereix una de caire purament algèbric.[24]

## 2. Els teoremes TFA i TFL en la llicenciatura de matemàtiques

És molt usual de trobar en els textos de les assignatures del primer curs dels estudis de matemàtiques l'enunciat del TFA en algun dels seus enunciats possibles que podem sintetitzar, en definitiva, dient:

**Teorema 2.1.** (**Teorema TFA1**) *El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos és algèbricament tancat,*[25]

o bé

[23]Vegeu, per exemple, [Kli72, edició castellana de 1992, II, pàgines 541-543, i 789-790].

[24]A [Pla92, pàgines 897–905], hi ha una discussió breu de les tres demostracions esmentades (d'Alembert, Euler i Laplace), que reproduirem al §3 per una qüestió de coherència argumental i metodològica.

[25]Això significa que tot polinomi $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ té almenys una arrel a $\mathbb{C}$ (i, de retruc, les hi té totes).

**Teorema 2.2.** (**Teorema TFA2**) *Tot polinomi real $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ té almenys una arrel a $\mathbb{C}$ (i, de retruc, les hi té totes).*[26]

Però, en canvi, és molt més rar trobar-hi la demostració corresponent.[27]

Esdevé, doncs, un teorema que, de moment, cal acceptar perquè la seva demostració és massa complicada per ser considerada en un text de nivell introductori. Però no pot deixar de sorprendre que en aquests textos, en els quals s'introdueix l'anell $K[X]$ de polinomis sobre un cos $K$ i se n'analitzen les propietats bàsiques corresponents, s'ometi la demostració d'un resultat d'aquesta naturalesa i importància.[28]

Per trobar una demostració del TFA —i no sempre— cal esperar a haver assolit un grau de coneixement matemàtic prou ampli —d'àlgebra o d'anàlisi— per tal de disposar de punts de vista —i alhora d'eines— més generals.

En canvi, a l'igual que havia succeït en la història que hem esbossat al §1, en l'estudi de la integració de les funcions reals de variable real —un concepte que s'introdueix al començament dels estudis de la llicenciatura—,[29] l'estudiant retroba el vell problema de G. W. Leibniz i Jh. Bernoulli consistent a integrar les funcions racionals

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx,$$

[26] De fet, TFA1 i TFA2 són dos enunciats equivalents. (1) Si $\mathbb{C}$ és algèbricament tancat val TFA2, atès que tot polinomi real és, al seu torn, un polinomi complex. (2) Suposem, doncs, que val TFA2 i que $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Aleshores $Q(X) = P(X)\,\overline{P}(X)$, on $\overline{P}(X)$ és el polinomi conjugat, és un polinomi real. Per tant, té una arrel $z \in \mathbb{C}$ (i alhora té, com arrel, el valor conjungat de $z$, $\overline{z}$). Per tant, $Q(z) = P(z)\,\overline{P}(z) = 0$. D'on en resulta que $P(z) = 0$, o que $\overline{P}(z) = P(\overline{z}) = 0$. És a dir, $P(X)$ té una arrel a $\mathbb{C}$, com volíem.

[27] Textos d'àlgebra elemental, molt detallats i complets, com ara [God63, edició castellana de 1967, pàgina 502], o [Que64, pàgines 415–416], l'esmenten, però no el demostren.

Tanmateix, val a dir que no sempre és així, com podem constatar, per exemple, a [TV68, pàgines 294–296], o a [LR64, edició castellana de 1967, pàgines 251–253], que ofereixen la demostració de Laplace.

[28] És el que succeix en textos d'introducció a l'àlgebra lineal i la geometria, com ara [Nom66, pàgina 126], o [CL88, pàgina 31], en què s'esmenta però no es demostra.

[29] Al primer o segon semestre d'anàlisi real, però, en tot cas, en el primer curs.

on $P(x)$ i $Q(x)$ són dos polinomis reals amb $\mathrm{gr}\big(P(X)\big) < \mathrm{gr}\big(Q(X)\big)$.[30]

Aleshores sabem que, d'acord amb TFA, les arrels de l'equació polinòmica $Q(X) = 0$ són reals (simples o múltiples) o complexes (simples o múltiples).[31]

Tot rau, doncs, a conèixer les integrals següents:

$$\begin{array}{lll}
(1) \displaystyle\int \frac{dx}{x-\alpha} & = & \ln(x-\alpha). \\
(2) \displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^r} & = & \dfrac{(x-\alpha)^{1-r}}{1-r}\ (r \neq 1). \\
(3) \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} & = & \dfrac{1}{\alpha}\arctan\dfrac{x}{\alpha}. \\
(4) \displaystyle\int \frac{dx}{\big(x^2+\alpha^2\big)^r} & = & \dfrac{1}{2(r-1)\alpha^2}\dfrac{x}{\big(x^2+\alpha^2\big)^{r-1}} + \\
 & & +\dfrac{2r-3}{(2r-2)\alpha^2}\displaystyle\int \frac{dx}{\big(x^2+\alpha^2\big)^{r-1}}.^{32}
\end{array}$$

Si el polinomi $Q(X)$ del denominador s'expressa en la forma

$$Q(X) = \big(x-\alpha_1\big)^{r_1}\cdots\big(x-\alpha_1\big)^{r_k}\big(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\big)^{s_1}\cdots\big(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell\big)^{s_\ell},$$

aleshores resulta que

[30] Sempre podem aconseguir-ho gràcies a l'algorisme de divisió de polinomis amb coeficients en un cos.

[31] Encara que és ben conegut de tots els que hem passat alguna vegada per aquesta qüestió, vull remarcar que el TFA garanteix l'existència teòrica d'aquestes arrels. Tanmateix, la determinació efectiva és una altra qüestió. En general, només és possible fer-ho quan el $\mathrm{gr}\big(Q(X)\big) \leq 4$. Els polinomis $Q(X)$, de grau $\geq 5$, només accepten una factorització efectiva en casos molt particulars, aquells en què estan preparats per poder ser descompostos. Però, fins i tot en aquests casos, l'efectivitat del mètode és una altra qüestió, com podem constatar en l'exemple de la nota 33.

[32] Vegeu, per exemple, [Spi64, edició castellana de 1970, II, pàgines 474–477].

$$
\begin{aligned}
\frac{P(X)}{Q(X)} \quad = \quad & \frac{a_{11}}{\big(x-\alpha_1\big)} + \cdots + \frac{a_{1r_1}}{\big(x-\alpha_1\big)^{r_1}} + \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& \frac{a_{\kappa 1}}{\big(x-\alpha_\kappa\big)} + \cdots + \frac{a_{\kappa r_\kappa}}{\big(x-\alpha_\kappa\big)^{r_\kappa}} + \\
& \frac{b_{11}x + c_{11}}{\big(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\big)} + \cdots + \frac{b_{1s_1}x + c_{1s_1}}{\big(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\big)^{s_1}} + \\
& \qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \frac{b_{\ell 1}x + c_{\ell 1}}{\big(x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell\big)} + \cdots + \frac{b_{\ell s_\ell}x + c_{\ell s_\ell}}{\big(x^2+\beta_1 x+\gamma_1\big)^{s_\ell}},
\end{aligned}
$$

on els coeficients $a_{11}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{\kappa 1}, \ldots, a_{\kappa r_\kappa}, b_{11}, \ldots, b_{1s_1}, b_{\ell 1}, \ldots, b_{\ell s_\ell}$, i $c_{11}, \ldots, c_{1s_1}, \ldots, c_{\ell 1}, \ldots, c_{\ell s_\ell}$ estan unívocament determinats pels coeficients dels polinomis $P(X)$, $Q(X)$, si $\mathrm{gr}\big(P(X)\big) < \mathrm{gr}\big(Q(X)\big)$.

La resta és només una adequació de la taula anterior de primitives, aplicada a cada un dels sumands.[33] Anàlogament, quan s'estudien les equacions diferencials ordinàries, hom topa —com ja va succeir a Euler— amb la necessitat de resoldre les *equacions diferencials lineals* amb coeficients reals constants. És a dir, equacions de la forma

$$A_n\, y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + A_1\, y' + A_0\, y = 0.$$

La resolució s'obté sumant funcions de quatre menes diferents:

$$
\begin{aligned}
y_j &= C\, e^{\alpha_j x}, \\
y_{j,k} &= \big(C_0^j + C_1^j\, x + \cdots + C_{k-1}^j\, x^{k-1}\big)\, e^{\alpha_j x}, \\
y_j^* &= \big(C_{1j}^*\, \cos\beta_j\, x + C_{2j}^*\, \sin\beta_j\, x\big)\, e^{\alpha_j x}, \\
y_{j,k}^* &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \big(C_{1\ell}^{*j}\, \cos\beta_j\, x + C_{2\ell}^{*j}\, \sin\beta_j\, x\big)\, x^\ell\, e^{\alpha_j x},
\end{aligned}
$$

[33] El procés concret, en cada cas, àdhuc quan és factible pràcticament, és laboriós (i es complica molt més encara si el polinomi $Q(X)$ no està factoritzat). Si el lector se'n vol convèncer, pot aplicar el procediment, per exemple, als polinomis:

$$
\begin{aligned}
&P(X) = 2X^7 + 8X^6 + 13X^5 + 20X^4 + 15X^3 + 16X^2 + 7X + 10 \\
&Q(X) = \big(X^2+2X+2\big)\big(X-1\big)^2\big(X^2+X+1\big)^2.
\end{aligned}
$$

segons que $\alpha_j$ sigui una arrel real simple o múltiple de multiplicitat $k$, o que $\alpha_j + i\,\beta_j$ sigui una arrel complexa simple o múltiple de multiplicitat $k$ de l'equació polinòmica real

$$A_n\,x^n + A_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + A_1\,x + A_0 = 0.$$ [34]

Així és com, en el currículum de l'ensenyament de matemàtiques, retrobem el procés històric seguit pel TFA, un procés que, d'alguna manera, va obligar d'Alembert i Euler a buscar-ne una demostració. D'altra banda, un cop endinsats en l'univers de l'àlgebra abstracta —i, en particular, en l'univers de l'àlgebra dels cossos i dels polinomis sobre cossos, amb tota la tècnica d'extensió algèbrica de cossos—, és molt possible que ens hàgim trobat amb la necessitat de *crear* el *cos de factorització* d'un polinomi irreductible amb coeficients en un cos $K$.

Aquesta qüestió —intuïda per Gauss en la segona demostració del TFA—[35] fou desenvolupada per Augustin-Louis Cauchy [1789-1857], l'any 1847, per construir el cos dels nombres complexos[36] i establerta de forma definitiva per Leopold Kronecker [1823-1891], el 1887.

**Teorema 2.3.** **(Teorema de Kronecker)**
*Sigui $K$ un cos i $P(X) \in K[X]$ un polinomi irreductible sobre $K$. Hi ha una extensió algèbrica finita $L$ de $K$ en la qual $P(X)$ té una arrel.*

*Si $\alpha \in K'$, on $K'$ és una extensió (finita) de $K$ i $P(X)$ és el polinomi mònic irreductible de $K[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$, aleshores es pot prendre $L \cong K(\alpha)$.*[37]

---

[34] De fet, la determinació de la solució de les equacions diferencials lineals amb coeficients constants $A_n\,y^{(n)} + A_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + A_1\,y' + A_0\,y = F(x)$ es resolen, com tota aplicació lineal, cercant una solució del nucli —que és la que depèn del TFA— i una solució particular $y_0$, com observà Euler a [Eul49].

[35] Vegeu [Bas60, pàgina 219], i [Sti78, pàgina 73].

[36] Considerem el polinomi $X^2 + 1$, irreductible a $\mathbb{R}[X]$, i el cos quocient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$, que consta dels romanents $a\,X + b$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, dotats de les operacions de sumar: $(a_1\,X + b_1) + (a_2\,X + b_2) = (a_1 + a_2)\,X + (b_1 + b_2)$, i de multiplicar: $(a_1\,X + b_1) \times (a_2\,X + b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,X + (b_1\,b_2 - a_1\,a_2)$. Aquestes relacions mostren que és un cos isomorf a $\mathbb{C}$.

Fixem-nos que la indeterminada $X$ és el polinomi que, en el cos quocient, anul·la $X^2 + 1$. Per tant, és el que normalment indiquem amb la lletra $i$, d'acord amb la nomenclatura usada per Euler a partir de 1777.

[37] Vegeu [Kro91, pàgines 215–217].

**Demostració.**[38] Considerem l'ideal

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}\big(P(X)\big) = \big\{F(X)\,P(X) : F(X) \in K[X]\big\}.$$

La irreductibilitat de $P(X)$ sobre $K$ implica que l'ideal $\mathcal{I}$ és maximal en l'anell $K[X]$. De retruc, l'anell quocient $K[X]/\mathcal{I}$ és un cos.[39] Atès que $K \subseteq K[X]$, $L$ conté una imatge isomòrfica de $K$. La classe $\overline{X}$ del polinomi $X$, satisfà $\overline{P(X)} = P(\overline{X}) = \overline{0}$.[40] Per a la segona part, considereu l'homomorfisme $K[X] \to K'$ tal que $f \mapsto f(\alpha)$, el qual té imatge $K[\alpha]$ i nucli l'ideal de múltiples de $P$. ■

Com a corol·lari, existeix el cos de factorització lineal de $P(X)$. Només cal repetir el teorema anterior un nombre finit de vegades, com a molt tantes com el grau de $P(X)$.

D'aquesta manera se'ns planteja la qüestió que hem intentat de precisar al §1. Volíem establir el TFA i hem demostrat el TFL. La qüestió és, doncs, com ja hem indicat:

**Pregunta 4** *Si $K = \mathbb{R}$, podem afirmar que $L$ és un subcos de $\mathbb{C}$?*

La resposta no és immediata. Sorgeix, doncs, el problema de saber si ambdues qüestions es poden lligar. En qualsevol cas, cal plantejar-se, sense més embuts:

---

[38] Hi ha una demostració alternativa —formalment és la mateixa, però epistemològicament, no ho és— que consisteix a agafar una arrel *formal* $\alpha$ del polinomi $P(X)$. És a dir, un objecte formal que $a_n\,\alpha^n + a_{n-1}\,\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\,\alpha + a_0 = 0$, amb $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. [De fet, què és $i$, sinò un objecte formal que anul·la $X^2 + 1 = 0$? Vegeu la nota 36.] Aleshores definim

$$L = \big\{f_0 + f_1\,\alpha + \cdots + f_{n-2}\,\alpha^{n-2} + f_{n-1}\,\alpha^{n-1} : f_0, \ldots, f_{n-1} \in K\big\}.$$

Resulta que $L$ és un cos, $L \supseteq K$, i $\alpha \in L$. Per tant, és una extensió finita de $K$.

M'agrada molt poder comparar el caràcter epistemològic d'aquestes dues demostracions. En la del text, l'element $\alpha$ és la classe del polinomi $X$ i la construcció és conjuntista. La d'aquesta nota és una construcció de caràcetre *creatiu*: l'arrel $\alpha$ és un objecte formal nou que s'incorpora al llenguatge simbòlic.

[39] L'existència d'invers és una conseqüència immediata de l'algorisme d'Euclides en l'anell $K[X]$ i de la identitat de Bézout: si $F(X) \notin \mathcal{I}$, $\big\langle F(X), P(X)\big\rangle = 1$. Existeixen, doncs, polinomis $H_1(X), H_2(X)$ tals que $1 = H_1(X)\,P(X) + H_2(X)\,F(X)$. Passem aquesta igualtat al quocient, i obtenim que $\overline{H_1}(X)\,\overline{F}(X) = \overline{1}$.

[40] L'afirmació $P(\overline{X}) = \overline{0}$ és certa per definició i pel fet que, si $k \in K, \overline{k} = k$.

**Pregunta 5 (de tipus metodològic)** *Tan difícil és demostrar el* TFA*?*

La resposta la trobarem precisament en l'anàlisi històrica de les primeres demostracions del TFA, al §3, i de les de Gauss, al §5. Abans d'endinsar-nos'hi, però, vull acabar aquesta reflexió de caire docent, parlant una mica del paper del teorema TFA —i de les seves demostracions— en el currículum de l'ensenyament de la matemàtica a les nostres facultats, en general, i a la Facultat de Matemàtica i Estadística de la UPC, en particular. És molt probable que, tots nosaltres, una de les demostracions del TFA l'hàgim vist al si de l'*anàlisi complexa*, com un corol·lari, força elemental, del *teorema de Liouville*:[41]

**Teorema 2.4.** $\big($**Teorema de Liouville**$\big)$ *Les funcions enteres,*[42] *fitades, són constants.*[43]

Aleshores tenim:

**Corol·lary 2.5.** $\big($**Teorema fonamental de l'àlgebra**$\big)$ *Sigui*

$$P(X) = a_n\,X^n + a_{n-1}\,X^{n-1} + \cdots + a_1\,X + a_0 \in \mathbb{R}[X], \ \ amb\ n > 1.$$

---

[41]Aquest teorema, de fet, és degut a Cauchy, que podem trobar a [Cau44]. Tanmateix Karl Wilhelm Borchardt [1817-1880] —que havia succeït a August Leopold Crelle [1780-1855] com a redactor en cap de la cèlebre revista—, en tingué coneixement gràcies a una dissertació de Joseph Liouville [1809-1882] de 1847, i li atribuí. Aquesta atribució errònia —com tantes d'altres— ha passat a la història de la matemàtica.

Vull recordar les paraules, iròniques naturalment, del meu professor Francesc d'Assís Sales [1914-2005]: "Quan un teorema porta nom d'autor, de l'única cosa que podem estar segurs és que no és d'aquell autor".

[42]És a dir, definides i derivables a tot $\mathbb{C}$.

[43]Per fer més comprensible l'abast d'aquest teorema als lectors que encara no estan avesats a l'anàlisi complexa, analitzem la situació següent. Quan $\alpha \in \mathbb{R}$, la funció $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2}$ està fitada entre $-1$ i $+1$. Ara bé, si l'estenem al camp complex $\mathbb{C}$, amb valors $z$, com ara $z = i\,\alpha$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$, obtenim $\sin i\alpha = \frac{e^{-\alpha}-e^{\alpha}}{2}$. Doncs bé, quan $\alpha$ recorre $\mathbb{R}$, $\sin i\alpha$ varia —no és un valor constant. Això ens assegura, d'acord amb el teorema de Liouville, que $\sin z$, amb $z \in \mathbb{C}$, no està fitada. A tots ells els recomano l'aproximació que fa Michel Spivak a [Spi64, edició castellana, pàgines 694–701], un cop ha desenvolupat l'anàlisi real bàsica, a algunes idees de l'anàlisi de variable complexa. És una reflexió breu i lúcida de les peculiaritats de l'anàlisi complexa en comparació amb els resultats de l'anàlisi real. També podeu consultar [Pla06, pàgines 212–213, i 419–420].

*Aleshores existeix un $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.*

**Demostració**. Si $P(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ està definida a tot $\mathbb{C}$. A més, està fitada a tot $\mathbb{C}$.[44] En definitiva, doncs, $f(z)$ és entera. En conseqüència, pel teorema de Liouville, és constant. Però si $n \geq 1$, $f(z)$ no és constant. Contradicció!

Hi ha d'haver, doncs, un $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$, com volíem. ■

També pot ser que, un cop assolida una part important d'aquesta teoria —tan elegant i apassionant— que és la teoria de Galois, hàgim vist una segona demostració, també força elemental, un cop establert o acceptat el teorema primer de Sylow.[45]

**Teorema 2.6.** $\big($**Teorema primer de Sylow**$\big)$ *Sigui $G$ un grup d'ordre $|G| = 2^m\, k$, amb $k$ senar. Aleshores $G$ té un subgrup $H$ d'ordre $2^m$.*[46]

Aleshores tenim:

**Corol·lary 2.7.** $\big($**Teorema fonamental de l'àlgebra**$\big)$ *Tot polinomi $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ té una arrel complexa.*

**Demostració**.[47] D'acord amb el punt (2) de la nota 26, podem suposar que $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. A més, sense perdre generalitat, podem suposar que és irreductible i que $\mathrm{gr}\big(P(X)\big) = 2^m\, k$. Sigui $L \supseteq \mathbb{R}$ un cos de factorització del polinomi $P(X)$. Atès que $\mathbb{R}$ té característica zero, $L$ és una extensió de Galois sobre $\mathbb{R}$. Sigui $G$ el grup de Galois. Tenim que $|G| = 2^m\, k$, amb $k$ senar. Pel teorema 2.6, $G$ té un subgrup $H$ d'ordre $2^m$.

Sigui $L^H$ el cos intermedi que li correspon d'acord amb la correspondència de Galois. Aleshores $\big[L^H : \mathbb{R}\big] = [G : H] = k$. Però $\mathbb{R}$ no té

[44]Tenim els ítems: (1) $\big|P(z)\big|$ es fa gran, quan $|z|$ es fa gran, i (2) Atès que és contínua, $f(z)$ està fitada en tot compacte.

[45]En honor de Ludwing Sylow [1832-1918].

[46]Vegeu, per exemple, [Cla71, edició castellana de 1974, pàgina 65].

És possible evitar l'ús del teorema de Sylow, usant la demostració de Laplace, repensada per Gauss. Vegeu els paràgrafs §§3.3, 5.2, 6.1.2, i [Wae31, edició anglesa de 1949, pàgina 227].

[47]Aquesta demostració es basa en les de [Lan72, edició castellana de 1971, pàgines 240–241], i [Cox04, pàgines 218–219].

extensions de grau senar $> 1$.[48] Per tant, $k = 1$ i $G$ és un 2-grup. És a dir, $|G| = 2^m$. Aleshores, tenim la cadena:

$$\{e\} = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_1 \subset G_0 = G,$$

on, per a $1 \leq i \leq n$, $\big[G_i : G_{i-1}\big] = 2$ i, per tant, $G_i$ és normal en $G_{i-1}$.[49] Li correspon la cadena:

$$\mathbb{R} = L^{G_0} \subset L^{G_1} \subset L^{G_2} \cdots \subset L^{G_{i-1}} \subset L^{G_i} \subset \cdots \subset L^{G_{n-1}} \subset L,$$

en la qual, per a cada $i$, $L^{G_{i-1}} \subset L^{G_i}$ té grau 2.

Atès que $m \geq 1$, tenim una extensió de grau 2, $L^{G_1} \supset \mathbb{R}$. És fàcil establir que $L^{G_1} \simeq \mathbb{C}$.[50] Aleshores tenim una extensió $L^{G_2}$ de grau dos sobre $\mathbb{C}$. Impossible.[51]

Per tant $m = 1$. En conseqüència, $|G| = 2$, i $L = L^{G_1} \simeq \mathbb{C}$. Per tant, $P(X)$ factoritza completament sobre $\mathbb{C}$, com volíem. ■

Potser el que més sorprèn és l'allunyament que hi ha entre el teorema fonamental de l'àlgebra —que sembla propi de l'àlgebra clàssica dels polinomis— i aquestes dues demostracions, molt més elaborades, i basades en resultats obtinguts en ple segle XIX.

I un fet molt més curiós —i que a alguns els pot resultar sorprenent i inexplicable— és que cap d'aquestes demostracions coincideix amb les demostracions que inicialment van pensar d'Alembert [1746], Euler [1748], i Laplace [1795], al segle XVIII, ni tampoc en cap de les que donà Gauss [1797, 1815, 1816], a començaments del segle XIX.

Tornem, doncs, a la història per veure quin va ser l'enunciat del teorema i quines les dificultats que van plantejar les demostracions corresponents.

---

[48] Tot polinomi real de grau senar té, almenys, una arrel real. Aquest teorema fou demostrat, l'any 1817, per Bernhard Bolzano [1781-1848].

[49] Vegeu [Cla71, edició castellana de 1974, pàgina 61].

[50] Hi ha un polinomi de grau dos, que és de la forma $(X + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$, i és irreductible sobre $\mathbb{R}$.

[51] El cos $\mathbb{C}$ no té extensions de grau dos.

## 3. Les demostracions de D'Alembert, Euler, i Laplace

És del tot conegut que, abans que Gauss fes la demostració de 1799, d'altres matemàtics l'havien precedit en l'intent. Per raons de coherència argumental —que, en història de la matemàtica, és important de mantenir— en faré un resum sintètic i breu,[52] posant de relleu solament els ítems en els quals descansa cada una de les demostracions, sense estendre'm excessivament en els detalls.

3.1. **L'intent de d'Alembert [1746].** L'any 1746, a les *Mémoirs de Berlin*, Jean-le-Rond d'Alembert publica l'article “Recherches sur le calcul integral”. La primera part està dedicada a la integració de les funcions racionals i per tant, com ja hem indicat, li cal el TFA.[53]

L'enuncia en els termes següents:

> Proposició II. *Sigui un multinomi arbitrari*
>
> $$x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + \cdots + f\,x + g, \tag{3.7}$$
>
> *per al qual no hi hagi cap valor real que, substituït al lloc de les $x$, l'anul·li.*
> *Afirmo que, en tot cas, hi haurà una quantitat $p+q\sqrt{-1}$* [imaginària] *que, substituïda en el lloc de la $x$, farà el multinomi igual a zero.*[54]

Un cop l'ha demostrat, estableix que tindrà també l'arrel $p - q\sqrt{-1}$ i, en conseqüència, “el multinomi serà divisible per factors com ara $xx + hx + i, xx + \ell x + m$, etc., amb els coeficients reals".[55]

A més —i això és important, com veurem més endavant— s'adona del caràcter de *teorema d'existència* de la seva demostració, quan diu:

> Cal observar que, en les demostracions precedents, en cap moment s'ha suposat que, abans de reduir-la a $p+q\sqrt{-1}$, l'arrel imaginària del

[52]A [Pla92] hi podeu trobar una presentació més detallada, malgrat que la síntesi que faig ara és, potser, més curosa, perquè és fruit d'una segona reflexió.

[53]Hi ha múltiples treballs on s'analitza acuradament la demostració de d'Alembert: [Pet70, Pet74], [Hou89], [Gil91].

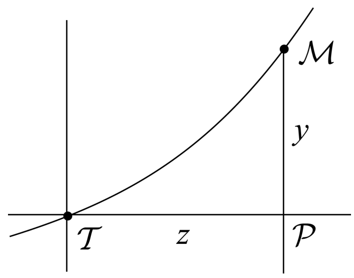
El text [Sti78, pàgines 197–200], conté una presentació basada en la demostració, més acurada, de Jean-Robert Argand [1768-1822], de 1806. Vegeu [Arg06].

[54]Vegeu [d'A46, pàgina 189]. Per a d'Alembert els coeficients $a, b, \ldots, f, g$, són nombres reals.

[55]Vegeu [d'A46, pàgines 190–191]. Vegeu també [d'A45, pàgina 136].

> multinomi tingués o pogués tenir una expressió imaginària. D'aquí la generalitat del mètode.[56]

Però el que interessa és el camí seguit en la demostració.




> PROPOSICIÓ I. *Sigui* $\mathcal{TM}$ *una corba arbitrària de coordenades* $\mathcal{TP} = z$, $\mathcal{PM} = y$, *i que* $y = 0$ *o* $y = \infty$ *quan* $z = 0$. *Si hom pren z positiu o negatiu, però infinitament petit, el valor de y en z podrà expressar-se, en tot cas, per una quantitat real, quan z sigui positiu, i per una de real o del tipus* $p + q\sqrt{-1}$, *amb p i q reals, quan z sigui negatiu.*[57]

La raó d'aquesta afirmació és que, segons d'Alembert, quan $z$ és prou petit, podem posar $y$ en funció de $z$ per mitjà de la sèrie *molt* convergent

$$y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{u}{t}} + \cdots,$$

on els exponents de $z$ (fraccionaris) formen una successió decreixent.[58]

[56]Vegeu [d'A46, pàgina 191]. Això no obstant, com veurem a la nota 60, no significa que no pressuposi una existència prèvia d'alguna mena.

[57]Vegeu [d'A46, pàgines 183]. De fet, $z$ és real i això implica la naturalesa de $y$ en un entorn petit de l'origen, en el benentès que la corba introduïda per d'Alembert estigui definida.

[58]Vegeu [d'A46, pàgines 183]. Òbviament, d'Alembert no precisa el significat de l'adjectiu "molt" de l'expressió "molt convergent".

El teorema usat per d'Alembert seria demostrat per Victor Alexandre Puiseux [1820-1883], l'any 1860, i es coneix amb el nom de *teorema de Puiseux* [Pui50]. Vegeu, per exemple, [Cas00, pàgines 22–25]. Un cop acceptada aquesta possibilitat de posar $y$ en sèrie de potències de $z$, amb exponents fraccionaris, l'afirmació continguda a la proposició I —en el cas dels multinomis— és simple. Atès que el denominadors dels exponents poden ser parells, tot depèn del signe de $z$.

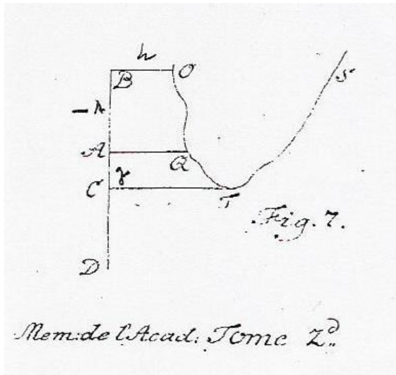
**Demostració de la proposició II**. En el multinomi (3.7) considera $g = z$, variable.

Això li permet d'afirmar que, per a un valor convenient $z_0$ de $g$,[59] el polinomi

$$x^m + a\,x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + f\,x + z_0$$

té almenys una arrel real $x_0$.

Aleshores raona d'acord amb els ítems següents:




(1) Existeix una corba $G(z, x) = 0$ amb $G(z_0, x_0) = 0$.[60]
(2) D'acord amb la Proposició I, a cada valor de $z$ (en el lloc de $g$), li correspon un valor $x$ real o imaginari. És a dir, $x = \varphi(z)$.
(3) El fet que ha justificat per a valors pròxims a $\langle z_0, x_0\rangle$ es pot estendre a intervals finits.[61]
(4) Però li cal arribar al valor $g$.[62] Suposa que hi ha un darrer valor real $\alpha$ de les $z$ per al qual $x$ es pot posar en la forma $x = p + q\sqrt{-1}$, amb $p, q \in \mathbb{R}$. El substitueix en l'equació polinòmica *inicial* i separa les parts real i imaginària. En resulta que $p$ i $q$ estan lligats per equacions algèbriques a les quals, per extensió,[63] aplica (1).

    Disminuint lleugerament $\alpha$, $p$ i $q$ seguiran sent reals, o bé de la forma $p = u + iv$, $q = s + it$, amb $s, t, u, v$ reals. D'on,

$$x = p + q\sqrt{-1} = (u - t) + (v + s)\sqrt{-1} = M + N\sqrt{-1},$$

amb $M, N \in \mathbb{R}$. Per tant, $\alpha$ no fora el valor mínim al qual

[59] A la figura adjunta —que és la de l'original de d'Alembert— està representat per $-A$ o $\mathcal{AB}$.

[60] Cal suposar que s'obté una corba —és a dir, cal suposar que, a cada valor de $z$, li correspon un $x$ que $G(z, x) = 0$, encara que no en coneguem la naturalesa.

Aleshores, amb un trasllat d'eixos, fa que el punt $\langle z_0, x_0\rangle$ sigui l'origen de coordenades, quelcom que no altera la naturalesa real o complexa de les $x$.

[61] Com ara $\mathcal{AD}$.

[62] A la figura adjunta està representat per $\mathcal{AC}$.

[63] Aplica un resultat que ha assumit vàlid —sense provar-lo— a un entorn de l'origen a d'altres punts, diferents de l'origen.

correspon un valor $x$ de la forma $p + q\sqrt{-1}$. És a dir, no hi ha valor mínim i s'arriba a $g$.

Aquest raonament estableix l'existència d'una arrel complexa del multinomi (3.7).[64] ■

3.2. **L'intent d'Euler [1749].** Aquesta demostració la trobem a l'article "Recherches sur les racines imaginaires des équations".[65] La idea és ben diferent de la de d'Alembert i, aparentment, sembla més simple.

Tot rau, de fet, a descompondre un polinomi mònic $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, de grau $2m = 2^n \geq 4$,[66] en el producte de dos polinomis $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, de grau $m = 2^{n-1}$. Repetint el procés, s'arriba a una descomposició en polinomis de grau 2.

D'entrada, com era ben conegut a l'època,[67] Euler considera que $P(X)$ és de la forma:

$$P(X) = X^{2m} + B\,X^{2m-2} + C\,X^{2m-3} + \cdots .$$

Aleshores, els polinomis $P_1(X)$ i $P_2(X)$ són de la forma

$$\begin{aligned} &X^m + u\,X^{m-1} + \alpha\,X^{m-2} + \beta\,X^{m-3} + \cdots ,\\ &X^m - u\,X^{m-1} + \lambda\,X^{m-2} + \mu\,X^{m-3} + \cdots . \end{aligned}$$

Ara multipliquem i resolem pel *mètode dels coeficients indeterminats*.[68]

Aleshores, segons Euler, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ són *funcions racionals* dels coeficients $A, B, C, \ldots,$ del polinomi. Eliminant aleshores $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots,$ s'obté un polinomi mònic real en $u$ de grau $\binom{2m}{m}$, *el*

---

[64] Per a l'adaptació d'Argand —que és anàloga a la de Cauchy—, vegeu §6.2.

[65] Per a una anàlisi molt acurada d'aquest text, vegeu [Bas60].

[66] Tot polinomi $\neq 0$, multiplicat per un $X^d$ convenient, esdevé d'aquesta forma.

[67] Sempre és possible, per mitjà de l'"expurgació", com l'anomenava François Viète [1540-1603] a [Viè91, traducció anglesa de 1983, pàgina 243] —és a dir, la translació de la incògnita $X \mapsto X - \frac{1}{2m}A$—, eliminar el terme de grau $2m - 1$. Vegeu també, per exemple, [Car45, edició anglesa de 1968, capítol 17].

[68] Aquest mètode havia estat introduït alhora per Descartes i Fermat que l'havien usat en moltes ocasions, com podem veure a [Des37, edició catalana de 2000, pàgines LIX, LX, 77, 79, 81, 127-128, 138].

*terme independent del qual és negatiu*, que és el fet bàsic de tota l'argumentació ulterior. Per tant, el polinomi en $u$ que s'obté té una arrel real $u_0$, que és el que necessita.

Euler, però, solament ofereix la demostració completa en el cas en què el grau és 4.[69]

El cas general solament l'esbossa, deixant la major part dels detalls al tinter.[70] S'adona que, atès que la suma de *totes* les arrels és zero, el valor de $u$ s'obté sumant-ne la meitat. Això fa que el polinomi de $u$ sigui de la forma

$$\left(u^2 - x_1^2\right)\left(u^2 - x_2^2\right)\cdots\left(u^2 - x_m^2\right)$$

. D'ací se'n segueix que el terme independent és necessàriament negatiu, sempre que sigui real, quelcom que Euler suposa sense més comentaris ni demostracions.[71]

3.3. **L'intent de Laplace [1795].** Com ja hem indicat abans, Laplace ofereix la seva demostració a les *Leçons de mathématiques donnés a l'École Normal el 1795*.[72] Estableix:

**Teorema**. *Tot polinomi real*

$$P(X) = X^n - b_1\,X^{n-1} + b_2\,X^{n-2} + \cdots + (-1)^n\,b_n,$$

[69]Aquest cas ja havia estat convenientment aclarit per Descartes a [Des37, edició catalana de 2000, pàgines 117-120]: Si fem

$$X^4 + BX^2 + CX + D = \left(X^2 + uX + \alpha\right)\left(X^2 - uX + \lambda\right),$$

aleshores $B = \alpha + \lambda - u^2, C = (\lambda - \alpha)u, D = \alpha\,\lambda$. D'on: $\alpha + \lambda = B + u^2, \lambda - \alpha = \frac{C}{u}$. En resulta que $2\lambda = u^2 + B + \frac{C}{u},\ \ 2\alpha = u^2 + B - \frac{C}{u}$. I, atès que $4\,\alpha\,\lambda = 4\,D$, en resulta la cúbica quadràtica $u^6 + 2\,B\,u^4 + \left(B^2 - 4D\right)u^2 - C^2 = 0$, on clarament el terme independent, $-C^2$, és negatiu. Descartes, però, no comenta aquest fet bàsic.

[70]Vegeu [Eul49, pàgines 105-106].

[71]Vegeu [Bas60, pàgina 213]. Per tal de justificar les afirmacions d'Euler, cal recórrer al *teorema fonamental de les funcions simètriques*.

[72]Vegeu, per exemple, [Rem0b, pàgines 120–122], o [Pla92, pàgines 903–905].

*de grau $n = 2^k q$, $k \geq 1$ i $q$ senar,*[73] *factoritza en factors quadràtics reals.*[74]

**Ítems bàsics de la demostració**. Suposa que les arrels $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *existeixen*. Per tant, $P(X) = \big(X - \zeta_1\big)\big(X - \zeta_2\big) \cdots \big(X - \zeta_n\big)$.

Aleshores, per a cada $t \in \mathbb{R}$, considera el polinomi

$$L_t(X) = \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq n} \Big(X - \big(\zeta_\mu + \zeta_\nu + t\, \zeta_\mu \zeta_\nu\big)\Big).$$[75]

En resulta que:

(1) $L_t(X) \in \mathbb{R}[X]$, en virtut del teorema fonamental de les funcions simètriques.
(2) $\mathrm{gr}\big(L_t(X)\big) = \frac{1}{2}\, n\,(n-1) = 2^{k-1}\, q\,\big(2^k\, q - 1\big) = 2^{k-1}\, q', q'$ senar.

Això li permet procedir per inducció sobre $k$. Per tant, per a cada $t \in \mathbb{R}$, $L_t(X)$ té un zero a $\mathbb{C}$. Aleshores, en resulta que, per a dos índexos $\mu, \nu$, diferents, $u = \zeta_\mu + \zeta_\nu$ i $v = \zeta_\mu\, \zeta_\nu$ són, ambdós, complexos.[76] Per tant, són arrels del polinomi quadràtic $X^2 - u\,X + v \in \mathbb{C}[X]$ que, òbviament, divideix el polinomi inicial. Finalment en resulta que $\zeta_\mu, \zeta_\nu \in \mathbb{C}$.[77] ■

Aquesta demostració —aparentment absolutament algèbrica— precisa del teorema de Bolzano, totalment indispensable per demostrar el TFA.[78]

---

[73]Si el polinomi és de grau senar, aleshores té una arrel real, que podem suprimir usant la llei de Ruffini.

[74]Vegeu [Lap95, edició de Dhombres, pàgines 79–80]. La presentació que en donem és lleugerament diferent, perquè, per a Laplace, si factoritza amb polinomis reals de quart grau, ja n'hi ha prou.

[75]Aquí és on, d'alguna manera, aquesta demostració lliga amb la nota 46.

[76]Vegeu la secció §6.1.2.

[77]Revisarem aquesta demostració en considerar la segona demostració de Gauss [1815] al paràgraf §5.2. L'anàlisi comparativa d'ambdues demostracions és d'allò més fructífer per entendre tot el que hem intentat d'exposar a la introducció.

[78]Tanmateix, com ja hem indicat, no fou fins l'any 1817 que Bernhard Bolzano n'establí una demostració. Vegeu [Bol17, pàgines 42–48].

Malgrat tot, la demostració de Bolzano tampoc era completa del tot, perquè requeria de la *completesa* de $\mathbb{R}$, i la completesa de $\mathbb{R}$ no quedà totalment establerta fins que Karl Weierstrass [1815-1897], Charles Méray [1835-1911], Richard Dedekind [1831-1916], Eduard Heine [1821-1881], i Georg Cantor [1845-1918] aconseguiren,

## 4. Observacions de Gauss a les demostracions anteriors

El matemàtic alemany Carl Friedrich Gauss [1777-1855], en la seva demostració paradigmàtica de 1797, analitza els treballs de d'Alembert i d'Euler i posa de relleu les mancances que hi troba per tal d'oferir, tot seguit, la demostració —pretesament rigorosa— que, en la majoria de textos d'història de la matemàtica, és considerada la primera demostració del TFA mancada de defectes i/o llacunes argumentatives,[79] com el mateix Gauss afirmarà, anys més tard, a la quarta de les seves demostracions del TFA:

> La memòria apareguda en 1799, "Demostratio [...]", tenia una finalitat doble. D'entrada volia mostrar que totes les demostracions que s'havien intentat fins aleshores del teorema més important de la teoria de les equacions, eren demostracions il·lusòries i insuficients, i després donar una prova nova i perfectament rigorosa.[80]

4.1. **Observacions crítiques a la demostració de d'Alembert.** Esmentem les més notables i el seu abast:

1. No consisteix, de fet, en un teorema d'existència de la solució perquè aquesta —l'existència— es pressuposa. L'única cosa que es demostra és la forma de la solució.
2. L'ús de consideracions geomètriques, alienes a la naturalesa del problema.
3. La suposició que l'enunciat de la proposició I [actualment, teorema de Puiseux] "és vàlid per a tota corba".
4. L'ús de la sèrie que en deriva, sense atendre'n la convergència.
5. El fet que la fita $\alpha$ de les $z$ per a les quals les $y$ són de la forma $p + q\sqrt{-1}$ hagi de tenir necessàriament la mateixa propietat, quelcom que pressuposa, a més, que és finita.

independentment, el 1863 [publicat en 1872, per E. Kossak], 1869, 1872, 1872, i 1872, respectivament, una construcció del cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals. Òbviament, David Hilbert [1689-1943] recollí aquesta característica bàsica del cos $\mathbb{R}$ en l'axiomàtica dels reals de 1900, a [Hil00].

[79] Vegeu tanmateix l'anàlisi de Bartel Leenert van der Waerden a [Wae85, pàgina 95], i la de Christian Gilain a [Gil91, pàgines 118–121].

[80] Vegeu [Gau50, pàgina 73].

La primera és, de fet, parcialment discutible, com hem vist a la nota 60, i d'Alembert hi respon per endavant. La segona és molt més sorprenent, si tenim en compte que la demostració de Gauss de 1797 es basa en intuïcions geomètriques.[81] La tercera és molt seriosa i Gauss l'acompanya d'un contraexemple: $y = e^{\frac{\ell}{z}}$.[82] La darrera objecció, no ho és —i així ho indica Gauss— quan la corba és algèbrica, però, afegeix, "malgrat tot cal demostrar-ho".[83]

4.2. **Observacions crítiques a la demostració de d'Euler.** Les observacions crítiques a la demostració —força parcial— d'Euler provenen de dos autors. D'una banda, de Joseph-Louis Lagrange [1736-1813] i, d'una altra, de Gauss.

L'observació crítica més important de Lagrange rau en el convenciment d'Euler, mai no demostrat, que els coeficients de l'equació en $u$, obtinguda un cop eliminats els coeficients auxiliars $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, estan definits i no són, en cap cas, indeterminats del tipus $\frac{0}{0}$. Lagrange, tanmateix, amb la *tècnica* —que ell inaugura— *de la permutació de les arrels de l'equació*, aconsegueix de resoldre aquesta mancança d'Euler.

Però el que Lagrange no resol és el punt bàsic de l'observació de Gauss:

> En matemàtiques és del tot impossible operar, amb la precisió necessària, amb quantitats de les quals no en tenim una idea clara,[84] quelcom que fa Euler quan suposa que la suma de les arrels de l'equació

---

[81] B. L. var der Waerden és clar [Wae85, pàgina 97]: "D'aquesta exposició en podem confegir que la primera demostració de Gauss es basa en suposicions relatives a les branques de les corbes algèbriques que, a la nostra intuïció geomètrica, els semblen molt plausibles, però que Gauss no demostra en cap moment". Les llacunes deixades per Gauss foren provades per Alexander Ostrowski [1893-1986] en l'article [Ost20], un article realment molt interessant i aclaridor.

[82] La sèrie de Puiseux val per a corbes algèbriques, com observa [Hou89, pàgines 356–357], i, curiosament, això és suficient per a la demostració de d'Alembert.

[83] Es basa en la *compacitat*, un concepte no assolit a l'època de Gauss i, molt menys encara, a la de d'Alembert.

[84] Podem recordar el passatge de Cardano en què "opera formalment $5 + \sqrt{-15}$ i $5 - \sqrt{-15}$", sense saber ben bé què és el que fa, a [Maz03]; o millor encara, les argumentacions de Jh. Bernoulli sobre $\ln i$: $\ln 1 = \ln(i)^4 = 4 \ln i = 0$. D'on: $1 = 10^0 = i$. I en dedueix, contradient Leibniz, que $\ln i$ no existeix.

$$X^m + A\,X^{m-1} + \cdots = 0$$

és igual a $-A$, perquè simplement pot ser que alguna de les arrels no existeixi.[85]

I, fins i tot, en el cas que fos possible construir quantitats d'espècies noves $F, F', F'', \ldots$, diferents dels nombres reals i complexos, no hi hauria cap raó per creure que tota equació polinòmica té una arrel real, complexa o d'una de les espècies $F, F', F'', \ldots$.[86]

Tanmateix aquesta objecció quedarà resolta totalment amb el teorema de Kronecker —que hem anomenat TFL— el qual, com ja hem indicat abans, estableix l'*existència* del cos de factorització d'un polinomi.[87]

Però a l'època d'Euler i de Gauss aquest resultat encara no existia, malgrat que Gauss l'usa de forma implícita a la seva segona demostració.

4.3. **Observacions crítiques a la demostració de Laplace.** En 1797, Gauss desconeixia la demostració de Laplace, però quan la conegué tampoc no la trobà correcta. En 1815, dirà, tot referint-s'hi:

> L'enginyós mètode de Laplace pel que fa a aquesta qüestió no el puc absoldre de les objeccions més importants que he fet als altres.[88]

I podem dir, sense incórrer en error, que Gauss —conscient de l'error comés per Laplace o abans de conèixer-lo— elaborà una demostració —la segona— en la qual hi donà una possible resposta, tot evitant, aparentment, suposar que les arrels del polinomi $P(X)$ existeixen d'antuvi en algun univers.[89]

---

[85] El fet de no acceptar les arrels complexes fa que Viète no pugui establir, en general, el lligam que hi ha entre les arrels i els coeficients. Per a ell, solament val en certs casos. Cal esperar la gosadia de Girard per disposar del fet general.

[86] Vegeu [Gau97], a *Werke*, III, 14, i a [Net13, pàgina 16].

[87] El fet de ser un cos permet efectuar les operacions algèbriques de forma correcta i precisa, i el fet de ser el cos de factorització de $P(X)$ permet expressar $P(X)$ com a producte de factors lineals de la forma $X - \alpha$.

[88] Vegeu [Gau15], a *Werke*, III, pàgina 105.

[89] En parlarem a bastament en el paràgraf §5.2.

## 5. Les demostracions de Carl Friedrich Gauss del TFA

Com és ben sabut, i hem indicat abans, Carl Friedrich Gauss es plantejà el TFA per primera vegada l'any 1797, però no el publicà fins el 1799.[90] La segona data del 1815 i la tercera, del 1816. La quarta, que es basa en els mateixos principis que la primera, està datada el 1849.[91]

### 5.1. La demostració de 1797, basada en la geometria algèbrica.

És sorprenent la simplicitat de l'enunciat —que no de la demostració— d'aquest primer teorema.[92] Tot rau, de fet, en el teorema següent:

> **Teorema**. *Sigui* $X = x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} + \cdots + L\,x + M$*. Si existeixen* $r$ *i* $\theta$ *que simultàniament*
>
> (1) $r^m \cos m\theta + A\,r^{m-1}\cos(m-1)\theta + \cdots + L\,r\cos\theta + M = T = 0,$
>
> (2) $r^m \sin m\theta + A\,r^{m-1}\sin(m-1)\theta + \cdots + L\,r\sin\theta = U = 0,$
>
> *aleshores es té la propietat següent:*
>
> (P) $X$ *és divisible per* $x^2 - 2\,r\,\cos\theta\,x + r^2$ *o bé per* $x - r\cos\theta$*,*
>
> *segons que* $r\sin\theta$ *sigui diferent o igual a zero.*[93]

---

[90]Fou el text que li serví per doctorar-se a la Universitat Helmstedt, dirigit per Johann Friedrich Pfaff. Recordem que Gauss la va presentar "en abscència" i, segons podem llegir a Wussing [1970], la col·laboració amb Pfaff fou amable:

> Pfaff va recomenar la dissertació doctoral de Gauss i s'oferí a assistir-lo, quan Gauss ho necessités. Gauss sempre recordà amigablement Pfaff, com a professor i com a persona.

[91]Les tres primeres demostracions del TFA de Gauss estan escrites en llatí, i foren traduïdes a l'alemany per E. Netto a [Net13].

Fixem-nos que, entre la primera i la quarta, han passat 52 anys i indubtablement el Gauss de la primera —que tenia 17 anys— és molt més immadur que el Gauss de la darrera quan tenia ja 69 anys. Tanmateix s'ha dit que la major part de les idees matemàtiques de Gauss són anteriors als trenta anys.

[92]Vegeu [Gau97]. Traducció anglesa parcial a [Str69, pàgines 115–121].

[93]Vegeu [Gau97], a *Werke*, III, pàgina 21, i a [Net13, pàgina 24].

A la pàgina 22, Gauss indica que Euler ja havia aconseguit aquestes expressions usant valors complexos $r\big(\cos\theta \pm i\sin\theta\big)$ per a la indeterminada $x$. Vegeu [Eul48, tom I, pàgina 110].

Gauss anomena $U$ la primera i $T$ la segona, però ho hem canviat perquè, actualment, quan $z$ és complex, $X(z)$ s'expressa en la forma $X(z) = T(z) + i\,U(z)$.

Ell, però, vol evitar tota referència als complexos perquè es tracta de veure que el polinomi factoritza en primer o segon grau, amb els coeficients reals, sense recórrer per a res als complexos. Per això dedueix la proposició (P) de (1) i de (2), basant-se en el lema següent:

**Lema**. *Per a tot nombre enter positiu $m$,*

$$\sin\theta\, x^m - r^{m-1}\sin m\theta\, x + r^m \sin(m-1)\theta$$

*és divisible per* $x^2 - 2\,r\,\cos\theta\, x + r^2$.[94]

Per deduir (P) de (1) i (2), apliquem el lema a les ternes successives, multiplicant-les, si cal, pels coeficients $A, B, \ldots, L, M$, i per $r$. Obtenim:

$$\begin{array}{lll}
\sin\theta\, r x^m & - \quad \sin m\theta\, r^m\, x & + \quad \sin(m-1)\theta\, r^{m+1} \\
A\ \sin\theta\, r\, x^{m-1} & -A\ \sin(m-1)\theta\, r^{m-1} x & +A\ \sin(m-2)\theta\, r^m \\
B\ \sin\theta\, r x^{m-2} & -B\ \sin(m-2)\theta\, r^{m-2} x & +B\ \sin(m-3)\theta\, r^{m-1} \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\
K\ \sin\theta\, r x^2 & -K\ \sin 2\theta\, r^2 x & +K\ \sin\theta\, r^3 \\
L\ \sin\theta\, r x & -L\ \sin\theta\, r x & \\
M\ \sin\theta\, r & & -M\ \sin\theta\, r.
\end{array}$$

Cada una de les files és divisible per $x^2 - 2\,r\,\cos\theta\, x + r^2$. Sumem ara totes les columnes:

1ª columna : $X\, r \sin\theta$;
2ª columna : zero, per (2);
3ª columna : zero, per la combinació $(2)\cos\theta - (1)\sin\theta$.

Aleshores

- Si $r\,\sin\theta \neq 0$, $X$ és divisible per $x^2 - 2\,r\,\cos\theta\, x + r^2$.
- Si $r\,\sin\theta = 0$, aleshores
  - ⋆ Si $r = 0$, $M = 0$ per (1) i $X$ és divisible per $x$ i $x - r\cos\theta$;
  - ⋆ Si $\sin\theta = 0$, aleshores $\cos\theta = \pm 1$ i $\cos k\theta = (\cos\theta)^k$ i $X$ s'anul·la per al valor $r\cos\theta$. És, doncs, divisible pel monomi $x - r\cos\theta$. ■

[94]Vegeu [Gau97], a *Werke*, III, pàgina 21, i a [Net13, pàgina 24].
És immediat, si observem que $x^2 - 2\,r\,\cos\theta\, x + r^2 = 0$ té les arrels complexes $r\big(\cos\theta \pm i\sin\theta\big)$, que també ho són de $\sin\theta\, x^m - \sin m\theta\, r^{m-1}\, x + \sin(m-1)\theta\, r^m$.

Tot rau, per tant, a establir el teorema.[95] La demostració consisteix a establir quatre punts:[96]

**1.** Cada una de les igualtats $T = 0$ i $U = 0$ defineix una corba algèbrica que, en total i de forma alternada, proprocionen $4m$ branques infinites que corresponen als valors $\theta = \frac{p\pi}{2m}$, amb $0 \leq p \leq 4m - 1$.
**2.** Existeix un cercle $\Gamma$ que conté $2m$ punts de $T = 0$, i $2m$ de $U = 0$, i cada punt de la segona família està entre dos de la primera.
**3.** Tot punt d'índex parell està lligat, per una branca de $T = 0$, amb un d'índex senar, i tot punt d'índex senar ho està amb un d'índex parell per una branca de $U = 0$. Totes elles situades dins $\Gamma$.[97]
**4.** La corba $U = 0$ talla la corba $T = 0$ dins de $\Gamma$.

Per aclarir les idees podeu consultar els gràfics de les pàgines 277 i 279, on trobareu la demostració detallada d'aquest teorema, i també l'exemple de les pàgines 280 i següents.

5.2. **La demostració de 1815, basada en l'àlgebra.** Aquesta demostració té molts punts de contacte amb la de Laplace, que Gauss desconeixia quan estava elaborant la seva, i és de caire purament algèbric, si, com sempre, ometem el teorema de Bolzano: "tota equació polinómica real de grau senar té un zero real".[98]

Es basa en les *funcions simètriques* i en el *discriminant*. Alguns dels resultats que estableix foren prou simples, si Gauss acceptés l'existència de les arrels (en un cert cos de descomposició). Però ell vol, precisament, evitar tota mena de referència a l'existència de les arrels del

[95] Vegeu [Wae85, pàgines 95–97] i, més detallat encara, [Fri98, pàgines 267–272].

[96] En donarem una demostració detallada al §6.1.

[97] Aquest és el punt en què Gauss es basa en intuïcions de tipus geomètric i que serà establert amb rigor per Ostrowski.

[98] Vegeu [Gau15], a *Werke*, III, pàgines 33–56, i a [Net13, pàgines 37–60]. N'existeix una traducció anglesa parcial, però suficient, a [Smi59, pàgines 292–306].

Vegeu tanmateix l'anàlisi de Gino Loria a [Lor91, pàgines 214–216] i, molt particularment, el de [Bas60].

polinomi real

$$Y = x^m + L'\,x^{m-1} + L''\,x^{m-2} + \cdots \quad (5.8)$$[99]

Gauss disposa, doncs, dels coeficients $L$, però no sap res de les possibles arrels de l'equació (5.8). No sap ni si existeixen, ni com són.

Això l'obliga a recórrer a un *subterfugi* que consisteix a *crear* dues equacions polinòmiques auxiliars —d'alguna manera, *formals*—, bàsiques en tot el desenvolupament de la demostració del teorema.

(A) Introdueix $m$ *arrels genèriques* $a, b, c, \ldots$[100] i defineix el polinomi

$$v = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots = x^m + \lambda'\,x^{m-1} + \lambda''\,x^{m-2} + \cdots,$$

en el qual cada $\lambda$ és la corresponent *funció polinòmica simètrica elemental* de $a, b, c, \ldots$.[101]

(B) Tot seguit introdueix l'equació polinòmica

$$y = x^m + \ell'\,x^{m-1} + \ell''\,x^{m-2} + \cdots,$$

on les $\ell$ són *variables* i, per tant, poden prendre valors concrets, àdhuc numèrics.[102]

Això li permet d'usar propietats i funcions associades a $Y$ —a través dels valors de les $L$— via els valors de les variables $\ell$ de $y$, previ l'ús de les $\lambda$.[103]

---

[99]És un polinomi real particular en el qual els coeficients $L', L'', \ldots$, són *constants reals arbitràries sense lligams entre si*.

[100]Són constants lingüístiques o, si ho preferiu, paràmetres formals. No són ni nombres ni variables de nombres. Això fa que $\lambda', \lambda'', \ldots$, siguin, de fet, funcions de $a, b, c, \ldots$.

[101]Als §4 i 5, Gauss estableix el *teorema fonamental de les funcions simètriques*: "Tota funció polinómica simètrica de $a, b, c, \ldots$, és una funció polinòmica de les $\lambda$, i ho és de forma única".

Gauss usa l'expressió "funció entera" per referir-se a una funció polinòmica.

[102]Tres estadis ben diferenciats: En $Y$, els coeficients $L$ són *valors numèrics reals genèrics*; en $v$, les $\lambda$ són les *funcions simètriques elementals dels paràmetres* $a, b, c, \ldots$; en $y$, els coeficients $\ell$ són *variables*.

[103] És el mètode que anomenarem *mètode de la doble substitució* i que usarem a bastament.

Per exemple, Gauss precisa del *discriminant* $P$ de $Y$.[104] Per aconseguir-lo, introdueix el *discriminant* de $v$:

$$\pi = (a-b)(a-c)(a-d)\cdots(b-a)(b-c)(b-d)\cdots(c-a)(c-b)\cdots.$$

Òbviament, $\pi$ és una funció simètrica de $a, b, c, \ldots$. Per tant, és una funció polinòmica de les $\lambda$. És a dir, $\pi = \pi(\lambda', \lambda'', \ldots)$. Ara, pel mètode de la doble substitució obté, per la primera substitució,[105] $p = \pi(\ell', \ell'', \ldots)$. Per la segona,[106] obté el *discriminant* $P$ de $Y$: $P = \pi(L', L'', \ldots)$.[107] És clar que $P$ és un valor real definit, genèric.[108]

Li cal el teorema bàsic següent:

> **Teorema 1**. *Les funcions polinòmiques $Y$ i $Y' = \frac{dY}{dx}$ no tenen factors comuns si, i només si, $P \neq 0$, on $P = \Delta(Y)$.*[109]

El demostra en dues parts:[110]

> ( I ) *Si $Y$ i $Y'$ no tenen factors comuns, $P = \Delta(Y) \neq 0$.*
> (II) *Si $P = \Delta(Y) \neq 0$, $Y$ i $Y'$ no tenen factors comuns.*

L'aparell tècnic que desenvolupa Gauss, en aquest treball, és digne d'admiració perquè, malgrat la seva aparent complexitat, és força simple.[111] ■

---

[104] Ell l'anomena "determinant", com era normal a l'època.

[105] Substuïm les $\lambda$ per les $\ell$.

[106] Substuïm les $\ell$ per les $L$.

[107] És obvi que si coneguéssim les arrels $A, B, C, \ldots$ de $Y$, $P$ fóra precisament $(A-B)(A-C)\cdots(B-A)(B-C)\cdots$ i el teorema bàsic fóra immediat, com indica Gauss al §6, 39–40.

[108] Per abreujar i fer-ho més clar, el discriminant d'un polinomi $F$ serà denotat $\Delta(F)$.

[109] Vegeu [Gau15], a *Werke*, III, pàgina 40, i traducció alemanya a [Net13, pàgina 44]. Vegeu el comentari de la nota anterior.

[110] A §1 ha establert el teorema que lliga la *identitat de Bézout* i la no existència de divisors comuns entre $F$ i $G$. "Si $F$ i $G$ són dos polinomis *arbitraris*, la condició necessària i suficient perquè no tinguin divisors comuns és que existeixin polinomis $U$ i $V$ tals que $UF + VG = 1$".

[111] Per establir (II), introdueix la funció polinòmica simètrica en $a, b, c, \ldots$:

$$\rho = \pi\frac{(x-b)(x-c)(x-d)\cdots}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\cdots} + \pi\frac{(x-a)(x-c)(x-d)\cdots}{(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2\cdots} + \pi\frac{(x-a)(x-b)(x-d)\cdots}{(c-a)^2(c-b)^2(c-d)^2\cdots} + \cdots.$$

Per la nota 101, $\rho$ és una funció polinòmica de les $\lambda$. Aleshores constata que la funció

Ara, per qüestions de claredat expositiva, fem dues hipòtesis suplementàries que veurem que no limiten, en absolut, la generalitat del teorema.

**Hipòtesi primera**. *Podem suposar que* $\mathrm{gr}(Y) = 2^{\mu} k$, *amb* $\mu$ *positiu i* $k$ *senar.*[112]

**Hipòtesi segona**. *Podem suposar que* $P = \Delta(Y) \neq 0$.[113]

Ara tot és a punt per començar el camí de la demostració, introduint els polinomis auxiliars de Laplace, però mirant-los d'una altra manera. Sigui $\zeta$ el polinomi en $x$ i $u$, definit pels productes següents

(5.9)
$$\begin{gathered}\big(u-(a+b)x+a\,b\big)\big(u-(a+c)x+a\,c\big)\big(u-(a+d)x+a\,d\big)\cdots\\ \big(u-(b+c)x+b\,c\big)\big(u-(b+b)x+b\,d\big)\cdots\big(u-(c+d)x+c\,d\big)\cdots,\end{gathered}$$

on totes les parelles són diferents. Òbviament és una funció polinòmica simètrica de $a, b, c, \dots$, i, per tant, $\zeta = \zeta(u, x, \lambda', \lambda'', \dots)$.

---

$\sigma = \frac{\pi - \rho\, v'}{v}$, on $v' = \frac{dv}{dx}$, també és una funció polinòmica simètrica en $a, b, c, \dots$ i, de retruc, una funció polinòmica de les $\lambda$. Ara per la regla de la nota 103, tenim que $p = s\,y + r\,y'$, i $P = S\,Y + R\,Y'$, on $R$ i $S$ són funcions polinòmiques en $x$ i $P$ és un valor numèric definit. Òbviament, si $P = \Delta(Y) \neq 0$, $Y$ i $Y'$ no tenen cap divisor comú.

Per veure (I), atès que $1 = f(x)\,Y + \varphi(x)\,Y'$, fent $f(x)(y - Y) + \varphi(x)\frac{d(y-Y)}{dx} = F(x, \ell', \ell'', \dots)$, en resulta que $f(x)\,v + \varphi(x)\,v' = 1 + F(x, \lambda, \lambda', \dots)$. Dóna a $x$, succesivament, els valors $a, b, c, \dots$, multiplica totes les funcions $1 + F(a, \lambda', \lambda'', \dots)$, $1 + F(b, \lambda', \lambda'', \dots), \dots$ Obté una funció polinòmica simètrica de $a, b, c, \dots$:

$$\Psi(\lambda', \lambda'', \dots, \ell', \ell'', \dots) = \pi\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\cdots = \pi\,\tau$$

(on l'estructura del terme central de la igualtat és deguda a l'aparició de la derivada $v'$). Ara substitueix les $\lambda$ per les $\ell$. Obté: $\Psi(\ell', \ell'', \dots, \ell', \ell'', \dots) = p\,t$.

De la definició de $F$ —això és clau— en resulta trivialment que $F(x, L', L'', \dots) = 0$. Per tant, $\Psi(\ell', \ell'', \dots, L', L'', \dots) = 1$. De retruc, $\Psi(L', L'', \dots, L', L'', \dots) = P\,T = 1$. Però $T$ és finit i $P \neq 0$.

[112] Atès que $Y$ és un polinomi real, si el grau de $Y$ és senar, el *teorema de Bolzano* garanteix l'existència d'una arrel real.

[113] Altrament $Y = Y_1\,Y_2$, amb $\mathrm{gr}(Y_i) = 2^{\mu_i}\,k_i$. No pot ser que $\mu_i \geq \mu, i = 1, 2$, perquè aleshores, per simple còmput, $\mathrm{gr}(Y) = 2^{\nu}\,k^*$, amb $\nu > \mu$ i $k^*$ senar. Si $\Delta(Y_1) = \Delta(Y_2) = 0$, repetim el procés en un dels factors fins aconseguir un $Y^*$, amb $\Delta(Y^*) \neq 0$ i $\mathrm{gr}(Y^*) = 2^r\,s, s$ senar. I qualsevol arrel de $Y^*$ és una arrel de $Y$.

Pel mètode de la doble substitució, obtenim, en la primera substitució, $z = z(u, x, \ell', \ell', \dots)$ i, en la segona,

$$Z = Z(u, x, L', L'', \dots) = F(u, x). \tag{5.10}$$

**Teorema 2**. *Si $P = \Delta(Y) \neq 0$, aleshores el discriminant de $Z$, $\Delta(Z)(x)$,*[114] *no és idènticament nul.*[115]

La darrera part de la demostració de Gauss és, potser, la menys natural de totes.[116] Estableix un lema genèric que aplica a la funció

---

[114]Fixem-nos que solament depèn de $x$ perquè està generat, per doble substitució, a partir del producte de les diferències $\big((a+b)x+ab\big) - \big((a+c)x+ac\big)$, etc., que és una funció polinòmica simètrica de les variables formals $a, b, \dots$, i, de retruc, és una funció polinòmica dels coeficients $\lambda$.

[115]Vegeu [Gau15], a *Werke*, III, §12, pàgines 46–47, i a [Net13, pàgines 50–51].

Els passos de la demostració són els següents:

(1) Calcula $\Delta(\zeta)$ i obté $\Delta(\zeta) = \pi^{m-2}\, v^{(m-1)(m-2)}\, \rho$.
(2) Amb la tècnica de les substitucions, obté $\Delta(z) = p^{m-2}\, y^{(m-1)(m-2)}\, r$, $\Delta(Z) = P^{m-2}\, Y^{(m-1)(m-2)}\, R$. Tot rau, doncs, a veure que $R$ no és idènticament nul·la.
(3) Introdueix el producte de les expressions $(a+b-c-d)\omega + (a-c)(b-d)$. Obté la funció $f(\omega, \lambda', \lambda'', \dots)$ que compleix $f(0, \lambda', \lambda'', \dots) = \pi^{(m-2)(m-3)}$ i, de retruc, $f(0, \ell', \ell'', \dots) = p^{(m-2)(m-3)}$ i $f(0, L', L'', \dots) = P^{(m-2)(m-3)} \neq 0$.
(4) Això li permet afirmar que la funció $f(\omega, L', L'', \dots)$, de grau, en general, $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)$, i terme independent $f(0, L', L'', \dots)$, no és mai nul. Sigui $N\,\omega^{\nu}$ el terme de grau màxim.
(5) Els factors $f(x-a, \ell', \ell'', \dots), f(x-b, \ell', \ell'', \dots), f(x-c, \ell', \ell'', \dots), \dots$, proporcionen, com sempre, $\varphi(x, \lambda', \lambda'', \dots, \ell', \ell'', \dots)$.
(6) El producte $\varphi(x, \lambda', \lambda'', \dots, \lambda', \lambda'', \dots)$ dels factors $f(x-a, \lambda', \lambda'', \dots)$, $f(x-b, \lambda', \lambda'', \dots)$, $f(x-c, \lambda', \lambda'', \dots), \dots$, és divisible per $\rho$. Per tant, $\varphi(x, \lambda', \lambda'', \dots, \lambda', \lambda'', \dots) = \rho\,\psi(x, \lambda', \lambda'', \dots)$. De retruc, $\varphi(x, L', L'', \dots, L', L'', \dots) = R\,\psi(x, L', L'', \dots)$. D'on, $N^m x^{m\nu}$ és el grau màxim de $\varphi(x, \lambda', \lambda'', \dots, L', L'', \dots)$. Per tant, $R$ no és idènticament nul·la.

[116]Tanmateix, per a una construcció més intuïtiva, vegeu [Bas60, pàgines 217–219].

$\zeta = f(u, x, \lambda', \lambda'', \dots)$,[117] que li permet afirmar que la funció

$$f\left(u+\omega\frac{d\zeta}{dx}, x-\omega\frac{d\zeta}{du}, \lambda', \lambda'', \dots\right)$$

és divisible per $\zeta$. A més, el quocient és una funció polinòmica en les variables $u, x, \omega$ i en els paràmetres $a, b, c, \dots$, i simètrica en $a, b, c, \dots$, que designa $\psi(u, x, \omega, \lambda', \lambda'', \dots)$. Per tant,

$$f\Big(u+\omega\,\tfrac{d\zeta}{dx}, x-\omega\,\tfrac{d\zeta}{du}, \lambda', \lambda'', \dots\Big) = \zeta\,\psi(u, x, \omega, \lambda', \lambda'', \dots).$$

Pel mètode de la doble substitució en resulten:

$$f\left(u+\omega\,\frac{dz}{dx}, x-\omega\,\frac{dz}{du}, \ell', \ell'', \dots\right) = z\,\psi(u, x, \omega, \ell', \ell'', \dots), \tag{5.11}$$

$$f\left(u+\omega\,\frac{dZ}{dx}, x-\omega\,\frac{dZ}{du}, L', L'', \dots\right) = Z\,\psi(u, x, \omega, L', L'', \dots). \tag{5.12}$$

Aleshores, d'acord amb (5.10),

$$F\left(u+\omega\,\frac{dZ}{dx}, x-\omega\,\frac{dZ}{du}\right) = Z\,\psi(u, x, \omega, L', L'', \dots).$$

Si fem $u = U$, $x = X$, on $U, X$ són valors particulars de $u$ i $x$, i

$$\left.\frac{dZ}{dx}\right|_{\substack{x=X\\u=U}} = X', \text{ i } \left.\frac{dZ}{du}\right|_{\substack{x=X\\u=U}} = U',$$

obtenim

$$F\big(U+\omega\,X', X-\omega\,U'\big) = F(U, X)\,\psi(U, X, \omega, L', L'', \dots). \tag{5.13}$$

**Hipòtesi tercera**. *Suposem que podem aconseguir un valor* $U' \neq 0$.

Fem $\omega = \frac{X-x}{U'}$. Tindrem

$$F\left(U+\frac{X\,X'}{U'}-\frac{X'\,x}{U'}, x\right) = F(U, X)\,\psi\left(U, X, \frac{X-x}{U'}, L', L'', \dots\right), \tag{5.14}$$

[117] El lema diu: "Si $\varphi(u, x)$ denota el producte d'un nombre arbitrari de factors lineals en $u$ i $x$ —és a dir, factors de la forma $\alpha+\beta\,u+\gamma\,x$, $\alpha'+\beta'\,u+\gamma'\,x$, $\alpha''+\beta''\,u+\gamma''\,x, \dots$—, i si $\omega$ és una incògnita nova, aleshores la funció

$$\varphi\Big(u+w\,\frac{d\varphi(u, x)}{dx}, x-w\,\frac{d\varphi(u, x)}{dx}\Big) = \Omega$$

és divisible per $\varphi(u, x)$". La demostració és un càlcul.

d'on en resulta:

$$F(u,x)=F(U,X)\,\psi\left(U,X,\frac{X-x}{U'},L',L'',\dots\right),\ \text{on } u=U+\frac{X\,X'}{U'}-\frac{X'\,x}{U'}. \tag{5.15}$$

**Lema**. *Existeix un valor real* $X$ *de* $x$ *tal que* $\Delta\big(F(u,x)\big)(x)\neq 0$.[118] ■

Sigui $X$ un valor real de $x$ que no anul·li $\Delta(Z)(x)$. És a dir, $\Delta\big(F(u,x)\big)(X)\neq 0$. Per tant,

$$F(u,X) \quad \text{i} \quad \frac{dF(u,X)}{du}$$

no tenen divisors comuns.

**Hipòtesi quarta**. *Podem suposar l'existència d'un valor particular* $U$ *de* $u$*, real o complex, que anul·li* $F(u,X)$*. És a dir,* $F(U,X)=0$.

Òbviament aquesta hipòtesi implica la validesa de la hipòtesi tercera.[119]

Ara sigui $X'=\frac{dZ}{dx}\Big|_{\substack{x=X\\u=U}}$, i fem $u=U+\frac{X\,X'}{U'}-\frac{X'\,x}{U'}$. Aleshores

$$F\left(U+\frac{X\,X'}{U'}-\frac{X'\,x}{U'},x\right)=F(U,X)\psi\left(U,X,\frac{X-x}{U'},L',L'',\dots\right),$$

on $F(U,X)=0$. Per tant, $Z(u,x)$ és divisible per $u+\frac{X'}{U'}\,x-\Big(U+\frac{X\,X'}{U'}\Big)$.

Fem $u=x^2$. Aleshores $F\big(x^2,x\big)$ és divisible per

$$x^2+\frac{X'}{U'}\,x-\Big(U+\frac{X\,X'}{U'}\Big),$$

que és un polinòmi quadràtic amb els coeficients complexos i que s'anul·la quan

---

[118] Atès que $P=\Delta(Y)\neq 0$, $\Delta(Z)(x)$ no és idènticament nul. El nombre de valors que l'anul·len és finit. Per tant, n'hi ha una infinitat que no l'anul·len, entre els quals n'hi ha òbviament de reals.

[119] Si $u=U$ anul·la $F(u,X)$, aleshores $(u-U)$ divideix $F(u,X)$. Per tant, no pot dividir $\frac{dF(u,X)}{du}$. I si $U'$ és el valor de $\frac{dF(u,X)}{du}$ quan $u=U$, llavors resulta que $U'\neq 0$.

$$x = \frac{-X' \pm \sqrt{4U\,U'\,U' + 4X\,X'\,U' + X'\,X'}}{2\,U'},$$

que són valors complexos. És a dir,

$$G(x) = F\big(x^2, x\big) = 0, \text{ amb } x \in \mathbb{C}.$$

Però,

$$f\big(x^2, x, \lambda', \lambda'', \dots\big) = v^{m-1}$$

és el producte de $(x-a)(x-b), \dots$, sense repeticions. D'on:

$$\begin{aligned} f\big(x^2, x, \ell', \ell'', \dots\big) &= y^{m-1}, \\ f\big(x^2, x, L', L'', \dots\big) &= Y^{m-1}. \end{aligned}$$

En definitiva, doncs, hem establert el teorema final següent:

> **Teorema 3**. *Si $P = \Delta(Y) \neq 0$ i existeix un valor, real o complex, u de $U$ que $F(u, X) = 0$, amb $X$ real, aleshores $Y$ té una arrel real o complexa.* ■

Només cal, doncs, establir la validesa de la hipòtesi quarta, i aquí és on entra en joc la hipòtesi d'inducció:

> **Proposició.** *Si $P = \Delta(Y) \neq 0$, existeix una arrel real o complexa $U$ del polinomi $F(u, X) = 0$, on $X$ és real.*

El grau del polinomi $F(u, X)$ és $\frac{1}{2}2^{\mu}\,k(2^{\mu}\,k - 1) = 2^{\mu-1}\,k'$, amb $k'$ senar. Iterem la inducció fins arribar a un polinomi de grau dos o de grau senar.[120] En ambdós casos s'obté una arrel real o complexa que també ho és de $F(u, X)$ i, per tant, de $Y$. ■

M'he estès en aquest teorema perquè palesa dos fets que val la pena posar de manifest. Una mateixa idea pot ser desenvolupada de formes diferents. El fet d'acceptar *postulats d'existència* dels objectes que es busquen —quelcom que pot ser fals— simplifica enormement les demostracions.

[120] La justificació de la validesa de la hipòtesi segona, aplicada a $F(u, X)$, garanteix que $\Delta\big(\Delta(Y)\big) \neq 0$.

I, a més, posa de manifest la grandesa de la capacitat intuïtiva i deductiva —i, de retruc, l'enorme qualitat matemàtica— de Carl Friedrich Gauss.

5.3. **La demostració de 1816, basada en el càlcul integral.** Aquesta demostració, probablement la menys coneguda de totes, es basa en l'anàlisi matemàtica real i, en concret, en el càlcul d'una integral. Sembla que la idea se li va ocórrer mentre treballava en la demostració anterior.

Sigui $X$ un polinomi real

$$X = x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} + \cdots \tag{5.16}$$

on $x$ és la variable.

Fa

$$\begin{aligned} r^m \cos m\theta + A\,r^{m-1}\cos(m-1)\theta + \cdots + L\,r\cos\theta + M &= t,\\ r^m \sin m\theta + A\,r^{m-1}\sin(m-1)\theta + \cdots + L\,r\sin\theta &= u. \end{aligned}$$

Calcula les derivades de $t$ i $u$ respecte de $\theta$, que anomena $-u'$ i $t'$:

$$\begin{aligned} t' &= m\,r^m \cos m\theta + (m-1)A\,r^{m-1}\cos(m-1)\theta + \cdots + L\,r\cos\theta,\\ u' &= m\,r^m \sin m\theta + (m-1)A\,r^{m-1}\sin(m-1)\theta + \cdots + L\,r\sin\theta. \end{aligned}$$[121]

Aleshores considera la funció

$$y = \frac{\big(t^2+u^2\big)(t\,t''+u\,u'') + (t\,u'-u\,t')^2 - (t\,t'+u\,u')^2}{r\big(t^2+u^2\big)^2}. \tag{5.17}$$

Òbviament, si no hi ha cap valor de $r$ i $\theta$ que anul·li $t$ i $u$, la funció està definida arreu i és finita.

Aleshores pot calcular la integral doble

$$\Omega = \int\!\!\int y\,dr\,d\theta$$

sobre el rectangle $[0,R]\times[0,2\pi]$,[122] amb el *teorema de Fubini*.[123]

[121] De fet, $t' = u_\theta = r\,t_r$, $u' = -t_\theta = r\,u_r$, $t'' = t_{\theta\theta}$, $u'' = -u_{\theta\theta}$, $t_{\theta\theta} = -r\,u_{\theta\,r}$, $u_{\theta\theta} = -r\,t_{\theta\,r}$.

[122] Un càlcul ple d'enginy. Vegeu [Mes61, pàgines 58–60].

[123] Podem integrar primer respecte de $r$ i després respecte de $\theta$, o al revés. S'ha d'obtenir el mateix resultat.

En concret, Gauss fa els càlculs i obté dos resultats diferents, d'on n'infereix l'existència d'un valor de $r$ i $\theta$ que anul·la les funcions $t$ i $u$ i, de retruc, la funció polinòmica $X = 0$. Aquests càlculs són:

(I) La integral indefinida respecte de $\theta$ és $\int y\, d\theta = \frac{t\,u' - u\,t'}{r(t^2+u^2)}$.[124]
Ara calcula la integral

$$\int_0^{2\pi} y\, d\theta = \left. \frac{t\,u' - u\,t'}{r\big(t^2 + u^2\big)} \right|_0^{2\pi} = 0.$$

Per tant $\Omega = 0$.

(II) La integral indefinida respecte de $r$ és $\int y\, d\theta = \frac{t\,t' + u\,u'}{t^2+u^2}$,[125] la qual s'anul·la quan $r = 0$ i és positiva quan $r = R$.[126] Per tant $\Omega > 0$. Contradicció. ■

Bartel Leenert van de Waerden ofereix una conjectura de com Gauss va determinar la funció (5.17). Considera $X = t + iu$ com una funció de la variable complexa $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Parlant geomètricament, la funció

$$X(z) = X(r, \theta) = t + iu$$

estableix una aplicació del $z$-pla en el $X$-pla, en el qual introduïm coordenades polars:

$$X = s(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Tenim que $\tan\beta = \frac{u}{t}$, que podem diferenciar respecte de $\theta$ i de $r$. Obtenim:

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta} = \frac{t\,t' + u\,u'}{t^2}\cos^2\beta = \frac{t\,t' + u\,u'}{t^2 + u^2} = U, \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial r} = \frac{t\,u' - u\,t'}{r\,t^2}\cos^2\beta = \frac{t\,u' - u\,t'}{r\big(t^2 + u^2\big)} = V. \tag{5.19}$$

[124]És evident. Només cal derivar el terme de la dreta respecte de $\theta$ i usar els valors de les derivades especificats abans.

[125]Vegeu [Mes61, pàgines 61–62].

[126]Gauss prèviament ha demostrat, amb un càlcul simple però ple d'enginy, que, quan $R$ és prou gran, $t\,t' + u\,u' > 0$, amb independència del valor de $\theta$. Vegeu [Mes61, pàgines 58–60].

Amb càlcul simple resulta que $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = y$. Gauss usa aquestes funcions a fi d'aconseguir

$$\int y\,dr = U, \int y\,d\theta = V.$$ [127]

Van der Waerden es pregunta:

> Com varia l'angle $\beta$, quan el punt $z$ es mou en un cercle prou gran $r = R$ del $z$-pla?[128]

I respon:

> A la primera de les demostracions, quan $\theta$ va de 0 a $2\pi$, i $R$ és prou gran, el punt $X$ passa $m$ vegades pels quadrants primer, segon, tercer, i quart (en aquest ordre), quelcom que implica que $\beta$ va de 0 a $2m\pi$. Si ara calculem el valor de $\int d\beta$, usant (5.19), obtenim
>
> $$\beta(2\pi) - \beta(0) = \int d\beta = \int U d\theta.$$
>
> Aquesta diferència ha de ser un múltiple $M$ de $2\pi$. Atès que $U$ és positiu, $M > 0$. Per la primera demostració sabem que $M = m$, el grau del polinomi $X$. Però Gauss no necessita aquest resultat. En la demostració que estem comentant només precisa que $\int U\,d\theta$ sigui positiu.
>
> Mentre $u^2 + t^2$ sigui no nul, la integral $\beta(2\pi) - \beta(0) = \int d\beta = \int U d\theta$ serà una funció contínua de $r$, per tant l'enter $M$ no canvia, i la integral $\int U\,d\theta$ és constant. D'altra banda, és positiva per a $r = R$ i zero per a $r = 0$. Contradicció.[129]

[127] L'angle $\beta$ no està unívocament determinat. Només ho està mòdul $2\pi$. Ara bé, en un entorn del punt $(r, \theta)$, l'angle $\beta$ és una funció diferenciable de $r$ i $\theta$. Per tant la diferencial total $d\beta = U\,d\theta + V\,dr$ està ben definida. Pot ser —però és absolutament especulatiu— que Gauss volgués evitar funcions multivaluades, com $\beta$, i, per això, en lloc d'usar $y$, usés les derivades de $y$, $U$ i $V$.

[128] Vegeu [Wae85, pàgina 102].

[129] Vegeu [Wae85, pàgina 102].

Van der Waerden diu que potser aquesta era la idea de Gauss, però que en voler evitar la multiplicitat de la funció $\beta$ va haver de recórrer a la integral $\int U\,d\theta$, tot expressant-la com a integral doble $\int U\,d\theta = \int\int y\,dr\,d\theta$.

## 6. Les demostracions del TFA en la meva vida professional

Al llarg de la història de la matemàtica s'han desenvolupat moltes altres demostracions del TFA. L'estudi complet de totes i cada una d'elles —lligant allò que tenen en comú i allò que fa que siguin essencialment diferents— fora un treball d'història de la matemàtica digne d'encomi.[130]

Aquest article és òbviament l'exposició detallada i completa d'una conferència que —com ja he dit abans— forma part d'un cicle de conferències sobre les moltes i diferents facetes de l'obra matemàtica de Carl Friedrich Gauss, adreçat als estudiants d'una Facultat de Matemàtiques i Estadística. Per això em sembla molt adequat —un cop fixats els trets epistemològics, docents, i històrics de la qüestió— fer una anàlisi de quines són les demostracions que hom pot trobar en el seu quèfer professional com a matemàtic.

Malgrat que sóc conscient que la meva vida particular no és exemple de res, ni per a ningú, tampoc no sóc tan vanitós com per creure que és tan particular i original que no pugui servir com un model mitjà per a molts dels que estudien matemàtiques. És per aquesta raó que, per tancar aquesta presentació del TFA, faig un recorregut, més o menys cronològic, per les meves experiències o "circumstàncies", si preferiu el terme orteguià.

6.1. **Demostracions possibles del TFA a tercer de matemàtiques.** El tercer curs del pla d'estudis de la llicenciatura de matemàtiques de 1952 constava de quatre assignatures: *Àlgebra*, *Anàlisi matemàtica* III, *Física*, i *Geometria projectiva*. El temari del curs d'*Àlgebra* proprocionava els coneixements i les eines necessàries per a la seva comprensió, de les estructures algèbriques —fonamentalment, grups, anells i cossos commutatius. L'objectiu final era la *teoria de Galois*. L'*Anàlisi*

[130] Vegeu el text magnífic de [FR97], on els autors fan una presentació, molt autocontinguda, de les demostracions —des de l'anàlisi complexa, des de la teoria de Galois, des de la topologia— del TFA. Tanmateix, no és un text estrictament històric. Més aviat és un text d'índole metodològica, però realment molt interessant. Un bon guió per a un estudi històric complet l'ofereix l'artcle succint i compacte de [NV91].

*matemàtica* III, en canvi, tenia dues parts ben diferenciades: l'estudi teòrico-pràctic de les *equacions diferencials ordinàries*, i una introducció, prou acurada i sòlida, a l'*anàlisi complexa*. De fet, com ja hem vist a les pàgines 244–246, cada una d'aquestes assignatures proporcionava estris necessaris per poder establir demostracions acurades, prou riques i simples, de TFA.

Tanmateix, l'any en què vaig fer tercer el curs fou un xic malaguanyat. Eren uns anys de revolta en contra de moltes coses, en general, i, a casa nostra, en contra de la dictadura franquista. Hi havien moltes vagues estudiantils i tancaments institucionals de la Universitat, i no tingué l'aprofitament que hauria hagut de tenir. I, pel que fa referència a les demostracions del TFA, només vàrem assolir els objectius a l'*Anàlisi matemàtica* III.

6.1.1. *La demostració basada en el teorema de Liouville.* Aquesta demostració —l'hem desenvolupada a la pàgina 244 i no cal insistir-hi més— és la primera demostració del TFA amb la que vaig tenir contacte.[131]

6.1.2. *Les demostracions dels textos d'àlgebra.* Al curs *Àlgebra* —malgrat que hi vàrem veure el *teorema de Kronecker* (TFL)— no assolírem, en canvi, ni de bon tros, els objectius del curs. De retruc, no vàrem assolir els coneixements necessaris de la *teoria de Galois* per veure la demostració del TFA de la pàgina 246. Això no obstant, vàrem entrar en contacte amb els textos d'àlgebra més notables de l'època.[132] Tot i això, no vaig ser prou bon estudiant per aprofundir, pel meu compte,

[131]El text d'anàlisi complexa que vàrem seguir a *Anàlisi* III, sota la batuta del professor Joan Augé [1919-1993], fou el text d'Henri Cartan. I, com és usual en aquesta mena de textos d'anàlisi complexa, conté una demostració del TFA, com a corol·lari del teorema de Liouville. Vegeu [Car61, pàgines 80–83].

Tanmateix, voldria indicar que el text de "matemàtiques generals" que vàrem seguir, el curs acadèmic 1962–1963, amb el professor Dr. Josep Vaquer Timoner [1928- ] —tot just quan vaig començar els estudis universitaris— contenia una demostració del TFA, basada en el TFL. No va formar part, tanmateix, d'allò que es va donar a classe i que seria matèria d'examen. I he reconèixer, amb una mica de vergonya, que em va passar totalment desapercebuda.

[132]El professor Rafel Mallol [1925-1988] recomanà, com a textos de consulta i de complement de les seves lliçons, [Wae31], [DDJ61] i [Lan72].

les qüestions que havien quedat al tinter, perquè els textos oferien totes les qüestions del temari —i més— que, per les circumstàncies polítiques del moment, no havíem pogut veure a classe. D'haver-ho fet, hi hauria trobat diverses demostracions del TFA.[133] Tanmateix no les vaig descobrir fins força temps més tard.

**1.** Dues demostracions del text de van der Waerden. La primera està basada en el càlcul integral i la segona és molt més algebraica. Per a la tercera, vegeu el paràgraf §6.1.1.

**1a.** Una demostració del TFA basada en la teoria de funcions.[134] Sigui $\varphi(z) = \frac{1}{P(z)}$, on $P(Z) \in \mathbb{R}[Z]$, i suposem que, per a tot $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$. Òbviament, per a tot $z \in \mathbb{C}$, $P(z)\,\varphi(z) = 1$. D'on, $P(0)\,\varphi(0) = 1$.

Considerem la funció

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z}.$$

La integral d'aquesta funció, en un cercle $\mathcal{K}$ de radi $R > 0$, s'anul·la:

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \Big(\varphi\big(R\, e^{i\,\theta}\big) - \varphi(0)\Big)\, i\, d\theta = 0.$$

Ara bé, quan $R$ és gran, $\left|\varphi\big(R\, e^{i\,\theta}\big)\right| < \epsilon$. Aleshores

$$\left|\int_0^{2\pi} \varphi\big(R\, e^{i\,\theta}\big)\, i\, d\theta\right| < 2\pi\epsilon.$$

A més, $\int_0^{2\pi} \varphi(0)\, i\, d\theta = 2\pi\, i\, \varphi(0)$. Per tant, $|2\pi\, i\, \varphi(0)| < 2\,\pi\epsilon$, que implica $\varphi(0) = 0$. Contradicció![135] ■

**1b.** Una demostració algebraica del TFA.[136] De fet aquesta demostració —que és la de Laplace— la vaig descobrir quan feia de professor de

---

[133] El text dels Dubreil no en conté cap; el text de Serge Lang conté la demostració clàssica del TFA, basada en la teoria de Galois, que hem vist a la pàgina 246. El text, de van der Waerden, en canvi, n'ofereix tres.

[134] Vegeu [Wae31], traducció anglesa de 1949, I, pàgines 223–244.

[135] La metodologia recorda molt la demostració tercera de Gauss.

[136] Vegeu [Wae31], traducció anglesa de 1949, I, pàgines 227-228.

la Universitat Autònoma de Barcelona.[137] Un d'aquells anys vaig haver de donar classes d'àlgebra de primer, i vaig recórrer, entre d'altres, al text de Lentin-Rivaud.[138]

És, doncs, la demostració que ja hem comentat al §3.3 i que, d'alguna manera, és la que ofereix Gauss com a demostració segona, salvant les distàncies que imposa el fet d'acceptar o no l'existència prèvia de les solucions del polinomi.

L'únic punt que queda per aclarir és l'afirmació "hi ha dos índex $\mu, \nu$, diferents, per als quals $u = \zeta_\mu + \zeta_\nu$ i $v = \zeta_\mu \zeta_\nu$ són, ambdós, complexos".[139] Això és degut al fet que, de polinomis $L_t(X)$, en tenim una infinitat, però de parelles d'índexos $\mu, \nu$ només n'hi ha un nombre finit.

---

[137]Era el curs 1968-1969. Ens havíem llicenciat i el Dr. Enrique Linés [1914-1988] ens va proposar de fer de professors a la UAB, tot just acabada de fundar. Va triar un grup força interessant, si tenim en compte els interessos matemàtics i la personalitat de cada un de nosaltres: Nadal Batle [Felanitx, 25 de febrer de 1945-Palma de Mallorca, 7 de desembre de 1997], Pilar Bayer, Julià Cufí, Carles Simó, i jo.

[138]Vegeu [LR64, edició castellana de 1967, pàgines 251–254].

És curiosa la breu introducció històrica que fan aquests autors francesos. Diuen que, malgrat que la primera demostració correcta de TFA és de Gauss, a França, el teorema es coneix amb el nom de teorema de d'Alembert. No indiquen, però, que la demostració que ells presenten és la demostració original de Laplace, un matemàtic francès molt reputat. Tanmateix, com hem vist, també és la segona demostració de Gauss.

Aquesta demostració és precisament la que conté el text de Teixidor-Vaquer. Com ja he indicat, és el primer text de matemàtiques que vaig estudiar en arribar a la Universitat, com a text de "Matemáticas generales", en aquell "curso selectivo" famós i oblidat. Però això ho vaig descobrir un bon grapat d'anys més tard i puc dir que fou una descoberta casual. El meu pare em va preguntar en què consistia allò que, en aquella època, s'anomenava, amb molta naturalitat i superficialitat, "matemàtica moderna". Jo li vaig regalar un exemplar del text de Teixidor-Vaquer. Un vespre, després de sopar —ho recordo com si fos ara— ens vam posar a mirar-lo i comentar-lo una mica per sobre per veure quines qüestions tractava, i en aquell moment me'n vaig adonar.

Van der Waerden l'estén a "cossos reals". Vegeu [Wae31, edició anglesa de 1949, I, pàgines 225–228].

Curiosament és la demostració que ha triat Tignol a l'excel·lent text [Tig01, pàgines 115–122], molt més modern que els anteriors, on mira de fer una presentació actualitzada de la teoria de Galois, tot seguint de prop la història.

[139]Vegeu la pàgina 252.

Això fa que hi hagi dos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2$, que proporcionen les arrels complexes $z_1 = \zeta_\mu + \zeta_\nu + t_1\, \zeta_\mu \zeta_\nu$ i $z_2 = \zeta_\mu + \zeta_\nu + t_2\, \zeta_\mu \zeta_\nu$, per als mateixos índexos $\mu, \nu$. L'afirmació és aleshores immediata. ■

**2.** La demostració del text de Serge Lang. És, de fet, la demostració que hem desenvolupat a la pàgina 246 i —encara que m'estigui malament dir-ho—la vaig descobrir realment un dels tres estius que vaig dedicar a preparar la novel·la *Damunt les espatlles dels gegants*.[140] Vaig creure que, per preparar la conferència inaugural de l'any 2000 —l'Any Mundial de les Matemàtiques— que el rector havia encomenat al vell professor Valeri E. Gassiot, calia que mirés més de prop els escrits d'Evarist Galois [1811-1832], d'una banda, i la teoria de Galois en els estàndards expositius actuals. Fou aleshores quan, als textos de Serge Lang i de Ian Stewart, hi vaig trobar la demostració del TFA, basada en la teoria de Galois i en el teorema primer de Sylow.[141]

En tot cas, l'únic punt que falta demostrar és, en tot cas, el fet que tota extensió de grau 2 sobre $\mathbb{R}$ és un cos isomorf a $\mathbb{C}$. Però això és degut al fet que totes elles són extensions de la forma $\mathbb{R}[X]/\big(P(X)\big)$, on $P(X)$ és un polinomi irreductible de grau dos sobre $\mathbb{R}$.[142]

6.2. **El TFA de d'Alembert-Argand.** La reformulació d'Argand de la demostració de d'Alembert la vaig veure, per primera vegada, a l'obra col·lectiva d'Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev i d'altres. Després la retrobaria moltes altres vegades, en textos molt diversos[143] i, en particular, en els textos de John Stillwell. Aquesta demostració és la que acostumo a explicar a les classes d'història de la matemàtica els anys en què parlo de les demostracions del TFA al segle XVIII.[144]

---

[140]Vegeu [Pla98].

[141]Tanmateix, ara, en fer-ne la síntesi al lema 2.7, he usat el text [Cox04].

[142]Vegeu la nota 50.

[143]Vull esmentar, en particular, el text [RPa15, pàgines 240–241]. Era el text de referència dels professors de l'Escola d'Arquitectura de la Universitat Politècnica de Catalunya quan, a començaments dels anys setantes del segle XX, el professor Enric Trillas [1940- ] —sota la tutela del professor Pedro Pi Calleja [1907-1986]— tenia cura de l'ensenyament de la matemàtica.

[144]Segueixo, fil per randa, [Sti78, pàgines 197–198]. És un llibre de conceptes i intuïcions matemàtiques que aconsello, sempre que en tinc ocasió, com a lectura complementària, a tots els estudiants i professors de matemàtiques. En la seva demostració, que és la d'Argand, suposa que $A$, la derivada en el punt $z_0$, és diferent

**Lema 6.1.** *Si $p(z)$ és un polinomi no constant amb $p(z_0) \neq 0$, aleshores tot entorn de $z_0$ conté un $z_1$ tal que $\big|p(z_1)\big| < \big|p(z_0)\big|$.*

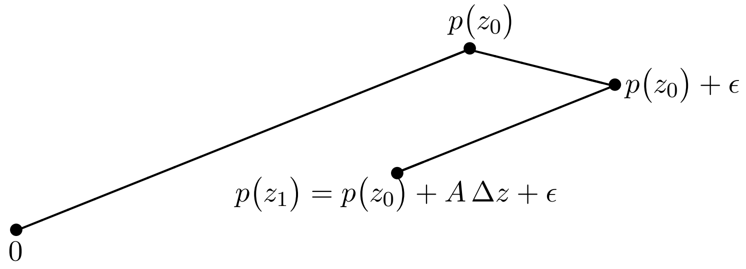
**Demostració**. Sigui $z_1 = z_0 + \Delta z$. Hem de determinar $\Delta z$ de manera que $\big|p(z_1)\big| < \big|p(z_0)\big|$. És a dir, de manera que $p\big(z_1\big)$ sigui més proper a l'origen que $p\big(z_0\big)$.

Si $p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$, aleshores

$$\begin{aligned} p\big(z_1\big) = p\big(z_0 + \Delta z\big) \;&=\; a_n\, z_0^n + a_{n-1}\, z_0^{n-1} + \cdots + a_1\, z_0 + a_0 \\ &\quad + \Delta z\Big(n\, a_n\, z_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\, z_o^{n-2} + \cdots + a_1\Big) \\ &\quad + \text{ termes en } \Delta z^2, \Delta z^3, \ldots \\ &=\; p\big(z_0\big) + A\, \Delta z + \epsilon, \end{aligned}$$

on $A$ és una constant $\neq 0$, atès que $p(z)$ no és constant, el factor de $\Delta z$ és la derivada $p'(z)$, i $|\epsilon|$ és petit en comparació amb $|\Delta z|$, quan $\Delta z$ és petit.

Agafem $\Delta z$ de manera que $A\, \Delta z$ tingui la direcció oposada de $p\big(z_0\big)$.[145]




Aleshores $p\big(z_1\big)$ és més proper a l'origen que $p\big(z_0\big)$, sempre que $|\Delta z|$ l'hàgim elegit de manera que $|\epsilon|$ sigui molt petit respcte de $|A\, \Delta z|$. ∎

**Corol·lary 6.2.** *Si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, existeix un $z_0 \in \mathbb{C}$ que $p\big(z_0\big) = 0$.*

---

de 0. En cas contrari, hi haurà necessàriament una primera derivada $k$-èsima no nul·la i aleshores tot va igual si definim $A$ com el valor d'aquesta derivada en el punt $z_0$ i en lloc de $\Delta z$ usem $\Delta z^k$.

[145]Això és possible atès que, com indica la figura, els arguments de $p\big(z_0\big)$, $A$, i $p\big(z_0\big) + \epsilon$ estan donats.

**Demostració**. Sigui $p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$. Si $|z|$ és gran, aleshores $\left|a_n\, z^n\right|$ és gran respecte de $\left|a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0\right|$. Per tant, existeix un $R > 0$ tal que $p(z) \sim a_n\, z^n$, per a tot $|z| \geq R$.

La funció $\left|p(z)\right|$ és contínua a l'interior del disc tancat $|z| \leq R$. Per tant, atrapa el valor mínim en un punt $z = z_0$.

Suposem que $p\big(z_0\big) \neq 0$, Aleshores:

- Si $\left|z_0\right| < R$, existeix un entorn de $z_0$, dins el disc tancat $|z| \leq R$ i, pel lema de d'Alembert, hi ha un $z_1$, amb $\left|p(z_1)\right| < \left|p(z_0)\right|$. Contradicció!
- Si $\left|z_0\right| = R$, aleshores hi ha un $z_1$, amb $\left|p(z_1)\right| < \left|p(z_0)\right|$.
  - ⋆ Si $z_1$ és dins el disc tancat $|z| \leq R$, contradicció!
  - ⋆ Si $z_1$ és fora, contradicció: $|p(z)|$ creix si $|z| > R$.

Per tant, $\left|p\big(z_0\big)\right| = 0$ i, de retruc, $p\big(z_0\big) = 0$. ■

6.3. **El TFA i la geometria algèbrica.** Deu fer ja més de vint anys que vaig començar a consultar els *Source Books* de Matemàtiques, tant el d'Struik com el d'Smith. Proporcionen, respectivament, traduccions angleses parcials de les demostracions primera i segona de Gauss.[146] Si haig de ser sincer, no en vaig fer pas una lectura aprofundida. De fet, la lectura aprofundida de la demostració primera de Gauss —potser la més emblemàtica de totes— la vaig fer en ocasió de l'elaboració del curs *Els Nombres. Una aproximació a la història de la matemàtica*.[147] És un curs dividit en tres parts —el nombre natural, el nombre real, i el nombre complex.[148] Per elaborar la tercera part —la que correspon als nombres complexos— vaig recórrer, entre d'altres, al text de J. V. Uspensky, i allà vaig aprofundir, per primera vegada, la demostració de Gauss de 1797, de la qual n'hem donat els ítems al paràgraf 5.1.

[146] Vegeu [Str69, pàgines 115–122], 115-122, i [Smi59, pàgines 292–306].

[147] En canvi, la lectura aprofundida de les demostracions segona i tercera de Gauss —les de 1816— l'he fet arran d'aquesta commemoració a la memòria de Gauss.

[148] En ell, intento d'apropar l'estudiant de matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques de la UB a alguns dels resultats i intuïcions matemàtics més rellevants a través del concepte clàssic de nombre.

Aquesta demostració és d'una riquesa i d'una bellesa tan grans que crec sincerament que val la pena reproduir-la ara íntegrament, seguint les petges d'Uspensky.[149] De fet, la demostració es basa en una desigualtat realment simple, en el comportament de les funcions sin i cos en els angles de la forma $\frac{\kappa\pi}{4}$, i en el de certes funcions algèbriques ben simples. Realment, "chapeau" per a un xicot de vint anys, l'edat de Gauss el 1797.

**Teorema 6.3.** *Considerem el polinomi*

$$P(x) = x^n + A\,x^{n-1} + B\,x^{n-2} + \cdots + L\,x + M,$$

*amb* $A, B, \ldots, L, M$ *reals,*[150] *i siguin*

$$\begin{aligned} T &= r^n \cos n\theta + A\,r^{n-1}\cos(n-1)\theta + \cdots + L\,r\cos\theta + M, \\ U &= r^n \sin n\theta + A\,r^{n-1}\sin(n-1)\theta + \cdots + L\,r\sin\theta, \end{aligned}$$

*com en l'enunciat del teorema* 5.1. *Hem de veure que hi ha un* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $T\big(z_0\big) = 0$ *i* $U\big(z_0\big) = 0$.

Calen uns lemes previs i bàsics:

**Lema 6.4.** *Existeix un* $R > 0$ *tal que, si* $r > R$,

$$r^n - \sqrt{2}\big(A\,r^{n-1} + B\,r^{n-2} + \cdots + L\,r + M\big) > 0.$$

**Demostració**. Sigui $S \in \mathbb{R}_+, S$ més gran que $A, B, \ldots, L, M$. Aleshores

$$r^n - \sqrt{2}\big(A\,r^{n-1} + B\,r^{n-2} + \cdots + L\,r + M\big) > r^n - \sqrt{2}\,S\,\big(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1\big).$$

Per tant, $r^n - \sqrt{2}\big(A\,r^{n-1} + B\,r^{n-2} + \cdots + L\,r + M\big) > 0$ es complirà si

$$r^n - \sqrt{2}\,S\,\big(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1\big) > 0. \tag{6.20}$$

O sigui, si

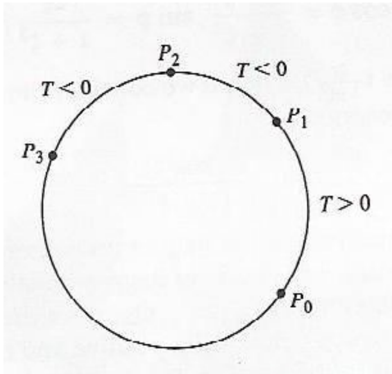
$$r^n\left(1 - \sqrt{2}\,S\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n}\right)\right) > 0 \tag{6.21}$$

[149] Vegeu tanmateix [FR97, pàgines 1822–186].

[150] Els podríem agafar complexos, com fa Uspensky, però, com hem vist a la nota 26, això no és important.

Però, si $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{1}{r^n} < \frac{1}{r-1}$. Per tant, (6.21) i, amb més raó encara (6.20), seran vàlids si $r > 1$ i $1 - \frac{\sqrt{2}\,S}{r-1} > 0$. O sigui, si $r > 1 + \sqrt{2}\,S$. Per tant, n'hi ha prou a considerar $R = 1 + \sqrt{2}\,S$. ■

**Lema 6.5.** *La circumferència d'un cercle de radi $r > R$ consta de $2n$ arcs, en els quals $T$ pren alternativament valors positius i negatius, com indica la figura adjunta.*




**Demostració**. Posem $\omega = \frac{\pi}{4n}$, i considerem els $4n$ punts $P_0$, $P_1$, $P_2, \ldots, P_{4n-1}$ de la circumferència que corresponen als arguments

$$\omega, 3\,\omega, 5\,\omega, \ldots, (8n-3)\,\omega, (8n-1)\,\omega.$$

Els arguments que corresponen als punts $P_{2k}, P_{2k+1}$ són $\phi = (4k+1)\omega$, $\phi' = (4k+3)\omega$. Se'n segueix que

$$\cos(n\phi) = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \cos(n\phi') = (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si multipliquem els valors corresponents de $T$ per $(-1)^k$ i per $(-1)^{k+1}$ obtenim, respectivament,

$$(-1)^k\,T = \frac{r^n}{\sqrt{2}} + (-1)^k\,A\,r^{n-1}\cos\big((n-1)\phi\big) + \cdots + (-1)^k\,M,$$
$$(-1)^{k+1}\,T = \frac{r^n}{\sqrt{2}} + (-1)^{k+1}\,A\,r^{n-1}\cos\big((n-1)\phi'\big) + \cdots + (-1)^{k+1}\,M.$$

Si substituïm els valors

$$(-1)^k\,\cos\big((n-1)\phi\big), \ldots, (-1)^k, \ \text{ i } \ (-1)^{k+1}\,\cos\big((n-1)\phi'\big), \ldots, (-1)^{+1}k$$

per $-1$, obtenim les desigualtats:

$$(-1)^k\,T \geq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - A\,R^{n-1} - \cdots - M > 0,$$
$$(-1)^{k+1}\,T \geq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - A\,R^{n-1} - \cdots - M > 0,$$

en virtut de l'elecció d'$R$ i del lema 6.4.

Com que $T$ varia contínuament respecte de $\phi$, s'anul·la, almenys, $2n$ vegades damunt de la circumferència. Suposem que aquests $2n$ són els punts $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2n-1}$, que tenen els arguments respectius entre $\omega, 3\,\omega, 5\,\omega, \ldots, (8n-3)\,\omega, (8n-1)\,\omega$, respectivament. Sigui $\zeta = \tan\frac{\phi}{2}$. Aleshores,

$$\cos\phi = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} \quad \text{i} \quad \sin\phi = \frac{2\,\zeta}{1+\zeta^2}.$$

Considerem el punt $z = r\left(\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} + i\frac{2\,\zeta}{1+\zeta^2}\right)$. Si el substituïm en el polinomi incial $X$, obtenim una part real

$$T = \frac{P_{2n}(\zeta)}{1+\zeta^2},$$

on $P_{2n}(\zeta)$ és un polinomi de grau $\leq 2n$.

Hem vist que s'anul·la en $2n$ punts diferents de $\zeta$. Per tant, no pot anul·lar-se per a cap altre valor de $\zeta$. A més, les $2n$ arrels —l'existència de les quals acabem d'establir— han de ser simples. Això fa que s'hagin d'alternar els valors negatius i positius de $T$, quan recorrem la circumferència de radi $r$, tal com indica la figura.[151] ■

**Lema 6.6.** *Els valors de $U$ són positius en els punts $Q_0, Q_2, \ldots, Q_{2n-2}$ i negatius en els punts $Q_1, Q_3, \ldots, Q_{2n-1}$.*

**Demostració**. L'argument $\phi$ del punt $Q_k$ està entre $\frac{(4k+1)\pi}{4n}$ i $\frac{(4k+3)\pi}{4n}$. Se'n segueix que $(-1)^k \sin(n\phi) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si multipliquem $U$ per $(-1)^k$ i reemplacem $(-1)^k \sin\big((n-1)\phi\big), \ldots, (-1)^k$ per $-1$, obtenim la desigualtat

$$(-1)^k\,U \geq r^n(-1)^k \sin(n\phi) - A\,R^{n-1} - \cdots - L\,R - M$$

i, en virtut de l'elecció del radi $R$,

$$(-1)^k\,U \geq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - A\,R^{n-1} - \cdots - L\,R - M > 0.$$

Per tant, el signe de $Q_k$ és el signe de $(-1)^k$. ■

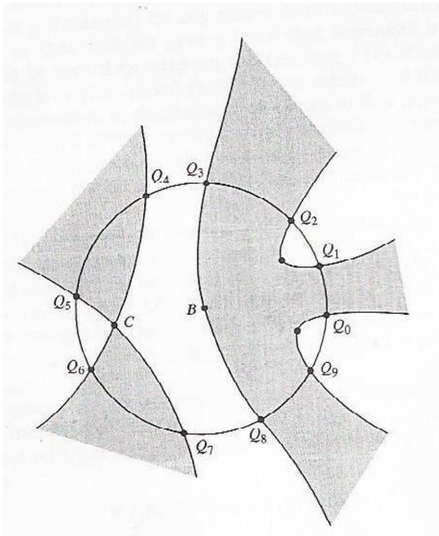
[151] Atès que, en el punt d'argument $\omega$, el valor de $T$ és positiu i que canvia de signe quan passa pel punt $Q_0$, en els $2n$ arcs $Q_0\,Q_1; Q_1\,Q_2; \ldots; Q_{2n-2}\,Q_{2n-1}; Q_{2n-1}\,Q_0$, els signes de $T$ seran alternativament $- + - + \ldots$.

Ara podem reformular el teorema 6.3 en els termes següents:

**Teorema 6.7.** *Hi ha un punt de l'interior d'un cercle* $\Gamma$ *en què s'anul-len alhora* $T$ *i* $U$.

**Demostració**. Elegim un cercle $\Gamma$ de radi $r > R$. La seva circumferència estarà dividida pels $2n$ punts $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2n-1}$ entre els quals els signes de $T$ s'alternen.

A mesura que fem el radi més i més gran, els arcs $Q_0\,Q_1; Q_1\,Q_2$; etc. delimiten $2n$ regions que s'estenen fins a l'infinit i dins de les quals els signes positiu i negatiu de $T$ s'alternen. Aquestes regions estan separades per unes corbes damunt les quals $T = 0$.




Per descriure-ho d'una forma més intuïtiva, anomenem *mars* les $n$ regions en les quals $T < 0$ (de color gris a la figura) i *continents* les altres $n$ regions, en les quals $T > 0$ (de color blanc a la figura). Les corbes en les quals $T = 0$ són les *costes*.[152] Els $n$ mars i els $n$ continents que hi ha dins de $\Gamma$ s'estenen a l'exterior a través dels arcs $Q_0\,Q_1; Q_1\,Q_2$; etc., com indica la figura adjunta.

Començant pel punt $Q_1$ final de l'arc $Q_0\,Q_1$, ens movem per la costa de manera que el continent quedi sempre a la dreta.[153] Si la circumferència de $\Gamma$ la recorrem en el sentit contrari al de les agulles del rellotge, els continents i els mars s'aniran alternant. D'això se'n deduiex que creuem la circumferència de $\Gamma$ cap a fora en els punt $Q_k$ amb $k$ parell.[154]

Existeix una corba $\gamma$ que va de $Q_1$ a $Q_k$, amb $k$ parell. En ella, $T = 0$ constantment. Ara bé, pel lema anterior, $U < 0$ a $Q_1$ i $U > 0$ a $Q_k$, però ambdós pertanyen a la corba $\gamma$. La funció $U$ varia de forma contínua.

[152]Aquesta nomenclatura és de Gauss, i Uspensky la respecta.

[153]A la figura entrem dins $\Gamma$, amb el continent a la dreta, després sortim de $\Gamma$, però el continent segueix a la dreta.

[154]És a dir, en $Q_2$, o en $Q_4$, o en $Q_6$, etc.

Per tant, hi ha d'haver un punt de la corba $\gamma$ en el qual $U = 0$. Hi ha, doncs, un punt de l'interior de $\Gamma$ en el qual $T = 0, U = 0$. ■

Realment, amics, quina elegància! Malgrat que Gauss no n'ofereix cap, és sempre instructiu veure exemples concrets del mètode.[155]

Volem trobar les arrels del polinomi $X^7 + 28\,X^4 - 480 = 0$. Aleshores, susbtituint $X$ per $x + i\,y$, obtenim

$$T = x^7 - 21\,x^5\,y^2 + 28\,x^4 + 35\,x^3\,y^4 - 7\,x\,y^6 + 28\,y^4 - 168\,x^2\,y^2 - 480 = 0,$$
$$U = -y^7 + 21\,x^2\,y^5 - 35\,x^4\,y^3 + 7\,x^6\,y + 112\,x^3\,y - 112\,x\,y^3 = 0.$$

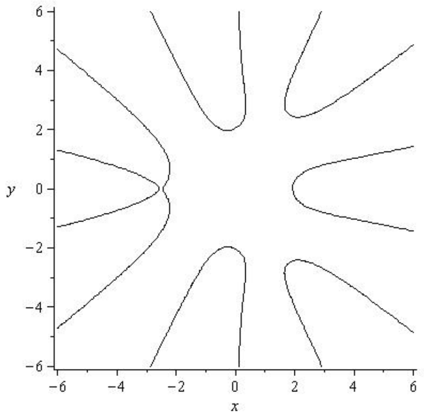


Figura 1: La corba $T = 0$.

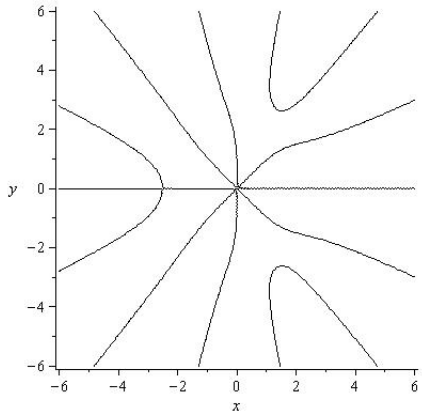


Figura 2: La corba $U = 0$

La intersecció de $T = 0$, $U = 0$ —materialitzada a la figura 3, on $U = 0$ és de traç seguit i $T = 0$ de puntets,— dóna els valors aproximats de les arrels reals i complexes de l'equació inicial.

Les arrels reals de l'equació polinòmica $X^7 + 28X^4 - 480 = 0$ són:

$$X_1 \simeq 1,922841; \;\; X_2 \simeq -2,4580892; \;\; X_3 \simeq -2,5778036,$$

i les arrels complexes conjugades són:

$X_4, X_5 \simeq 1,6843159 \pm 2,6637914\,i$ i $X_6, X_7 \simeq -0,1278113 \pm 1,9874234\,i$.[156]

[155] Vegeu [Fri98, pàgines 269–272].

[156] Per a més informació sobre les intuïcions de Gauss en els exemples concrets, vegeu [Fri98, pàgines 270, 273–278].

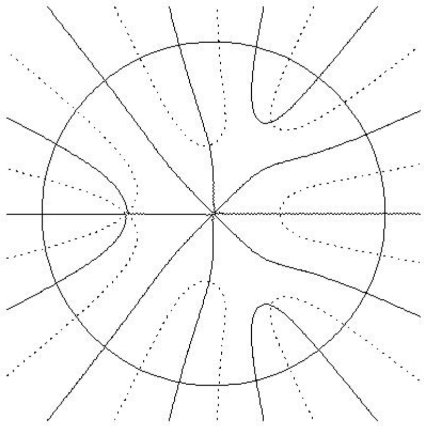


Figura 3: Les arrels de $X^7 + 28\,X^4 - 480 = 0$.

6.4. **La demostració algèbrica del TFA de William K. Clifford.** Ian Stewart, al capítol vuitè de [Ste73], dedicat al TFA, esmenta, tot de passada, una prova deguda al matemàtic anglès William K. Clifford.[157] Curiosament aquesta demostració —d'una gran simplicitat, i alhora força desconeguda— l'ofereix de forma detallada Julio Rey Pastor a les *Lecciones de Álgebra*.[158] Es basa en la *resultant* de dos polinomis.[159]

**Proposició 6.8.** **(Teorema de la resultant d'Euler)** *La condició necessària i suficient perquè dos polinomis*

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & a_0\,x^m + a_1\,x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\,x + a_m, \\ g(x) & = & b_0\,x^n + b_1\,x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\,x + b_n, \end{array}\right\}$$

*de graus $m$ i $n$ tinguin, almenys, una arrel en comú, és que existeixin dos polinomis $F_{m-1}$ i $G_{n-1}$, respectivament, de graus $m-1$ i $n-1$*

[157] Vegeu [Cli70] o [Ste73, pàgina 193].

[158] Vegeu [RP15, edició de 1947, pàgines 310–312]. Aquest text el vaig descobrir gràcies a la insistència de l'amic Pelegrí Viader que me'n recomanà la lectura i me'n facilità una còpia.

[159] La primera aproximació a la resultant, per a polinomis de graus dos o quatre, la féu Isaac Newton a l'*Arithmetica Universalis*, lliçons 1673-1683. L'alternativa, com sempre, la pren Euler, el qual, al capítol 19 de [Eul48], dóna dos mètodes d'eliminació, el segon dels quals el trobem també a [Eul64]. No obstant això, el mètode més acceptat és el que estableix Bézout al *Cours de mathématiques* [1764-1769], on trobem, de forma explícita i clara, la resultant. També serà Bézout qui el generalitzarà al cas d'equacions amb dues variables en un article de 1764, que recull a la *Théorie générale des équations algébriques* [1779]. Per a un tractament acurat i més actual de la resultant, vegeu [SP60, volum II, pàgina 76].

*exactament que satisfacin la identitat*

$$f_m\, G_{n-1} = g_n\, F_{m-1}. \tag{6.22}$$

*Si $m \geq n$, la identitat* (6.22) *equival al fet que un cert sistema homogeni de $m+n$ equacions lineals amb $m+n$ incògnites sigui compatible. I això equival al fet que el determinant del sistema s'anul·li, és a dir, a $R=0$, on $R$ és el determinant següent:*

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0\\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0\\
0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_d & a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & a_m\\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n
\end{vmatrix}$$

(hem posat $d = m - n$).

**Demostració**. És un exercici elemental. ■

**Corol·lary 6.9.** (**Teorema fonamental de l'àlgebra**) *Sigui*

$$P(x) = x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, x + a_n$$

*un polinomi real de grau $n = 2\,m = 2^\nu\, q \geq 0$, i $q$ senar.*[160] *Aleshores $P(x)$ té una arrel complexa.*

**Demostració**. Per inducció sobre l'*ordre de paritat $\nu$*.[161]

- Si $\nu = 0$, el teorema de Bolzano estableix l'existència d'una arrel real.
- Si $\nu \neq 0$, fem $x = y + h$. Aleshores resulta que

$$P(x) = P(y+h) = y^n + c_1\, y^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\, y + c_n = \Phi\big(y^2\big) + y\, \Psi\big(y^2\big),$$

[160] Podríem suposar, com fa Rey Pastor [RP15, edició de 1947, pàgina 310], que el polinomi té els coeficients complexos, però això, com ja hem dit abans, no té importància.

[161] Pel que fa a la inducció, fixem-nos en l'analogia de la demostració de Lapalce i la segona de Gauss.

on

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z^m + c_2\, z^{m-1} + c_4\, z^{m-2} + \cdots + c_{n-2}\, z + c_n,\\ \Psi(z) &= c_1\, z^{m-1} + c_3\, z^{m-2} + c_5\, z^{m-3} + \cdots + c_{n-3}\, z + c_{n-1}.\end{aligned}$$

El grau de $h$ en la resultant $R(h)$ de $\Phi$ i $\Psi$ és el *pes* que aporten les $c_i$, que és $m\,(m-1)$. Ara bé, els índexos estan duplicats en $\Phi$ i augmentats d'una unitat en $\Psi$. Per tant, $R(h)$ té un ordre de paritat $2m(m-1)+m = m(2m-1) \le \nu - 1$.[162]

Ara, d'acord amb la hipòtesi d'inducció, podem afirmar l'existència de zeros complexos dels polinomis d'ordre de paritat $< \nu$ i, en particular, del polinomi $R(h)$. Existeix, doncs, un valor de $h$ que anul·la alhora $\Phi$ i $\Psi$. Per tant, tenen un divisor comú $\eta$: $\Phi = \varphi\,\eta, \Psi = \psi\,\eta$.

En resulta que el polinomi

$$P(x) = \Big(\varphi\big(y^2\big) + y\,\psi\big(y^2\big)\Big)\eta\big(y^2\big) \tag{6.23}$$

descompon en dos factors de grau $< n$:

- $\star$ Si un d'ells té ordre de paritat $< \nu$, admet un zero complex que ho és de $P(X)$.
- $\star$ Si ambdós tenen ordre de paritat $\nu$, repetim el procés i, atès que que els graus disminueixen, arribarem a un polinomi d'ordre de paritat $< \nu$, que proporcionarà una arrel complexa de $P(X)$.

El teorema queda així demostrat. ■

6.5. **Les dues darreres demostracions del TFA que he descobert.** No vull acabar aquest treball sense fer esment de dues demostracions que he descobert tot preparant aquesta conferència.[163]

[162]Els coeficients $c_i$ són polinomis en $h$. Cal adonar-se'n i comptar bé.

[163]La primera l'he trobada en un text d'anàlisi complexa que he repassat per recordar la demostració basada en el teorema de Liouville, esmentada a la pàgina 244. És una demostració que es basa en el *teorema de Rouché*.

La segona, en canvi, en un intent de modernitat, l'he trobada cercant informació, en el Google, sobre el TFA. És una demostració de caire topològic, i la podem trobar al text d'àlgebra [BL67], que he consultat en més d'una ocasió. És, precisament, la que donava, a finals dels anys seixanta i començaments dels setanta, l'amiga i col·lega Pilar Bayer en l'assignatura de *Topologia* de segon de matemàtiques. L'encàrrec el

6.5.1. *La demostració al si de l'anàlisi complexa, basada en el teorema de Rouché.* A l'anàlisi complexa,[164] o bé usant tècniques topològiques,[165] podem demostrar el teorema següent:

**Teorema 6.10.** (**Teorema de Rouché**) *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ dues funcions analítiques a l'interior d'una corba tancada simple $C$. Suposem que $\left|g(z)\right| < \left|f(z)\right|$. Aleshores $f$ i $f+g$ tenen el mateix nombre de zeros dins de $C$.* ■

**Corol·lary 6.11.** (**Teorema fonamental de l'àlgebra**) *El polinomi $P(z) = z^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, z^k, c_k \in \mathbb{C}$, té $n$ zeros a $\mathbb{C}$.*

**Demostració**. Sigui $R = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left|c_k\right|$ i suposem que $|z| \geq R$. Aleshores, atès que $R \geq 1$, $\left|z^r\right| \geq \left|z^s\right|$, si $r > s > 0$. En conseqüència

$$\left|z^n\right| \geqslant R\left|z^{n-1}\right| \geqslant \left|z^{n-1}\right| + \sum_{k=0}^{n-1} \left|c_k\right| \left|z^{n-1}\right| \geqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left|c_k\right| \left|z^k\right| > \left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, z^k\right|.$$

Però la funció $P(z)$ és analítica en $\mathbb{C}$. Per tant, en el disc $|z| \leqslant R$. Ara apliquem el teorema de Rouché i tenim que els polinomis

$$z^n \quad \text{i} \quad z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, z^k$$

tenen el mateix nombre de zeros en el disc $|z| \leqslant R$.

Òbviament, $z^n$ té el zero $z = 0$ amb multiplicitat $n$. Per tant, el polinomi $P(z)$ té $n$ zeros dins del disc $|z| \leqslant R$.[166] ■

---

va rebre del doctor Josep Teixidor [1920-1989], i jo vaig ser el professor de problemes. Malgrat tot, l'havia oblidada.

La *Topologia* fou una de les dues assignatures que van subtituir, a la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona —a petició dels estudiants— l'*Astronomia*. L'altra fou la *Lògica matemàtica*. Ara, passats els anys —i reconeixent la importància de les dues assignatures que es van incorporar a la llicenciatura de matemàtiques, en ocasió de la protesta estudiantil— lamento que l'*Astronomia* i d'altres assignatures de contingut físic hagin desaparegut totalment dels currícula de l'ensenyament a moltes de les Facultats de Matemàtiques.

[164] Vegeu [LR72, edició castellana de 1975, pàgines 218–219].

[165] Vegeu [FR97, pàgina 200].

[166] Observem que, per l'elecció que hem fet de $R$, $P(z) \neq 0$, si $z \geqslant R$.

6.5.2. *La demostració topològica de Birkoff-Mac Lane.* Aquesta és, de fet, l'única demostració de caire topològic que donaré.[167]

**Teorema 6.12.** $\big($**Teorema fonamental de l'àlgebra**$\big)$ *Tot polinomi* $P(Z) = a_m\, Z^m + a_{m-1}\, Z^{m-1} + \cdots + a_1\, Z + a_0 \in \mathbb{C}[Z]$ *de grau* $m \geqslant 1$ *té almenys una arrel a* $\mathbb{C}$.

**Demostració**. Podem suposar que el coeficient del terme de grau màxim $a_m = 1$.[168]

Considerem dos plans complexos: el $z$-pla i l'$\omega$-pla. La funció contínua $P(z)$ aplica cada punt $z_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ del $z$-pla en un punt $\omega_0 = P\big(z_0\big)$ de l'$\omega$-pla.

Si $z$ descriu una corba contínua, com ara la circumferència $|z| = r$, $P(z)$ descriu una corba de l'$\omega$-pla.

Les figures adjuntes representen les imatges respectives, per al polinomi $P(Z) = Z^3 - 2\,Z^2 - 1$, de les circumferències $|z| = r$ que s'indiquen explícitament a cada figura.[169]

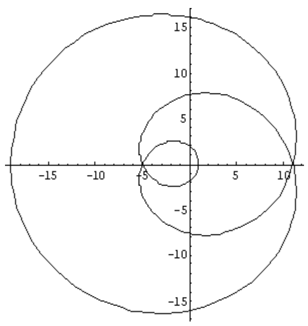



Figura 1. $|z| = 2$

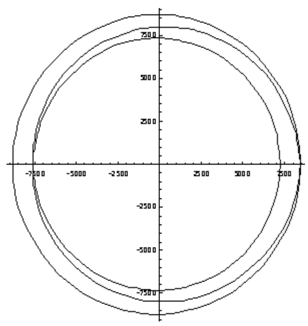


Figura 2. $|z| = 20$

[167]Vegeu [BL67]. Difereix de la que donen a l'*Algebra*, edició francesa de 1970, I, 212-214.

Ometo d'altres demostracions de tipus topològic, perquè estan molt ben exposades a [FR97].

[168]Dividim tots els coeficients per $a_m$ i fem $c_i = \frac{a_i}{a_m}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

[169]A la figura 3, hem ampliat l'escala. Adonem-nos que la figura 4 suggereix que la circumferència de radi $0,75$ passa prop d'una arrel. De fet les arrels són $z \simeq 2,206$ i $z \simeq -0,103 \pm 0,665i$, i el mòdul d'aquestes dues arrels complexes és $\simeq 0.673$.

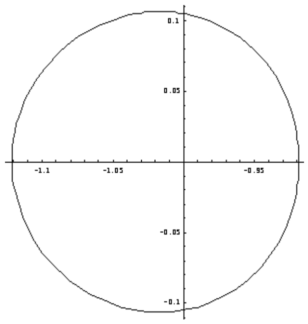


Figura 3. $|z| = 0,1$

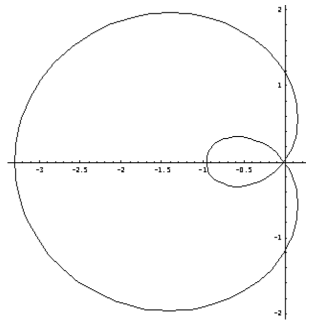


Figura 4. $|z| = 0.75$

Volem veure que l'origen $O$ de l'$\omega$-pla està a la "imatge" de $P(z)$ per un $z$ del pla. Això equival a dir que la imatge d'alguna circumferència $|z| = r$ del $z$-pla passa per l'origen $O$ de l'$\omega$-pla.

Per a cada $r > 0$, la funció $\omega = P\big(r\, e^{i\theta}\big)$, aplicada a la circumferència $\gamma_r : |z| = r \ \big(z = r\, e^{i\theta}\big)$, defineix una corba $\gamma_r'$ de l'$\omega$-pla.[170]

Per a tota corba $\gamma_r'$ que *no passi per l'origen $O$ de l'$\omega$-pla*, l'angle total $n(r)$ és el nombre de vegades que $\gamma_r'$ fa una volta completa, en la direcció contrària a les agulles del rellotge, al voltant de l'origen $O$ de coordenades.[171]

La funció $n(r)$ és contínua en $r$, atès que $P\big(r\, e^{i\,\theta}\big)$ ho és, llevat que $\gamma_r'$ passi per $O$, que ho hem exclòs.[172]

Suposem que $c_0 \neq 0$.[173] Volem veure que, per a $r$ prou gran, $n(r) = m = \mathrm{gr}\big(P(z)\big)$.

En efecte, podem escriure la funció polinòmica $P(z)$ en la forma

$$P(z) = z^m + c_{m-1}\, z^{m-1} + \cdots + c_1\, z + c_0 = z^m \left( 1 + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\, z^{-k} \right).$$

Per la *fórmula de de Moivre*:

[170]El cas $r = 0$ no té interès perquè $\gamma_r'$ queda reduïda a l'únic punt $\omega = P(0)$.

[171]Vegeu les quatre figures anteriors. Analíticament, $n(r)$ es pot representar per la integral curvilínia $\frac{1}{2\,\pi} \int d\theta$ al llarg de $\gamma_r'$, amb $d\theta = \frac{u\, dv - v\, du}{u^2 + v^2}$.

[172]Si $\gamma_r'$ passa per l'origen $O$ de coordenades, el teorema queda establert.

[173]En cas contrari, podem simplificar les arrels iguals a zero.

$$\arg\bigl(P(z)\bigr) = m\arg(z) + \arg\left(1 + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\, z^{-k}\right).$$

Quan $z$ descriu el cercle $\gamma_r$ en sentit contrari a les agulles del rellotge, el canvi net en $\arg\bigl(P(z)\bigr)$ és igual a:

$$\text{canvi}\bigl(\arg(z)\bigr) = m\,(2\pi) \text{ més canvi } \Bigl(\arg\bigl(1 + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\, z^{-k}\bigr)\Bigr).$$

Si $|z| = r$ i $r$ és prou gran, $1 + \sum_{k=1}^{m} c_{m-k}\, z^{-k} = \omega^*$ satisfà $\bigl|\omega^* - 1\bigr| < \frac{1}{2}$,[174] que no produeix cap volta a l'entorn de l'origen $O$ de coordenades de l'$\omega$-pla.

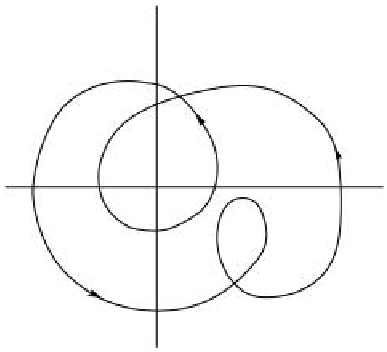


Figura 5: Figura proposada per Birkhoff i Mac Lane, en la qual $n(r) = 1$.

D'on, quan $r$ és prou gran, $n(r) = m$, perquè el canvi total en $\arg\bigl(P(z)\bigr)$ és $2\,\pi\,m$.

Quan $r$ canvia, $\gamma_r'$ es deforma contínuament (perquè la funció $P(z)$ és contínua).[175]

Aleshores, des del punt de vista geomètric, és evident que giravolta, a l'entorn de l'origen de coordenades $O$, $m \neq 0$ vegades. No es pot

[174] En virtut de la *desigualtat triangular* del mòdul.

[175] Hem entrat a l'àmbit de la topologia.

deformar contínuament en un punt sense passar per l'origen en algun moment de la deformació.[176]

Així, doncs, per a un cert valor $r$, la corba $\gamma'_r$ passa per l'origen $O$ de coordenades. És a dir, $P(z)$ s'anul·la en un punt complex, com volíem demostrar. ■

6.6. **Una darrera demostració del TFA, deguda a J. W. Milnor.** L'amic i col·lega Sebastià Xambó ha tingut la paciència i l'interès de llegir aquest article i de fer-me un grapat d'observacions molt apropiades i aclaridores com és propi —com sabem tots els que el coneixem— de la seva capacitat receptiva i de la seva qualitat matemàtica.

En una de les suggerències m'indica la simplicitat i elegància de la demostració que ofereix John W. Milnor en el text —sintètic i alhora claríssim— *Topology from the differentiable Viewpoint*, tot suggerint-me l'oportunitat d'incloure-la en l'article a fi de completar aquesta presentació de demostracions del TFA. Haig de reconèixer que desconeixia totalment l'obra i, de retruc, la demostració. Però, un cop l'he llegida, m'ha semblat que l'indicació d'en Sebastià era d'allò més oportuna. Per això la reprodueixo aquí.

**Definició 6.13.** *Siguin $U \subseteq \mathbb{R}^k$ i $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$ dos conjunts oberts. Una aplicació $f$ de $U$ en $V$ és* suau *si, i només si, existeixen totes les derivades parcials $\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} f$ i són contínues.*

*En general, si $X \subseteq \mathbb{R}^k$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ són dos subconjunts arbitraris d'espais euclidians, una aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és* suau *si, i només si, per a cada $x \in X$, existeixen un conjunt obert $U \subseteq \mathbb{R}^k$ que conté $x$ i una funció suau $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ que coincideix amb $f$ en $U \cap X$.*[177]

**Definició 6.14.** *Una aplicació $f : X \longrightarrow Y$ és un* difeomorfisme *si $f$ aplica $X$ homeomòrficament sobre $Y$ i $f$ i $f^{-1}$ son, ambdues, suaus.*[178]

[176] És un teorema de topologia que podem trobar demostrat, per exemple, a [AH35, pàgina 463].

[177] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgina 1].

[178] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgina 1].

**Definició 6.15.** *Sigui* $f : M \longrightarrow N$ *una aplicació suau entre dues varietats de la mateixa dimensió. Diem que un punt* $x \in M$ *és un* punt regular *de* $f$ *si la derivada* $df_x$ *és nosingular.*[179]

El teorema de la funció inversa estableix que, en aquest cas, $f$ aplica un entorn de $x$ en $M$ difeomòrficament sobre un conjunt obert de $N$.

**Definició 6.16.** *El punt* $y \in N$ *és un* valor regular *si, i només si,* $f^{-1}(y)$ *només conté punts regulars.*

*Si* $df_x$ *és singular, aleshores* $x$ *és un* punt crític *de* $f$*, i la imatge* $f(x)$ *s'anomena un* valor crític.[180]

Aleshores cada $y \in N$ és un valor crític o un valor regular segons que $f^{-1}(y)$ contingui o no un punt crític.

**Lema 6.17.** *Sigui* $f : M \longrightarrow N$ *una funció suau,* $M$ *compacte, i* $y$ *un punt regular de* $N$*. Aleshores,* (1) $f^{-1}(y)$ *és finit, eventualment buit.* (2) *Si definim* $\#f^{-1}(y) = card\big(f^{-1}(y)\big)$*, la funció* $\#f^{-1}(y)$ *és localment constant com a funció de* $y$ (on $y$ recorre solament punts regulars)*; és a dir, hi ha un entorn* $V \subseteq N$ *de* $y$ *tal que* $\#f^{-1}(y') = \#f^{-1}(y)$*, per a tot* $y' \in V$*.*[181]

**Demostració**. (1) $f^{-1}(y)$ és compacte, atès que és un conjunt tancat dins d'un conjunt compacte $M$. D'altra banda, $f^{-1}(y)$ és discret, atès que $f$ és injectiva en cada entorn de $x \in f^{-1}(y)$.

(2) Siguin $x_1, \dots, x_k \in f^{-1}(y)$. Elegim entorns $U_i$, disjunts dos a dos, dels punts $x_i$. Són aplicats difeomòrficament sobre entorns $V_1, \dots, V_k$ de $N$. Aleshores podem agafar

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k - f\big(M - U_1 - \cdots - U_k\big). \qquad \blacksquare$$

**Teorema 6.18.** $\big($**Teorema fonamental de l'àlgebra de J. W. Milnor**$\big)$[182] *Cada polinomi* $P(z)$ *complex, no constant, té un zero a* $\mathbb{C}$*.*

---

[179] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgines 7–8]. El concepte de diferencial s'estén de forma natural del cas de funcions vectorials de variable vectorial al cas d'aplicacions suaus entre varietats.

[180] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgines 7–8].

[181] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgina 8].

[182] Vegeu [Mil65, edició de 1990, pàgines 8–9].

**Demostració**. El primer pas de la demostració consisteix a passar del pla complex a una varietat compacta. Considerem l'esfera unitat $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ i la projecció estereogràfica

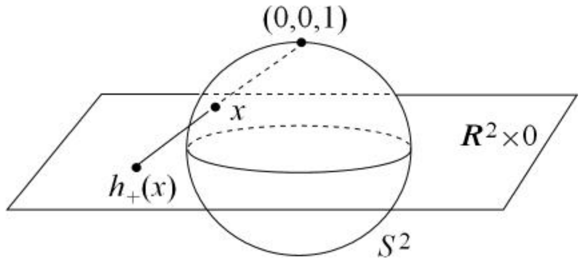
$$h_+ : S^2 - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times 0 \subseteq \mathbb{R}^3$$

des del "pol nord" $(0,0,1)$ de $S^2$, d'acord amb la figura adjunta.

Identifiquem $\mathbb{R}^2 \times 0$ amb el pla dels nombres complexos. A l'aplicació polinòmica $P$ de $\mathbb{R}^2 \times 0$ en $\mathbb{R}^2 \times 0$ li correspon l'aplicació $f$ de $S^2$ en $S^2$, on:

$$f(0,0,1) = (0,0,1) \text{ i } f(x) = h_+^{-1} P h_+(x), \text{ per a } x \neq (0,0,1).$$

És ben conegut que l'aplicació $f$ que en resulta és suau, fins i tot en un entorn del pol nord $(0,0,1)$.



Projecció estereogràfica

Per veure-ho introduïm la projecció estereogràfica $h_-$ des del pol sud $(0,0,-1)$ i definim

$$Q(z) = h_- f h_-^{-1}(z).$$

Observem, per geometria elemental, que

$$h_+ h_-^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Ara, si $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, on $a_0 \neq 0$, aleshores un càlcul simple mostra que

$$Q(z) = \frac{z^n}{\overline{a_0} + \overline{a_1} z + \cdots + \overline{a_n} z^n}.$$

Aleshores $Q$ és suau en un entorn del 0. Per tant, $f = h_-^{-1} Q h_-$ és suau en un entorn del pol nord $(0, 0, 1)$.

Observem que $f$ només té un nombre finit de punts crítics. La funció polinòmica induïda per $P$ solament deixa de ser un difeomorfisme local en els punts en els quals s'anul·la la derivada $P'(z) = \sum j\, a_{n-j} z^{j-1}$ del polinomi $P$. De punts d'aquests només n'hi ha una quantitat finita atès que $P'$ no és idènticament nul.

El conjunt de punts regulars de $f$ és una esfera, llevat un nombre finit de punts. És, doncs, un conjunt connex.

Per tant, la funció localment constant $\# f^{-1}(y)$ ha de ser constant damunt d'aquest conjunt. En conseqüència $\# f^{-1}(y)$ no pot ser nul·la arreu. D'on en resulta que no pot ser nul·la enlloc. De tot això segueix que $f$ és una aplicació exhaustiva, i en particular el polinomi $P$ ha de tenir un zero. ■

## 7. Cloenda

Hem vist, doncs, com prometíem en el *Resum*, una visió epistemològica i heurística del TFA; una exposició històrica dels intents de demostració anteriors a Carl Friedrich Gauss, i de les crítiques a les que les sotmeté Gauss; i, per fi, una descripció de les demostracions —ja rigoroses— de l'insigne mestre de mestres alemany.

Però alhora hem passat revista a la presentació del TFA i del TFL en els estudis de l'ensenyament de les matemàtiques a les Universitats catalanes d'avui i d'ahir —i, m'atreviria a dir, per la bibliografia que he manejat, d'arreu, des de fa més de cinquanta anys.

Finalment, a través de la meva experiència personal, hem fet un repàs prou exhaustiu i detallat d'un bon nombre de demostracions de TFA que l'estudiós de la matemàtica pot trobar en textos més o menys divulgatius, històrics, i específics de certes matèries. Són moltes, força variades, i recorren, en llur demostració, a aspectes i tècniques ben diversos de la matemàtica.[183]

I, a més, he suggerit un guió que pot servir per fer un estudi complet —com ara una tesi doctoral d'història de la matemàtica— sobre TFA, analitzant els contextos en què cada una de les demostracions concretes es desenvolupa i els lligams que hi ha entre elles. Aquests lligams palesen el que anomeno els "corrents subterranis" que nodreixen terrenys prou allunyats aparentement i geogràfica, en el mapa de la matemàtica, entesa erròniament com un "regne de taifes", cada un amb el seu propi reietó. Al meu entendre fóra un estudi d'una riquesa epistemològica, històrica i matemàtica enorme.

[183]Un cop acabat d'escriure aquest text, al número d'octubre de 2005 de l'*American Mathematical Montly*, 705-712, Georg Leibman ofereix una demostració noestàndard del TFA. M'ha fet molta gràcia —alhora que l'he trobat d'allò més interessant—, perquè, a mitjans dels anys vuitanta del segle passat, em vaig interessar molt per aquesta manera d'entendre la matemàtica, i vaig fer algun curs de doctorat sobre la qüestió. També va ser en aquella època que vàrem connectar amb l'escola de *monsieur* Georges Reeb [1920-1992], de la Universitat Louis Pasteur de Strabourg, un dels fundadors de l'escola francesa de l'anàlisi noestàndard. Un resultat acadèmic d'aquesta tasca fou la tesi doctoral de Miquel Ralló, actualment professor del Departament de *Matemàtica Aplicada* III (campus de Terrassa), dirigida per Miguel Ángel Canela Campos.

No l'he reproduït en aquest article per tres raons: dues de més serioses, i una darrera, més banal. En primer lloc, perquè, de fet, l'article ja l'havia donat per tancat i és bo respectar els propis criteris. En segon lloc, perquè l'*anàlisi noestàndard* no és gaire conegut pels estudiants de matemàtiques de les nostres facultats i, com ja he repetit massa vegades, aquest article l'he confegit pensant en elles i en ells de manera que els sigui comprensible, il·lustratiu, educatiu, i enriquidor. Finalment, perquè ja m'he allargat massa, i, com es diu popularment, "els massa piquen".

Personatges il·lustres citats

## Històrics

d'Alembert, Jean le Rond [París, 17 de novembre de 1717-París, 29 d'octubre de 1783]

Argand, Jean-Robert [Gènova, 18 de juliol de 1768-París, 13 d'agost de 1822]

Bernoulli, Daniel [Groningen, 8 de febrer de 1700-Basilea, 17 de març de 1782]

Bernoulli, Johann [Basilea, 27 de juliol de 1667-Basilea, 1 de gener de 1748]

Bézout, Étienne [Nemours, 31 de març de 1730-Basses-Loges, 27 de setembre de 1783]

Birkhoff, Garret [Princeton, 19 de gener de 1911-Water Mill, 22 de novembre de 1996]

Bolzano, Bernhard [Praga, 5 d'octubre de 1781-Praga, 14 de desembre de 1848]

Bombelli, Rafael [Bolonya, gener de 1526-Roma(?), 1573]

Borchardt, Carl Wilhelm [Berlín, 22 de febrer de 1817-Rudersdorf, 27 de juny de 1880]

Cantor, Georg [Petersburg, 3 de març de 1845-Halle, 6 de gener de 1918]

Cardano, Girolamo [Pavia, 24 de setembre de 1501-Roma, 21 de setembre de 1576]

Cauchy, Augustin Louis [París, 21 d'agost de 1789-París, 23 de maig 1857]

Cayley, Arthur [Richmond, Surrey, 16 d'agost de 1821-Cambridge, 26 de gener de 1895]

Clifford, William Kingdom [Exeter, 4 de maig de 1845-Illa de Madeira, 3 de març de 1879]

Crelle, August Leopold [Eichwerder, 11 de març de 1780-Berlín, 6 d'octubre de 1855]

Dedekind, Julius Wilhelm Richard [Brunsvic, 6 d'octubre de 1831-Brunsvic, 12 de febrer de 1916]

Descartes, René [La Haye, avui Descartes, 31 de març de 1596-Estocolm, 11 de febrer de 1650]

Euler, Leonhard [Basilea, 15 d'abril de 1707-Petersburg, 18 de setembre de 1783]

Fermat, Pierre de [Beaumont-des-Lomagne, 17 d'agost de 1601- Castres, 12 gener de 1665]

FONTANA, NICOLÓ, conegut també amb el nom de TARTAGLIA [Brescia, 1500-Florència, 13 de desembre de 1557]

FUBINI, GUIDO [Venècia, 19 de gener de 1879-Nova York, 6 de juny de 1943]

GALOIS, EVARISTE [Bourg La Reine, 25 d'octubre de 1811-París, 31 de maig de 1832]

GAUSS, JOHAN CARL FRIEDRICH [Brunsvic, 30 d'abril de 1777-Göttingen, 23 de febrer de 1855]

GIRARD, ALBERT [Saint Mihiel, 1595-Leiden, 8 de desembre de 1632]

GOLDBACH, CHRISTIAN [Königsberg (Prússia, avui Rússia), 18 de març de 1690-Moscou, 20 de novembre de 1764]

HEINE, HEINRICH EDUARD [Berlín, 16 de març de 1821-Halle, 21 d'octubre de 1881]

HILBERT, DAVID [Königsberg (Prússia, avui Rússia), 23 de gener de 1862-Göttingen, 14 de febrer de 1943]

KRONECKER, LEOPOLD [Liegnitz (Prússia, avui Polònia), 7 de desembre de 1823-Berlín, 29 de desembre de 1891]

LAGRANGE, JOSEPH-LOUIS [Torí, 25 de gener de 1736-París, 10 d'abril de 1813]

LAPLACE, PIERRE-SIMON [Beaumont-en-Auge, 23 de març de 1749-París, 5 de març de 1823]

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM VON [Leipzig, 1 de juliol de 1646-Hannover, 14 de novembre de 1716]

LIOUVILLE, JOSEPH [Saint-Omer, 24 de març de 1809-París, 8 de setembre de 1882]

LORIA, GINO [Màntua, 19 de maig de 1862-Gènova, 30 de gener de 1954]

MAC LANE, SAUNDERS [Taftville (Connecticut), 4 d'agost de 1909-San Francisco (California), 14 d'abril de 2005]

MÉRAY, CHARLES ROBERT [Chalon-sur-Saône, 12 de novembre de 1835-Dijon, 2 de febrer de 1911]

NETTO, EUGEN OTTO ERWIN [Halle, 20 de juny de 1848-Giessen, 13 de maig de 1919]

NEWTON, SIR ISAAC [Woolsthorpe (Lincolnshire), 4 de gener de 1643-Londres, 31 de març de 1727]

OSTROWSKI, ALEXANDER [Kiev, 25 de setembre de 1893-Montagnola (Lugano), 20 de novembre de 1986]

PFAFF, JOHANN FRIEDRICH [Stuttgart, 22 de desembre de 1765-Halle, 21 d'abril de 1825]

PUISEUX, VICTOR ALEXANDRE [Argenteuil, 16 d'abril de 1820-Frontenay, 9 de setembre de 1883]

ROUCHÉ, EUGÈNE [Sommières, 8 d'agost de 1832-Lunèl, 19 d'agost de 1910]

Ruffini, Paolo [Valentano (Estats papals), 22 de setembre de 1765-Mòdena, 10 de maig de 1822]

Sylow, Peter Ludwig [Christiania (avui Oslo), 12 de desembre de 1832-Christiania (avui Oslo), 7 de setembre de 1918]

Sylvester, James Joseph [Londres, 3 de setembre de 1814-Londres, 15 de març de 1897]

Viète, François [Fontenay-le-Comte, 1540-París, 13 de desembre de 1603]

Weierstrass, Karl Theodor [Ostenfelde, 31 d'octubre de 1815-Berlín, 19 de febrer de 1897]

## Professors de matemàtiques de la UB, quan hi estudiava

Augé Farreras, Joan [Barcelona, 10 de juny de 1919-Barcelona, 9 de febrer de 1993]

Linés Escardó, Enrique [Madrid, 8 de novembre de 1914-Madrid, 1988]

Mallol Balmanya, Rafel [Sant Feliu de Guixols, 27 de setembre de 1925-Barcelona, 20 de maig de 1988]

Sales Vallés, Francesc d'Assís [Terrassa, 29 de novembre de 1914-Barcelona, 10 de desembre de 2005]

Teixidor i Batlle, Josep [Llers, 10 de novembre de 1920-Llers, 7 d'agost de 1989]

Vaquer Timoner, Josep [Maó, 1 de juliol de 1928- ]

## Professors de matemàtiques de l'Escola Tècnica Superior d'Arquitectura de la UPC, quan n'era professor

Pi-Calleja, Pedro [Barcelona, 19 de gener de 1907-Barcelona 11 d'octubre de 1986]

Trillas i Ruíz, Enric [Barcelona el 29 de Maig de 1940- ]

## Referències

[AH35] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlín, 1935.

[Ale56] A. D. Aleksandrov. *Mathematics: Its Contents, Methods, and Meaning*. M.I.T. Press, Cambridge. Massachussets, 1956. Traducció castellana de Manuel López Rodríguez, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, en tres volums. Alianza Editorial. Madrid, 1974.

[Arg06] Jean Robert Argand. *Essais sur un manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. París, 1806. Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. Gottlieb Haase. París, 1971.

[Bas60] Isabella G. Bashmakova. Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques. *Archives Internationelles d'Histoire des Sciences*, pages 211–222, 1960.

[Ber02] Johann Bernoulli. Solution d'un problème concernant le calcul integral, avec quelques abregés par rapport à ce calcul. *Mémoires de l'Academie Royales des Sciences de Paris*, 1702. *Opera Omnia*, II, 393–400. Traducció anglesa parcial a [FG87, pàgines 436–439].

[BL67] Garret Birkhoff and Saunders Mac Lane. *Algebra*. The MacMillan Company, Nova York, 1967. Traducció francesa, en dos volums, de J. Weil, *Algèbre*. Gauthier-Villars Éditeur. París.

[Bol17] Bernhard Bolzano. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je wei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Gottlieb Haase, Praga, 1817. Traducció anglesa de J. B. Russ, a *Historia mathematica*, **7**, 156–185.

[Bom92] Rafael Bombelli. *Algebra*. Bolonya, 1592.

[Bom96] Rafael Bombelli. *Algebra de Bombelli*. Feltrinelli, Milà, 1996. Edició de Bertolotti.

[Boy68] Carl B. Boyer. *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons, Nova York, 1968. Edició castellana a Alianza Editorial. Madrid, 1986.

[Can72] Georg Cantor. Über die ausdehnung eines satzes aus der theorie der trigonomoterischen reihen. *Matematische Annalen*, 5:123–132, 1872. Traducció francesa a *Acta mathematica*, **2** (1883), 336–348.

[Car45] Girolamo Cardano. *Artis Magnæ, sive de regulis algebraicis*. Nürnberg, 1545. Traducció anglesa, de R. T. Witmer, *The Great Art*. MIT Press. Cambridge, 1968.

[Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, París, 1961.

[Cas00] Eduard Casas. *Singularities of Plane Curves*. Cambridge University Pres, Cambridge, 2000.

[Cau44] Augustin-Louis Cauchy. Mémoire sur les fonctions complémentaires. *Comptes Rendues*, 19:1377–1381, 1844. A a *OEuvres* (1), **8**, 378–385.

[Cau47] Augustin-Louis Cauchy. Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques, substituée à la théorie des imaginaires. *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 4:87–110, 1847.

[CL88] Manuel Castellet and Irene Llerena. *Àlgebra lineal i geometria.* Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1988.

[Cla71] A. Clark. *Elements of Abstract Alegbra.* Wadsworth Publishing Company, Califòrnia, 1971. Traducció castellana de Joaquín Arregui, *Elementos de álgebra abstracta*. Editorial Alhambra, S. A. Barcelona, 1974.

[Cli70] William Kingdom Clifford. Proof that every rational equation has a root. *Cambridge Philosophical Society' Proceedings*, 2:156–257, 1870. A *Mathematical Papers*, 20. Chelsea. Nova York, 1968.

[Cox04] David A. Cox. *Galois Theory.* John Wiley & Sons, Nova York, 2004.

[d'A45] Jean le Rond d'Alembert. Premier text de d'alembert sur le théorème fondamental de l'algèbre. *Publicacions v*, pages 102–103, 1745. A [Gil91, 134–136].

[d'A46] Jean le Rond d'Alembert. Recherches sur le calcul intégral. *Actes de l'Académie des Sciences de Paris*, pages 182–224, 1746.

[DDJ61] Paul Dubreil and Marie Louise Dubreil-Jacotin. *Leçons d'algèbre moderne.* Dunod, París, 1961.

[Ded72] Richard Dedekind. *Stetigkeit und irrationale Zahlen, erste Auflage.* 1872. A *Werke*, III, 315–334.

[Des37] René Descartes. *Géométrie.* Leyden, 1637.

[Des99] René Descartes. *René Descartes. La Geometria.* Eumo Editorial, Vic, 1999.

[Dho92] Jean Dhombres. *Leçons de l'École Normale de l'an* III. *Leçons de mathématiques.* Dunod, París, 1992.

[EB69] Étienne Bézout. *Course de mathématiques.* París, 1764-1769.

[EB79] Étienne Bézout. *Théorie générale des équations algébriques.* París, 1779.

[Eul43] Leonhard Euler. De integrationem æquationem differentialium altiorum gradum. *Miscellania berlionensia*, 7:193–242, 1743. *Opera Omnia*, XXII, ser. 1, 181–213.

[Eul48] Leonhard Euler. *Introduction in Analysin Infinitorum.* Basilea, 1748. A *Opera Omnia*, VIII, ser. 1. Traducció castellana de José Luís Arantegui Tamayo, amb anotacions de José Durán Guardeño, *Introducción al análisis de los infinitos*. Sevilla, 2000.

[Eul49] Leonhard Euler. Recherches sur les racines imaginaires des équations. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, anné 1751:222–228, 1749. A *Opera Omnia*, VI, ser. 1, 78–147.

[Eul50] Leonhard Euler. Methodus æquationes differentialibus, quæcertis tantum casibus integrationem admittunt. *Novi Commentarii Academia Scientiarum Petrop.*, pages 3–35, 1750. A *Opera Omnia*, ser. 1, XXII, 108–149, publicat l'any 1753.

[Eul64] Leonhard Euler. Nouvelle methode d'eliminer les quantités inconnues des equations. *Mémoire de l'Acadèmie des Sciences*, pages 91–104, 1764. A *Opera Omnia*, ser. 1, VI, 197–211, publicat l'any 1753.

[Ewi90] J. H. Ewing. *Numbers*. Springer-Verlag, Nova York, 1990.

[FG87] John Fauvel and Jeremy Gray. *The History of Mathematics. A reader*. MacMillan and Open University, Londres, 1987.

[FR97] Benjamin Fine and Gerhard Rosenberger. *The Fundamental Theorem of Algebra*. Springer-Verlag, Berlín, 1997.

[Fri98] Jean-Pierre Friedelemeyer. *La première démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre*. Ellipses, IREM de Poitiers, 1998. A l'obra conjunta Images, Imaginaires, Imaginations, pàgines 279–324.

[Fub57] Guido Fubini. Sugli integrali multipli. *Mémoire de l'Acadèmie des Sciences*, pages 608–614, 1957. A *Opere scelte*, I, 243–249. Cremonese, 1958.

[Gau97] Carl Friedrich Gauss. *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (demostració primera)*. PhD thesis, Helmstedt, 1797. Publicat el 1799, a *Werke*, III, 1–30, i a [Net13, pàgines 1–36].

[Gau15] Carl Friedrich Gauss. Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (demostració segona, desembre de 1815). *Comm. Soc. Göttingen*, 3:37–60, 1814–1815. A *Werke*, III, 31–56, i a [Net13, pàgines 68–79].

[Gau50] Carl Friedrich Gauss. Beiträge zur theorie der algebraischen gleichungen (demostració quarta). *Abhand. der Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 4:3–34, 1848–1850. A *Werke*, III, 71–104, i a [Net13, pàgines 68–79].

[Ger50] C. I. Gerhardt. *Leibniziens Mathematische Scriften*. Berlín, 1850. Reeditat per Olms Verlag. Hidelsheim, 1962.

[Ger99] C. I. Gerhardt. *Briefweschel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*. Berlín, 1899.

[Gil91] Christian Gilain. Sur l'histoire du thèoréme fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral. *Archive for History of Exact Sciences*, 42:91–136, 1991.

[God63] Roger Godement. *Cours d'algèbre*. Hermann, París, 1963. Traducció castellana de María Meléndez Rolla, *Álgebra*. Editorial Tecnos. Madrid, 1967.

[Hei72] Eduard Heine. Die elemente der functionenlehre. *Journal für die reine und angew. Math.*, 74:172–182, 1872.

[Hil00] David Hilbert. Über den Zahlbegriff. *Archive for History of Exact Sciences*, 8:180–184–136, 1900. Traducció castellana de Francisco Cebrián, a *David Hilbert. Fundamentos de la Geometría*, apèndix VI, 244–249.

[Hou89] Christian Houzel. *D'Alembert et le thèoréme fondamental de l'algèbre*. Éditions des archives contemporaines, París, 1989. A *Jean d'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix*, pàgines 351-360.

[Kli72] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, Oxford, 1972. Traducció castellana de Carlos Fernández i Alejandro Garciadiego, sota la coordinació de Jesús Hernández, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias*, en tres volums. Alianza Editorial. Madrid, 1992.

[Kos72] E. Kossak. *Die Elemente der Arithmetik.* Progarmm Friedr-Werder Gymm., Berlín, 1972.

[Kro91] Leopold Kronecker. Ein fundamentalsatz der allgemeinen arithmetik. *Journal für die reine und angew. Math.*, 42:490–510, 1991.

[Lan72] Serge Lang. *Algebra.* Addision-Wesley Publishing Company. Inc., Nova York, 1972. Traducció castellana de Milagros Ancochea, *Álgebra*. Aguilar. Madrid, 1971.

[Lap95] Pierre Simon Laplace. *Leçons de mathématiques donnés a l'École Normal en 1795.* París, 1795. A *Oeuvres complètes*, XIV, 10–177. També a [Dho92].

[Lei02] Gottfried Wilhelm Leibniz. Speciem novum analyseos pro scientia infinity circa summas et quadraturas. *Acta Eroditorum*, maig 1702. Editat per [Ger50, 350–361]. Traducció francesa a [Per89, 383–401].

[Lei03] Gottfried Wilhelm Leibniz. Continuatio analyseos quadratorum rationalium. *Acta Eroditorum*, gener 1703. Editat per [Ger50, 361–377]. Traducció francesa a [Per89, 402–422].

[Lei05] Georg Leibman. A nonstandard proof of the fundamental theorem of algebra. *The American Mathematical Montly*, 112:490–510, 2005.

[Lor91] Gino Loria. Il teorema fondamentale della Teoria delle equazione algebriche. *Rivista di matematica*, 1:185–248, 1891.

[LR64] A. Lentin and J. Rivaud. *Leçons d'algèbre moderne.* Librairie Vuibert, París, 1964. Traducció castellana d'Emilio Motilva Ylarri, *Álgebra Moderna*. Aguilar. Madrid, 1967.

[LR72] N. Levinson and R. M. Redheffer. *Topology.* Holden-Day, San Francisco, 1972. Traducció castellana d'Emilio Motilva Ylarri, *Álgebra Moderna*. Aguilar. Madrid, 1967.

[Maz03] B. Mazur. *Imagining numbers particularly the square root of minus fifteen.* Penguin Books, Londres, 2003.

[Mer69] Charles Meray. Rémarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir des limites à des variables données. *Revue des Sociétés Savantes, Sci. math, phys. nat.*, 2(4):280–289, 1869.

[Mes61] Herbert Meschkowski. *Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961. Traducció anglesa de John Dyer-Bennet, *Ways of thought of great mathematicians: An Approach to the History of Mathematics* . Holden Day. San Francisco, 1964.

[Mil65] John W. Milnor. *Topology from differentiable Viewpoint.* The University Press of Virginia, Virgínia, 1965. Edició vuitena, 1990.

[Net13] Eugen Netto. Die veir gauss'schen beweise für die zerlegung ganzer algebraischer funktionen in reelle faktoren ersten oder zweiter grades. *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaft*, 14:1–79, 1913.

[New07] Isaac Newton. *Arithmetica Universalis.* Cambridge, 1707. Traducció anglesa de D. T. Whiteside (editor), *Mathematical Works of Isaac Newton*, II. Johnson Reprint Co. Londres, 1964.

[Nom66] Katsumi Nomizu. *Fundamentals of Linear Algebra.* McGraw-Hill Book Company, Nova York, 1966.

[NV91] Eugen Netto and Raymond Le Vavasseur. *Le théorème fondamental.* Jacques Gabbay, París, 1991. Dins l'*Enciclopédie des Sciences Mathématiques*, I, 189-205. Jacques Gabbay. París, 1991-1995.

[Ost20] Alexander Ostrowski. Über den ersten und vierten gauss'chen beweis des fundamentalsatzes der algebra. *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen*, 2:1–18, 1920. A *Werke* (de Gauss), X, 2, 1-18.

[Per89] Marc Permantier. *Leibniz, G. W.* Vrin, París, 1989.

[Pet70] S. S. Petrova. Teorema fonamental de l'àlgebra (en rus). *Ist. Mat. Isslead.*, 10:257–304, 1970.

[Pet74] S. S. Petrova. Sur l'histoire des démonstrations analytiques du thèoréme fondamental del l'algèbre. *Historia Mathematica*, 1:255–261, 1974.

[Pla92] Josep Pla. The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss. *Publicacions matemàtiques*, 36:879–911, 1992.

[Pla98] Josep Pla. *Damunt les espatlles dels gegants.* Edicions de La Magrana, Barcelona, 1998. Premi de Literatura científica (Fundació Catalana per a la Recerca) de l'any 1998.

[Pla06] Josep Pla. *Introducció a la metodologia de la matemàtica.* UBe, Barcelona, 2006.

[Pui50] V. A. Puiseux. Recherches sur les fonctions algébriques. *Journal of Mathematics*, 15:365–480, 1850.

[Que64] Michel Queysanne. *Algèbre.* Armand Colin, París, 1964.

[Rem0a] Reinhold Remmert. *Complex Numbers.* Springer-Verlag, Nova York, 1990a. A [Ewi90, pàgines 55–96].

[Rem0b] Reinhold Remmert. *The fundamental Theorem of Algebra.* Springer-Verlag, Nova York, 1990b. A [Ewi90, pàgines 97–122].

[Rot90] Joseph Rotman. *Galois Theory.* Springer-Verlag, Berlín, 1990.

[RP15] Julio Rey Pastor. *Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático.* Universidad de Oviedo, Oviedo, 1915. Reeditat amb el títol de *Lecciones de álgebra*, a A. Medina, i a C. Bermejo. Madrid, 1947, quarta edició.

[RPa15] Julio Rey Pastor and alii. *Análisis Matemático, tres volúmenes.* Kapelusz, Buenos Aires, 1915. Els dos altres autors són Pedro Pi Calleja i Cèsar A. Trejo. Fou reeditat amb el títol de *Lecciones de álgebra*, a C. Bermejo. Madrid, 1947, quarta edició.

[Smi59] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics.* Dover Publications, Inc, Nova York, 1959.

[SP60] W. S.Burnside and A. W. Panton. *The Theory of equations, dos volums.* Dover Publications, Inc., Nova York, 1960.

[Spi64] Michel Spivak. *Calculus.* W. A. Benjamin, Inc, Nova York, 1964. Traducció castellana de Bartolomé Frontera, *Cálculo*. Editorial Reverté, S. A. Barcelona, 1970.

[Ste73] Ian Stewart. *Galois Theory.* Chapman and Hall, Londres, 1973.

[Sti78] John Stillwell. *Mathematics and its History.* Springer-Verlag, Berlín, 1978.

[Sti94] John Stillwell. *Elements of Algebra*. Springer-Verlag, Berlín, 1994.

[Str69] Dirk J. Struik. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge. Massachusetts, 1969.

[Tig01] Jean-Pierre Tignol. *Galois theory of algebraic equations*. World Scientific, Singapur, 2001.

[TV68] Josep Teixidor and Josep Vaquer. *Curso de matemáticas*. Universitat de Barcelona, Barcelona, 1968.

[Usp48] J. V. Uspensky. *Theory of Equations*. MacGraw Hill, Nova York, 1948. Traducció castellana de J. C. Maquiera i J. P. Varela, *Teoría de ecuaciones*. Limusa. Mèxic, 1990.

[Viè91] François Viète. *De œquationum recognitione et emendatione. Tractatus duo*. París, 1591. A *Opera*, 82–162. Traducció anglesa de R. T. Witmer, *The Analytic Art*. Kent State University Press. Ohio, 1983.

[Wae31] Bartel Leenert van der Waerden. *Moderne Algebra*. Julius Springer, Berlín, 1931. Traducció anglesa de Fred Blum, *Modern Algebra*. Frederick Ungar Publishing, CO. Nova York, 1949.

[Wae85] Bartel Leenert van der Waerden. *A History of Algebra*. Springer-Verlag, Berlín, 1985.

[Wus70] Hans Wussing. *Johann Friedrich Pfaff*. Charles Scribner's Sons, Nova York, 1970. A *Bibliographical Dictionary of Scientific Biography* (Gillespie, Charles Coulton, editor). Charles Scribner's Sons, Nova York, 1970–1980, edició de 1989-1991, IV, 1989.