HAMILTON Y LA TEORÍA DE GALOIS

JUAN J. MORALES RUIZ

Resumen. En las líneas que vienen a continuación trataré de dar una breve idea de mis trabajos en colaboración con Ramis sobre la no integrabilidad de los sistemas Hamiltonianos mediante la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales [13, 14, 15] (véase también [12]). Como una aplicación concreta estudiaremos el problema de Hill, que es un sistema dinámico significativo de Mecánica Celeste del cual existía evidencia numérica de su no integrabilidad, pero todos los intentos para demostrarla habían fracasado hasta la fecha [18].

1. Introducción

La idea principal de mi trabajo con Ramis está basada en el siguiente principio heurístico:

Dado un sistema dinámico "integrable" definido por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{z} = X(z), \;\; z = (z_1, ..., z_m),$$

y una de sus soluciones particulares $\Gamma \, : \; z = z(t)$*, necesariamente la ecuación en variaciones (EV) a lo largo de* Γ

$$\dot{\xi} = X'(z(t))\xi$$

es también "integrable".

Recordemos que la solución de la ecuación en variaciones nos da la parte lineal del flujo del campo X a lo largo de Γ. Entonces está claro el porqué del anterior principio: si la dinámica del sistema no lineal no es complicada —es decir, el sistema es "integrable"— parece razonable pensar que la dinámica lineal tampoco puede ser complicada.

Está claro que el anterior principio no es un teorema sino tan sólo un principio de trabajo, pues los conceptos de integrabilidad involucrados no están bien definidos: en el momento actual no existe una formulación adecuada de integrabilidad que se adapte bien a cualquier sistema dinámico. Sin embargo para los sistemas Hamiltonianos sí existe una buena definición de integrabilidad, es la llamada integrabilidad de Liouville o integrabilidad completa. Para las ecuaciones diferenciales lineales también poseemos una adecuada definición de integrabilidad en el contexto de la teoría de Galois diferencial de ecuaciones diferenciales lineales o teoría de Picard–Vessiot. Por tanto, en este sentido se debe entender la integrabilidad de la ecuación en variaciones (EV). Por otro lado, en lugar de trabajar con la ecuación en variaciones (EV) se puede reducir una dimensión mediante la llamada ecuación en variaciones normales a lo largo de Γ (EVN), pues al ser el campo una solución de (EV), podemos reducir al fibrado normal. En el caso de los sistemas Hamiltonianos se puede reducir más (un grado de libertad) debido a la estructura simpléctica.

Nuestro objetivo es aplicar la idea anterior a los sistemas Hamiltonianos y veremos que efectivamente nuestro principio es correcto en este caso. Con lo cual obtendremos un criterio de no integrabilidad para esos sistemas.

De ahora en adelante supondremos que todos los sistemas dinámicos considerados son analíticos complejos, siendo tanto el espacio de fases como el tiempo complejos.

Empezaremos por enunciar los conceptos y resultados de la teoría de Galois diferencial mínimos necesarios, a continuación enunciaremos una de las versiones del teorema principal, pasando después a aplicarlo al problema de Hill.

2. Teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales

Un cuerpo diferencial K es un cuerpo con una derivación, es decir, un morfismo aditivo que satisface la regla de Leibniz. Un ejemplo importante para nosotros es el caso en que K es el cuerpo de funciones meromorfas $M(\Gamma)$ sobre una superficie de Riemann Γ, siendo la derivación

d/dt la derivada usual de estas funciones, con t un parámetro local sobre Γ. Como este será el ejemplo importante en estas notas, de ahora en adelante la derivación la escribiremos como d/dt. Ejemplos concretos son los cuerpos de funciones elípticas o el cuerpo de funciones racionales $\mathbf{C}(t)$ = cuerpo de funciones meromorfas sobre la esfera de Riemann $\mathbf{P}^1$. Como es usual, el cuerpo de constantes C de K es, por definición, el núcleo de la derivación. Si K es el cuerpo de funciones meromorfas $M(\Gamma)$ sobre una superficie de Riemann Γ, entonces C es el cuerpo de los números complejos $\mathbf{C}$.

A una ecuación diferencial lineal a coficientes en K

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi, \quad A \in Mat(m, K), \tag{1}$$

asociamos la llamada extensión de Picard-Vessiot, que por definición es la extensión L de K que satisface las siguientes condiciones:

a) $L := K(u_{11}, u_{12}, ..., u_{mm})$, siendo $U := (u_{ij})$ una matriz fundamental de (1), es decir, sus columnas generan un espacio vectorial sobre el cuerpo de constantes de dimensión m.

b) El cuerpo L tiene el mismo cuerpo de constantes, C, que el cuerpo K de coeficientes. Está claro que L es un cuerpo diferencial, pues al venir definido L mediante funciones racionales a coeficientes en K, sólo hace falta definir la derivación a través de (1), ya que las columnas de U satisfacen (1):

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U.$$

La extensión de Picard-Vessiot $K \subset L$ asociada a (1) es la análoga a la extensión de Galois de un polinomio en teoría de Galois clásica.

El teorema de Kronecker sobre la existencia de cuerpos de descomposición tiene aquí también su análogo: si el cuerpo de constantes C de K es de característica cero y algebraicamente cerrado, existe una extensión de Picard-Vessiot L de K y es única, salvo automorfismos diferenciales (este teorema algebraico abstracto es debido a Kolchin, aunque en el caso clásico de cuerpos de funciones es esencialmente el teorema de existencia y unicidad de Cauchy de ecuaciones diferenciales).

Un automorfismo diferencial $\sigma : L \to L$ es un automorfismo del cuerpo L que conmuta con la derivada d/dt. Entonces, en forma similar a la teoría de Galois de polinomios, se define el grupo de Galois de la ecuación diferencial (1) como

$G := Gal(1) = Gal(L/K) = \{\sigma : L \to L : \sigma$ automorfismo diferencial que es la identidad sobre $K\}$.

En otras palabras, G es el grupo de transformaciones de L que deja invariantes todas las relaciones entre u_{ij}, du_{ij}/dt, d^2u_{ij}/dt^2, etc... Por tanto se puede considerar como un grupo de simetrias "internas" de la ecuación diferencial (1). Creemos importante mencinar que en la situación analítica en la cual estamos interesados aquí, donde el cuerpo de coeficientes será un cuerpo de funciones meromorfas $M(\Gamma)$, el grupo de monodromía de la ecuación (1) está contenido en el grupo de Galois G.

En la teoría de Galois clásica el grupo de Galois es un grupo de permutaciones entre las raices. Aquí es un grupo lineal de un tipo especial:

Teorema 1

G es un subgrupo algebraico lineal de $GL(m, C)$

La clave del teorema anterior está en el hecho de que el grupo de Galois sea un grupo *algebraico*. Que es un grupo lineal a coeficientes en C es algo simple de demostrar ya que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial sobre C.

Ya estamos en condiciones de definir y caracterizar la integrabilidad de ecuaciones diferenciales lineales.

Se dice que la ecuación (1) es integrable si la extensión L se puede obtener de K mediante (una combinación de) extensiones algebraicas, cuadraturas y exponenciales de cuadraturas. Sea G^0 la componente de la identidad del grupo algebraico G.

Teorema 2

(1) *es integrable* $\Leftrightarrow$ G^0 *es resoluble*

Observamos que si se demuestra que G^0 es abeliano, en particular, la ecuación es resoluble, al ser todo grupo abeliano resoluble.

Sin entrar en detalles, comentamos que esta teoría también satisface un teorema de correspondencia Galoisiana, donde los subgrupos algebraicos de G se corresponden con extensiones diferenciales intermedias de la extensión de Picard-Vessiot. Más información sobre la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales lineales puede encontrarse en las referencias [6, 7, 12, 10, 22]. Los resultados esenciales ya se encuentran en un lenguaje clásico en la tesis de Vessiot [23].

3. No integrabilidad

Sea X_H un campo Hamiltoniano analítico definido sobre una variedad simpléctica analílitica M de dimensión (compleja) $2n$. El sistema Hamiltoniano correspondiente se escribe en coordenadas canónicas como

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i},$$
$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$i = 1, ..., n$. La función $H : M \to \mathbf{C}$, es la llamada función de Hamilton que define el sistema Hamiltoniano. Escribimos esto de una forma más compacta como

$$\dot{z} = X_H(z),$$

con $z = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$. A veces decimos simplemente que X_H es el sistema Hamiltoniano.

Diremos que un sistema Hamiltoniano X_H es integrable (o que es integrable en el sentido de Liouville mediante integrales primeras meromorfas) si existen $f_1 = H, f_2, ..., f_n$ funciones meromorfas (complejas) sobre M, tales que $\{f_i, f_j\} = 0$, $i, j = 1, 2, .., n$ (se dice que f_i, f_j están en involución).

Recordamos que el paréntesis de Poisson sobre las funciones de una variedad simpléctica se puede definir como $\{f, g\} = L_{X_f} g :=$ derivada de Lie de g según el campo Hamiltoniano definido por f. En particular, las funciones f_i son todas ellas integrales primeras de X_H y se obtiene una estructura de álgebra de Lie abeliana que permite integrar el sistema Hamiltoniano X_H en forma finita, siendo además la dinámica muy simple. Una referencia típica sobre sistemas Hamiltonianos es [1]. Un resumen completo detallado de todos los aspectos que nos interesan aquí se encuentra en el capítulo 3 de [12].

El resultado principal que necesitamos nos dice que la estructura abeliana anterior se proyecta en el jet a primer orden sobre una curva integral:

Teorema 3[13]

Sea X_H un sistema Hamiltoniano integrable y Γ una curva integral de X_H, y $G := Gal(EV)$, $G_N := Gal(EVN)$, los grupos de Galois de la ecuación en variaciones a lo largo de Γ y de la ecuación en variaciones normal a lo largo de Γ, respectivamente. Entonces los grupos G^0 y G_N^0 son necesariamente abelianos.

El cuerpo de coeficientes K en el anterior teorema es el cuerpo de funciones meromorfas sobre Γ,$M(\Gamma)$.

En particular, observamos que por el teorema 3 tanto la ecuación en variaciones como la ecuación en variaciones normal son integrables, con lo cual hemos obtenido un resultado que claramente satisface nuestro principio heurístico de la sección 1. Para demostrar que un sistema Hamiltoniano no es integrable, basta probar que la componente de la identidad del grupo de Galois de alguna de las ecuaciones en variaciones anteriores es no abeliano.

Este teorema es en realidad una variante típica de varios teoremas posibles según el grado de regularidad de las integrales primeras f_i y el tipo de singularidades de la ecuación en variaciones [13, 12].

3.1. Comentarios históricos.

El teorema 3 debería ser considerado como la culminación de una serie de trabajos que comezaron con el estudio hecho por Liapounov sobre el sólido de Kovalevskaya y con los resultados de no integrabilidad de Poincaré. Los pasos históricos más relevantes de este proceso son, a nuestro entender, los siguientes:

1) Lyapounov (1894) [9] (ver también [8], pag. 56). Lyapounov utilizó las ecuaciones en variaciones del sólido para demostrar de una manera rigurosa un resultado famoso de Kovalevskaya: los únicos casos en que la solución general del sólido rígido pesante con un punto fijo es univaluada, es para los casos integrables ya conocidos de Euler, Lagrange y Kovalevskaya.

2) Poincaré (1897) [20]. Poincaré obtuvo una condición necesaria de integrabilidad en el caso de un sistema Hamiltoniano real mediante la ecuación en variaciones a lo largo de una órbita periódica: los multiplicadores de la matriz de monodromía deben ser la unidad. Para ver la conexión del teorema de Poincaré con los resultados expuestos aquí, véase el capítulo 3 de [12].

3) Ziglin (1982) [24]. Más recientemente Ziglin demostró una condición necesaria para la existencia de n integrales primeras meromorfas de un sistema Hamiltoniano. Esta condición se traducía en que el grupo de monodromía de la ecuación en variaciones normales a lo largo de una curva integral debía tener una estructura "bastante simple" (teorema de Ziglin). Observamos que *Ziglin no supuso que el sistema Hamiltoniano inicial fuese integrable*, al no imponer que las integrales primeras estuviesen en involución.

4) Morales (1989) [11]. En mi tesis fué la primera vez que se aplicó la teoría de Galois diferencial al teorema de Ziglin, pero sin imponer condiciones de involución y bajo la hipótesis restrictiva de que las singularidades de la ecuación en variaciones eran puntos singulares regulares. Esta última hipótesis era necesaria al utilizar el teorema de Ziglin en la demostración de los resultados, ya que sólo así podiamos obtener el grupo de Galois como la adherencia Zariski del grupo de monodromía, y en ese momento no sabíamos todavía como evitar pasar por el teorema de Ziglin.

5) Churchill, Rod (1991) [4]. Independientemente, Churchill y Rod también tuvieron la idea de aplicar la teoría de Galois al teorema de Ziglin. Se vieron también obligados a hacer la hipótesis de que la ecuación en variaciones sólo tenía singularidades del tipo regular. Sus resultados eran sólo válidos para el caso de dos grados de libertad (i.e., $n = 2$),

pero aplicaron un algoritmo potente, que les permitía avanzar en las aplicaciones : el algoritmo de Kovacic.

6) Morales y Simó (1994)[17]. En este trabajo se hicieron algunas correcciones y refinamientos a los resultados de mi tesis.

7) Baider, Churchill, Rod y Singer (1996) [2]. Este artículo se puede considerar como un trabajo enciclopédico donde se abunda en la misma línea que los trabajos anteriores. Probablemente es el paper donde se observan de una manera más clara las limitaciones de las técnicas usadas hasta esa fecha.

Observamos que con el teorema 3 (o alguna de sus variantes) se obtienen los resultados anteriores como casos particulares; además, como fué observado por Churchill en su conferencia del seminario Kolchin ([3], pág.12,13), como un corolario del teorema 3, se obtiene que es posible sustituir el grupo de monodromía por el grupo de Galois en el teorema de Ziglin. Finalmente, hacemos notar que la demostración del teorema 3 se basa en técnicas completamente nuevas de tipo infinitesimal que no utilizan el teorema de Ziglin: se demuestra que el álgebra de Lie del grupo de Galois de la ecuación en variaciones es abeliana. Además dicho teorema ha sido generalizado actualmente en un trabajo conjunto con J.-P. Ramis y C. Simó a las ecuaciones en variaciones de orden superior [16] (véase también el capítulo 8 de [12]).

El teorema 3 (o alguna de sus variantes) ha sido aplicado con éxito por bastantes autores a un número considerable de sistemas Hamiltonianos y está considerado (véase, por ejemplo, la tesis de Nakagawa [19], pág 119), como el método más potente que existe hoy en día para el estudio de la no integrabilidad de estos sistemas desde que hace más de una centuria Poincaré planteó la necesidad de estudiar su no integrabilidad.

4. Una aplicación: el problema de Hill

Como una aplicación no del todo elemental del teorema 3, vamos a ver su aplicación al problema clásico de Hill de Mecánica Celeste. Se obtiene que este sistema no es integrable en el sentido de Liouville mediante integrales primeras meromorfas.

El problema de Hill es un problema límite del problema restringido de los tres cuerpos de Mecánica Celeste cuando la masa de uno de los primarios μ tiende a cero, siendo la masa del otro primario $1-\mu$. El problema de Hill es un modelo adecuado para el problema del movimiento de la Luna sometida a la acción de la Tierra y el Sol (μ representa entonces la masa de la Tierra y $1-\mu$ la del Sol), teniendo en cuenta que el Sol se encuentra muy alejado del sistema Tierra-Luna [5].

Después de algunas reducciones es posible demostrar que el Hamiltoniano se reduce a un Hamiltoniano de dos grados de libertad de la forma [21]:

$$H(x,y) = H_2 + H_4 + H_{6,} \tag{2}$$

de polinomios homogéneos de grados 2, 4 y 6, respectivamente:

$$\begin{aligned}
H_2(x,y) &= \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),\\
H_4(x,y) &= -2(x_1^2+x_2^2)(y_2x_1 - y_1x_2),\\
H_6(x,y) &= -4(x_1^2+x_2^2)(x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 + x_2^4).
\end{aligned}$$

Al sistema Hamiltoniano definido por (2) es al que vamos a aplicar el teorema 3. Por tanto, necesitamos encontrar una solución particular Γ y demostrar que la componente de la identidad del grupo de Galois de la ecuación en variaciones a lo largo de Γ no es abeliano.

Como solución particular Γ tomamos la siguiente:

$$x_1(t) = \frac{\phi(t)}{\sqrt{2}}, \quad x_2(t) = -\frac{\phi(t)}{\sqrt{2}}i, \quad y_1(t) = \frac{\phi(t)}{\sqrt{2}}i, \quad y_2(t) = \frac{\phi(t)}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

con

$$\phi^2(t) = \frac{6h}{3\wp(t;g_2,g_3)+1},$$

siendo $\wp(t;g_2,g_3)$ la función elíptica de Weiertrass de invariantes $g_2 = \frac{4}{3}$ y $g_3 = \frac{8}{27} - 64h^2$, denotando por h el nivel de energía que contiene a dicha solución. Al depender g_3 del nivel de energía h, no tenemos una sóla solución particular sino una familia de ellas. Supondremos que el nivel de energía de la solución es tal que la curva elíptica correspondiente no degenera, es decir, que las funciones elípticas que dan la solución no degeneran en funciones hiperbólicas.

Denotando $\phi^2(t) := w(t)$, y $z(t) = w'$, la *ecuación en variaciones* a lo largo de Γ es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}' \\ \bar{\eta}' \\ \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & -4w & 0 \\ i(-1+60w^2) & 0 & -4iz & 4w \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i(-1+60w^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La *ecuación en variaciones normales* viene dada por el bloque 2×2 superior izquierdo:

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i(-1+60w^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4 [18]

La componente de la identidad del grupo de Galois de la ecuación (4) no es un grupo abeliano. Por tanto, el problema de Hill no es integrable mediante integrales primeras meromorfas.

La demostración de este teorema es técnica y no la haremos aquí con detalle (ver el artículo original [18]), tan sólo mencionaremos que se basa en los siguientes ingredientes:

1) El cuerpo de coeficientes $M(\Gamma)$ de (4) es el cuerpo de funciones elípticas sobre la curva elíptica Γ y más concretamente los coeficientes son funciones elípticas con dos polos (dobles) en el paralelogramo de períodos.

2) Se conoce explícitamente una solución particular de la ecuación en variaciones normales (5) que viene expresada a través de funciones elípticas.

3) La otra solución de la ecuación en variaciones normales se calcula mediante integrales elípticas utilizando un método que se remonta a D'Alambert. Estas integrales elípticas son "genuinas" y no pueden reducirse a funciones elípticas.

4) Por 1), 2) y 3), el grupo de Galois de la ecuación (5) no es trivial y es un grupo unipotente de matrices triangulares de dimensión dos.

5) A partir de lo anterior, debido a la estructura triangular por bloques de la ecuación (4), la solución general de esta ecuación se obtiene por el método de variación de constantes y en dicho método aparece un logaritmo local en alguno de los polos de los coeficientes, es decir hay monodromía no trivial en el entorno de los polos de los coeficientes. Esta monodromía local da, a su vez, la otra contribución no trivial a la componente de la identidad del grupo de Galois que necesitamos.

6) Finalmente, teniendo en cuenta la correspondencia Galoisiana y la representación del grupo de Galois en el espacio vectorial de soluciones, se llega a al conclusión que la estructura de la componente de la identidad del grupo de Galois es de la forma

(6)

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu & -\kappa + \mu\beta & \gamma + \mu\kappa \\ 0 & 1 & \beta & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbf{C}, \kappa \in \mathbf{C}, \beta \in \mathbf{C}, \gamma \in \mathbf{C} \right\},$$

que no es abeliano.

Referencias

[1] V.I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[2] A. Baider, R.C. Churchill, D.L. Rod, M.F. Singer, On the infinitesimal Geometry of Integrable Systems. *Fields Institute Communications*,**7**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

[3] R.C. Churchill, Galoisian Obstructions to the Integrability of Hamiltonian Systems. *The Kolchin Seminar in Differential Algebra*, City College of New York, May, 1998.

[4] R.C. Churchill, D.L. Rod, On the determination of Ziglin monodromy Groups, *SIAM J. Math. Anal.* **22** (1991), 1790-1802.

[5] G. W. Hill, Researches in the Lunar theory, *American Journal of Mathematics* **1** (1878), p. 5-6, 129-147, 245-260.

[6] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra.* Hermann, Paris 1976.

[7] E. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups.* Academic Press, New York, 1973.

[8] E. Leimanis,*The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point.* Springer Tracts in Natural Philosophy Vol.7. Springer- Verlag, Berlin, 1965.

[9] A.M. Lyapounov, On a certain property of the differential equations of the problem of motion of a heavy rigid body having a fixed point,*Soobshch. Kharkov Math. Obshch.*, Ser. 2, **4** (1894), 123-140. Collected Works, Vol. 5, Izdat. Akad. SSSR, Moscow (1954) (in Russian).

[10] J. Martinet, J.P. Ramis, Théorie de Galois différentielle et resommation.*Computer Algebra and Differential Equations*, E. Tournier, Ed. Academic Press, London, 1989, 117-214.

[11] J.J. Morales-Ruiz, *Técnicas algebraicas para el estudio de la integrabilidad de sistemas hamiltonianos*, Ph.D. Thesis, University of Barcelona, 1989.

[12] J.J. Morales Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems*, Progress in Mathematics 179, Birhauser, Basel 1999.

[13] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, Galoisian Obstructions to Integrability of Hamiltonian Systems, *Methods and Applications of Analysis* **8** (2001) 33-96.

[14] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, A Note on the Non-Integrability of some Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential, *Methods and Applications of Analysis* **8** (2001) 113-120.

[15] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, Galoisian Obstructions to integrability of Hamiltonian Systems II, *Methods and Applications of Analysis* **8** (2001) 97-102.

[16] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó, Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations, to appear in *Ann. Sc. Ecole Normale Superieur.*

[17] J.J. Morales-Ruiz, C. Simó, Picard-Vessiot Theory and Ziglin's Theorem. *J.Diff.Eq.***107**(1994), 140-162.

[18] Juan J. Morales-Ruiz, Carles Simó, Sergi Simon, Algebraic proof of the non-integrability of the Hill's Problem, *preprint* 2004.

[19] K. Nakagawa, *Direct construction of polynomial first integrals for Hamiltonian systems with a two-dimensional homogeneous polynomial potential*, Dep. of Astronomical Science, The Graduate University for Advanced Study and the National Astronomical Observatory of Japan, Ph. D. Thesis 2002.

[20] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste,* Vol. I. Gauthiers-Villars, Paris, 1892.

[21] C. Simó, T. J. Stuchi, Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the Planar Hill Problem, *Physica* **D140** (2000), p. 1-32.

[22] M. van der Put, M. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, Berlin 2003.

[23] E. Vessiot, Sur l'integration des équations différentielles linéaires, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup. (3) **9** (1982), 197-280.

[24] S.L. Ziglin, Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), 181-189.